

Ройзман В. П.

Хмельницький національний університет

Royzman V. P.

Khmelnitskyi National University

УДК 621.01

О ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ БЕЗРЕЗОНАНСНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, БЕЗКРИТИЧЕСКИХ РОТОРОВ И СТЕРЖНЕЙ, НЕ ТЕРЯЮЩИХ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ СЖАТИИ

В статье обращается внимание на аналогии в явлениях потери устойчивости при сжатии длинных стержней и достижении критических частот вращения гибких валов, а также возможности заимствования и взаимоиспользования практики недопущения этих опасных состояний. Показаны способы создания безкритических роторов, безрезонансных конструкций и стержней, не теряющих устойчивость при сжатии.

Ключевые слова: безкритические роторы, безрезонансные конструкции, стержни, не теряющие устойчивости при сжатии.

Постановка проблемы. Потеря устойчивости стержневых конструкций, критические частоты вращения валов, резонансные состояния изделий и их частей всегда были и есть проблемой, требующей всё новых методов борьбы с ними. Вместе с тем между этими явлениями много сходства, а, следовательно, возможны и полезные взаимствования.

Анализ последних исследований и публикаций. По аналогиям перечисленных явлений и взаимствования методов борьбы с ними не было найдено публикаций.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы. Обозначенные в статье возможности из-за аналогий ранее не рассматривали.

Цель исследования: состоит в теоретическом и экспериментальном раскрытии аналогий между указанными тремя явлениями и заимствовании на основании этого методов борьбы с указанными нежелательными проблемами.

Основные результаты исследования. Сравним в линейной постановке решения задач о нахождении критических сил продольно-сжатого упругого стержня-вала постоянного по длине круглого поперечного сечения, опирающегося по концам на шарнирные опоры и критических частот вращения этого же стержня-вала или равных им собственных частот поперечных (изгибных)

колебаний. И в том и в другом случае используются интегро-дифференциальные зависимости теории изгиба [1, 2].

При продольном изгибе внешней нагрузкой является изгибающий момент M_z , который создается продольной сжимающей силой $P_{кр}$, умноженной на плечо (рис. 1), каковым является начальный прогиб вала $y = f(z)$ или даже эксцентриситет.

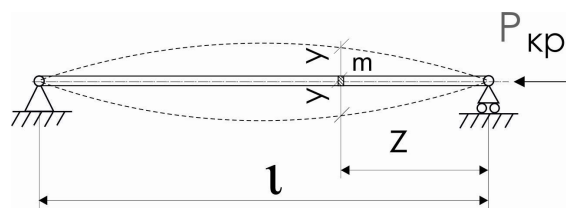


Рис. 1. К выводу формулы Эйлера и критической частоты вращения

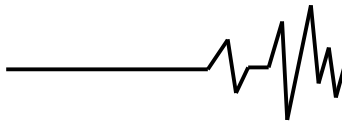
И в основу дальнейшего вывода положено приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня-вала

$$EI_{oc} y'' = M_z = -P_{кр} y, \quad (1)$$

где: E – модуль Юнга материала стержня; а I_{oc} – осевой момент инерции поперечного сечения круглого стержня-вала (рис. 1).

Это уравнение приводится к виду

$$y'' + k_1^2 y = 0, \quad (2)$$



где: $k_1 = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI_{oc}}}$.

При рассмотрении критических частот вращения вала внешней нагрузкой являются силы инерции интенсивности $q = m\omega^2$ равномерно распределённых по длине единичных масс вала m при прогибе $y = f(z)$, где ω – угловая скорость вращения вала.

Чтобы перейти от выражения (1) к q , нужно два раза продифференцировать это исходное дифференциальное уравнение изогнутой оси вала-стержня. И тогда получим

$$EI_{oc}y^{IV} = q = m\omega^2. \quad (3)$$

Это выражение приводится к виду

$$y^{IV} - k_2^2 y = 0, \quad (4)$$

где: $k_2 = \sqrt[4]{\frac{m\omega_{кр}^2}{EI_{oc}}}$.

Общее решение дифференциального уравнения второго порядка (2) должно содержать две произвольные постоянные A_1 и B_1 , а четвёртого порядка (3) – четыре: A_2, B_2, C_2, D_2 .

Решение уравнения (2)

$$y = A_1 \cos k_1 z + B_1 \sin k_1 z, \quad (5)$$

а решение уравнения (3)

$$y = A_2 \cos k_2 z + B_2 \sin k_2 z + C_2 e^{k_2 z} + D_2 e^{-k_2 z}. \quad (6)$$

В решениях обоих уравнений (5) и (6) произвольные постоянные определяются из граничных условий, т.е. условий закрепления концов стержня-вала на опорах. Так как стержень-вал свободно опирается на опоры, одна из которых – шарнирно-неподвижная, а другая – шарнирно-подвижная, то постоянные интегрирования определяются из условий равенства нуля прогибов и изгибающих моментов на этих опорах, т.е.

$$y = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l.$$

$$y'' = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = l.$$

Подставив эти условия в (5) и (6) и решив полученные уравнения, найдём, что $A_1 = A_2 = C_2 = D_2 = 0$ и $B_1 \sin k_1 l = 0$ – для задачи о нахождении критических сил Эйлера и $B_2 \sin k_2 l = 0$ – для задачи о нахождении критических частот вращения. Это возможно при условии, что либо B_1 и B_2 равны нулю либо $\sin k_1 l = 0$ и $\sin k_2 l = 0$.

Если B_1 и B_2 равны нулю (а все остальные произвольные постоянные – также

равны нулю) то это значит, что прогибы y отсутствуют, что противоречит условию задачи. Значит, равенства нулю B_1 и B_2 не могут быть условиями для определения критических сил и критических скоростей, так как при этих силах и скоростях прогиб стержня – вала не может быть всегда равным нулю.

Если же принять $\sin k_1 l = 0$ и $\sin k_2 l = 0$, то постоянные B_1 и B_2 могут принимать любые произвольные значения, прогиб y может быть любым, в том числе и бесконечно большим, что соответствует состоянию безразличного равновесия, то-есть вращению вала на критической скорости или потере устойчивости этого же стержня-вала под действием критической сжимающей силы.

Следовательно, условия $\sin k_1 l = 0$ и $\sin k_2 l = 0$ могут служить для определения величины критических сил и критических скоростей.

Оба условия выполняются в том случае, если

$k_1 l = n\pi$ и $k_2 l = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \dots, n$ – натуральный ряд чисел.

Откуда

$$k_1 = k_2 = \frac{n\pi}{l}, \text{ то есть } k_1^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{P_{кр}}{EI_{oc}}$$

откуда $P_{кр} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EI_{oc}$ – формула Эйлера (7)

$$\text{и } k_2^4 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} = \frac{m\omega_{кр}^2}{EI_{oc}}$$

откуда $\omega_{кр} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_{oc}}{m}}$ – формула для критических частот вращения. (8)

Таким образом, стержень-вал имеет бесконечно большое число критических сил Эйлера и критических скоростей вращения, которые соотносятся между собою как квадраты натуральных чисел n .

В обоих случаях мы имеем задачу о собственных значениях, в обоих случаях приходим к одинаковому условию нахождения ряда критических сил и ряда критических частот вращения через одинаковые выражения

$$k_1 = k_2 = \frac{n\pi}{l}. \text{ Поэтому в общем виде}$$

$$P_{кр}(\omega_{кр}) = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot \delta_{1(2)}, \quad (9)$$



где: $\delta_{1(2)}$ – коэффициенты, зависящие от длины, жёсткости и массы; $\delta_1 = EI_{oc}$,

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{EI_{oc}}{m}}$$

Из уравнений (5) и (6) следует, что уравнение упругой линии стержня-вала и в этом и в другом случае имеет вид $y = B \sin kz$. Следовательно, в обоих случаях форма изогнутой оси вала при его вращении на критической скорости и такого же продольно-сжатого стержня при действии критической силы соответствуют синусоиде. Для первой критической скорости и первой критической силы форма изогнутой оси содержит одну полуволну синусоиды, для второй критической скорости и второй критической силы – две полуволны синусоиды, то-есть полную волну (синусоиду), для третьей – три полуволны синусоиды и т.д. Таким образом, каждому значению критической силы и критической скорости соответствуют свои идентичные друг другу формы потери устойчивости (рис. 2).

Такая аналогия при выводе формулы Эйлера и критической скорости вращения стержня-вала, сходство полученных формул для значений критических сил и скоростей (отличия лишь в численных значениях

коэффициентов при $\frac{n^2 \pi^2}{l^2}$), идентичность

форм потери устойчивости позволяют предположить, что и методы борьбы, с опасными критическими состояниями, методы недопущения этих состояний должны быть аналогичными и могут заимствоваться и взаимноиспользоваться из практики эксплуатации конструкций, могущих терять устойчивость.

И это действительно так.

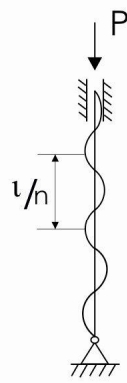
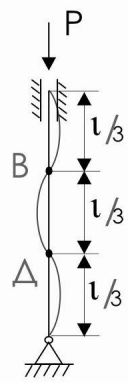
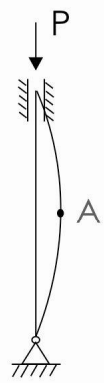
Если воспользоваться тем обстоятельством, что высшие (чем первая) формы потери устойчивости сами по себе неустойчивы без наличия промежуточных опор в узлах форм, то можно прийти к следующему методу недопущения критических состояний стержня-вала (рис. 2).

$$P_{кр1} = \frac{\pi^2}{l^2} EI_{oc}$$

$$P_{кр2} = \frac{4\pi^2}{l^2} EI_{oc}$$

$$P_{кр3} = \frac{9\pi^2}{l^2} EI_{oc}$$

$$\dots P_{крn} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EI_{oc}$$



$$\omega_{кр1} = \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI_{oc}}{m}} \quad \text{а)}$$

$$\omega_{кр2} = \frac{4\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI_{oc}}{m}} \quad \text{б)}$$

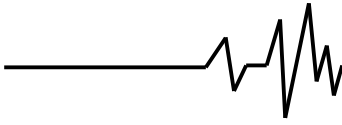
$$\omega_{кр3} = \frac{9\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI_{oc}}{m}} \quad \text{в)}$$

$$\dots \omega_{крn} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI_{oc}}{m}} \quad \text{г)}$$

Рис. 2. Формы потери устойчивости при критических силах и критических частотах вращения: а) первая форма; б) вторая форма; в) третья форма; г) n-я форма

Чтобы не допустить на практике проявления первой критической силы и первой критической скорости нужно в середине длины стержня-вала в т. А разместить лёгкий подшипник с радиальным зазором, равным допустимому прогибу стержня-вала. Тогда, как

только значения сжимающих сил и (или) скоростей вращения приблизятся к критическим значениям и начнут расти прогибы, стержень-вал, теряя устойчивость, коснётся опоры в пучности синусоиды, то-есть посередине длины l ; эта длина как бы



разобьётся на две половины и теперь для него критической силой будет

$$P_{кр2} = \frac{\pi^2}{(l/2)^2} \cdot EI_{oc} = \frac{4\pi^2}{l^2} EI = P_{кр2}$$

и критической скоростью

$$\omega_{кр2} = \frac{\pi^2}{(l/2)^2} \cdot \sqrt{\frac{EI_{oc}}{m}} = \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \omega_{кр2}$$

и вал выдержит рост сжимающей силы до $P_{кр2}$

и скорости вращения до $\omega_{кр2}$. Точно так же, чтобы не допустить проявления второй критической силы и второй критической скорости нужно в точках стержня В и Д, где должны иметь место пучности при потере устойчивости, соответствующей значениям второй критической силы и второй критической скорости разместить лёгкие подшипники с зазором, равными допустимому прогибу. И тогда как только значения скоростей вращения и сжимающих сил приблизятся ко вторым критическим значениям, вал, теряя устойчивость по второй форме изгиба, коснётся опор в точках В и Д и его длина как бы разделится на три части длиной $l/3$ каждая и теперь для него критической силой будет

$$P_{кр3} = \frac{9\pi^2}{l^2} \cdot EI_{min} \text{ и критической скоростью}$$

$$\omega_{кр3} = \frac{9\pi^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} \text{ и стержень-вал выдержит}$$

рост сжимающей силы до $P_{кр3}$ и частоты вращения до $\omega_{кр3}$.

А в целом, идея создания стержня, не имеющего на практике критических сил, то есть не теряющего устойчивости от продольной сжимающей силы и такого же как стержень, вращающегося вала, не имеющего критических скоростей, основана на автоматических изменениях жёсткости системы стержень (вал)-опора, например, изменении длины стержня-вала между опорами при приближении к значениям критических сил или критических частот вращения, а после прохода-возвращении к прежнему значению, что даёт возможность устранить потерю устойчивости при разгоне вала до рабочих частот вращения или при росте сжимающей силы до максимально-допустимого значения, определяемого из условия прочности. При этом для устранения критических состояний стержня-вала по одной, двум, трём и т.д. собственным формам потери устойчивости опоры-ограничители прогиба следует

устанавливать в местах максимальных прогибов (пучностей) соответствующих форм. Если необходимо устранить потерю устойчивости по всем критическим формам, то устанавливают одну такую опору – ограничитель прогиба по всей длине стержня-вала (рис. 3).

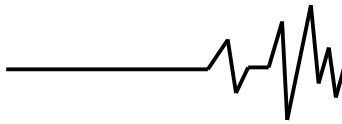
При приближении значения сжимающей силы к очередному критическому значению или частоты вращения к очередной критической скорости в соответствующих сечениях стержня-вала начнут возрастать прогибы. При выборе зазора стержень-вал соприкоснётся с ограничителями прогиба, установленными, в указанных сечениях, и таким образом получит дополнительные опоры, укорачивающие его длину между опорами, что, как видно из формул (7) и (8), изменяет (увеличивает) значение критической силы и критической частоты вращения. Следовательно, стержень-вал уже не будет находиться в состоянии безразличного равновесия, означающего потерю устойчивости, и сможет безболезненно перенести прохождение через значение сжимающей силы или частоты вращения, которые теперь, при касании об опоры, уже не являются критическими. При приближении частоты вращения или значения сжимающей силы к следующему критическому значению другие сечения стержня-вала коснутся ограничителя прогиба и произойдёт изменение жёсткости системы, аналогичное описанному выше, и эти значения уже не будут критическими и не приведут к потере устойчивости.

Идея создания описанным выше образом безкритического ротора была проверена на лабораторной установке ДМЗ6М для демонстрации явления критических оборотов вала, доработанной по схеме рис. 3, где изображён гибкий ротор с саморегулирующейся жёсткостью – изменением длины между опорами [3].

Гибкий ротор содержит опоры 1 и 2, закреплённые на основании (не показано), в которых установлен вал 3, к нему посредством фланцев 4 и 5 прикреплена оболочка (труба) 6, радиальный зазор между валом 3 и оболочкой 6 ограничивается их допустимым взаимным прогибом на критических режимах работы. При этом жёсткости вала 3 и оболочки 6 выбираются различными.

Гибкий ротор работает следующим образом.

Ротор разгоняется до рабочей частоты вращения. При приближении частоты вращения ротора к очередной критической



частоте вал 3 начинает прогибаться по соответствующей этой частоте форме и соприкасается с оболочкой 6 в сечениях, соответствующих максимумам его перемещений, т.е. вал 3 приобретает

дополнительные опоры (опору), мгновенно изменяющие значение его критической скорости. Аналогичным образом происходит гашение прогиба на критических частотах оболочки 6 при контактировании её с валом 3.

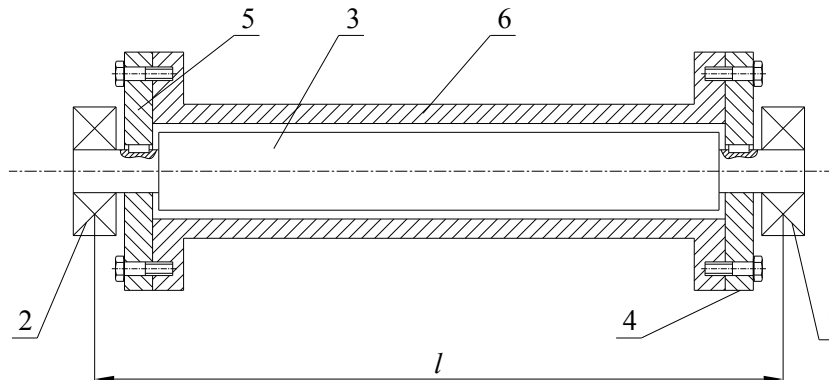


Рис. 3. Схема безкритического ротора

Таким образом, ротор проходит критические частоты вращения. Количество точек контакта между валом 3 и оболочкой 6 определяется формой их прогиба и частотой критических оборотов. После прохождения критических частот деформации деталей уменьшаются, и контакт между ними исчезает, что возвращает жёсткости вала 3 и оболочки 6 к первоначальному состоянию на докритических частотах вращения.

До начала эксперимента посередине длины вала, краской была нанесена круговая метка длиной 20 мм. Запуски установки ДМЗ6М с оболочкой 6 и без неё до 5000 об/мин. показали, что при запуске с оболочкой 6 амплитудно-частотные характеристики имели лишь небольшой резонанс с амплитудой в 9,4 раза меньшей, чем без оболочки. После разборки установки на закрашенном месте вала четко был виден отпечаток касания вала о трубу.

Для двух – трёх вальных роторов газотурбинных двигателей эта идея может быть реализована, например, установкой в местах пучностей колебаний межвальных роликовых подшипников с радиальным зазором, равным допустимому прогибу валов.

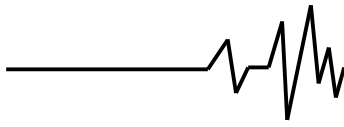
А воплощение в жизнь идеи создания стержня, не имеющего критических сжимающих сил, можно увидеть, например, в конструкциях противооткатных устройств некоторых артиллерийских орудий, имеющих гидравлический тормоз отката. При выстреле ствол под действием силы отдачи откатывается назад, сжимая шток в виде длинного стержня, несущего на противоположном конце поршень с

отверстиями, который движется в цилиндре, заполненном тормозной жидкостью. Вот этот шток заключён в оболочку и такая конструкция предотвращает потерю устойчивости штока при действии откатной сжимающей силы.

Обобщая изложенное, можно прийти к общей идее создания конструкций, которые бы не теряли устойчивость, т.е. не имели бы резонансов, критических сил, скоростей и других состояний безразличного равновесия.

Все такие конструкции должны обладать возможностью изменять свои свойства (параметры) при приближении к состоянию безразличного равновесия, а после его прохождения – возвращаться к исходным свойствам. Эти параметры конструкции могут в заданный момент изменять свои численные значения автоматически или принудительно по команде оператора путём изменения жёсткостей, масс, длин, количества опор и других факторов, определяющих численные значения параметров состояний безразличного равновесия, например, в моменты достижений максимально-допустимых деформаций элементов конструкции.

Практическая возможность создания безрезонансных конструкций структурно-сложных механических систем была проверена на типовом блоке бортовой радиоэлектронной аппаратуры. Это блок этажерочной конструкции расположения в нём функциональных плат состоит из корпуса почти призматической формы с тонкими фигурными стенками-пластинами, на которых установлены направляющие для вхождения в них и крепления функциональных плат, несущих на себе многочисленные элементы навесного



монтажа. Такая конструкция с нежестким корпусом и платами, нерегламентированной затяжкой крепёжных элементов имеет довольно плотный спектр резонансов. Изменение жесткости подвески плат и усилий затяжки приводит лишь к смещению резонансных частот в ту либо другую сторону.

Учитывая, что конструкции блоков РЭА иногда бывают двухкорпусными, для виброизоляции, указанный блок РЭА помещался во второй более просторный корпус. Внутренний корпус такой конструкции блока облегалась резиновая пневматическая камера фигурной формы, конструкция которой не препятствовала проходу проводов, штекеров, штуцеров, а также любых выступающих частей. Камеру накачивали воздухом так, чтобы её поверхность упиралась в оба корпуса и таким путём образовывалась упругая связь между внутренним и наружным корпусами.

Жёсткость такой связи можно было менять за счёт изменения давления воздуха в камере.

В таком виде блок наружным корпусом крепился к вибростенду и испытывался в диапазоне частот 0...500 Гц. Вибрации контролировались пьезодатчиками, установленными на корпусе, платах блока, а также на столе вибростенда.

Если при изменении частоты возбуждения вибрации плат возрастали и значительно превосходили вибрации стола вибростенда, то вручную изменяли давление в камере, сдвигая резонансную частоту, и вибрации падали.

Если до установки пневмокамеры вибрации корпуса блока и его плат на некоторых резонансных частотах в 4-12 раз превосходили вибрации стола вибростенда, то после установки пневмокамеры и «обхода» резонансных частот путём регулировки давления воздуха в диапазоне частот 0...30 Гц вибрации функциональных плат и основного корпуса блока были снижены в 3-5 раз, на частотах возбуждения 30-45 Гц – были существенно меньше вибраций стола вибростенда, а на частотах более 45 Гц – были равны точности измерения, т.е. блок вёл себя, как сейсмически подвешенная масса.

Выводы: Общая идея создания конструкций, не имеющих состояний безразличного равновесия, состоит в том, что они должны обладать возможностью при приближении к состоянию безразличного равновесия – менять свои свойства, а после его прохождения, возвращаться к исходным свойствам.

Список использованных источников

1. Писаренко С. С. Сопrotивление материалов. – К. : «Техника», 1967. – 791 с.
2. Ройзман В. П. Прикладна механіка. Опір матеріалів. – К. : «Центр навчальної літератури». 2004. – 116 с.
3. А. с. 1229621 СССР. Гибкий ротор / В. П. Ройзман, Л. Д. Вайнгортин (СССР). – Бюл. №17 7/В.85г. – 2 с. : ил.

Список источников в транслитерации

1. Pisarenko S. S. Soprotivlenie materialov. – K. : "Tekhnika", 1967. – 791 s.
2. Royzman V. P. Prikladna mehanika. Opir materialov. – K. : "Tsentr navchaknoi literature". 2004. – 116 s.
3. A. s. 1229621 SSSR. Gibky rotor / V. P. Royzman, L. D. Vayngortin (SSSR). – Bul. №17 7/В.85g. – 2 s. : il.

ПРО МОЖЛИВІСТЬ СТВОРЕННЯ БЕЗРЕЗОНАНСНИХ КОНСТРУКЦІЙ, БЕЗКРИТИЧНИХ РОТОРІВ І СТРИЖНІВ, ЯКІ НЕ ВТРАЧАЮТЬ СТІЙКОСТІ ПРИ СТИСКУ

Анотація. У статті звертається увага на аналогії в явищах втрати стійкості при стисканні довгих стрижнів і досягненні критичних частот обертання гнучких валів, а також можливості запозичення і взаємовикористання практики недопущення цих небезпечних станів. Показані способи створення безкритичних роторів, безрезонансних конструкцій і стрижнів, що не втрачають стійкість при стисненні.

Ключові слова: безкритичні ротори, безрезонансні конструкції, стрижні, які не втрачають стійкості.

POSSIBILITY OF CREATING NON- RESONANCE DESIGN, NON-CRITICAL ROTORS AND RODS STABLE TO COMPRESSION

Annotation. The paper focuses on the analogy between the phenomena of buckling long rods under compression and reaching critical rotation frequencies of flexible shafts, and also on the possibility to adopt and use practices to prevent these dangerous conditions. The methods for creating non-critical rotors, non-resonance designs and rods stable under compression have been shown.

Key words: non-critical rotors, non-resonance designs, rods, stable under compression.