

Дем'яненко А. Г.

*Дніпропетровський  
державний аграрно-  
економічний  
університет*

Demianenko A. G.

*Dnepropetrovsk State  
University of Agriculture  
and Economics*

УДК 534.113:539.3

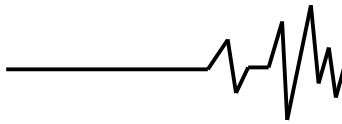
## ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ І АНАЛОГІЇ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ СТИСНУТИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИНОК ТА ПЛАСТИНОК З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

*Розглянуто механічні і відповідні їм математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем під дією рухомого інерційного навантаження та деякі інші механічні системи. дослідження яких зводиться до таких математичних моделей. Наведено певну аналогію в математичних моделях стиснутих прямокутних пластинок з рухомим інерційним навантаженням. що дозволяє в деяких випадках отримати наближені значення критичних параметрів, які в подальшому можна уточнювати та використовувати для дослідження, як кількісних характеристик, так і деяких якісних особливостей поведінки механічної системи.*

**Ключові слова:** динаміка, інерція, частота, критична швидкість.

**Вступ.** З дня виникнення проблеми дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди, приводом до чого було руйнування Честерського мосту в Англії у травні 1847 року, минуло 158 років. За цей період розглянуто і досліджено багато задач з урахуванням впливу рухомих навантажень різних за природою і характером дії на самі різноманітні конструкції, системи і споруди. Сучасний розвиток техніки, збільшення швидкостей і інтенсивності руху транспорту, інтенсифікація виробничих процесів висувають перед дослідниками нові задачі, які потребують розробки і застосування більш точних механічних і, відповідно, математичних моделей, які більш повно і точно відображають і викривають суть явища, що в свою чергу призводить до необхідності удосконалення, модифікації традиційних і пошуку нових концепцій і методів дослідження. Як слушно наголошено авторами роботи [1] прикладне математичне дослідження складної задачі має структуру послідовного уточнення. Спочатку будується грубий розв'язок, після чого за його допомогою уточнюється механічна та відповідна математична модель або метод дослідження математичної моделі, що в свою чергу призводить до більш точного розв'язку, який у подальшому також можна уточнювати. Мета уточнення може бути різною. У першому

випадку, якщо точність грубого розв'язку недостатня з кількісної або якісної сторони для досліджуваного процесу, явища. Тут грубий розв'язок має допоміжне, початкове значення для побудови більш точного розв'язку. У другому випадку наближений розв'язок задовільняє дослідника, але необхідно з'ясувати межі його придатності. Тут уточнений розв'язок використовують саме для визначення межі придатності наближеного розв'язку, отриманого на основі спрощених гіпотез і моделей. Слід зауважити, що перевага грубих наближених моделей і розв'язків полягає у їх простоті, прозорості і наочності а, відповідно до цього, і схема застосування цих розв'язків у багатьох випадках є доцільною та виправданою з цілої низки міркувань та позицій. Наочним прикладом такого підходу є розв'язки одних і тих же задач спрощеними методами опору матеріалів та більш точними методами теорії пружності. Саме така ідеологія і використовується у роботах [2-4] при дослідженні задач динаміки одномірних пружних тіл а в цій роботі пружних прямокутних пластинок під дією рухомого інерційного навантаження. По перше, з'ясовується аналогія у математичних моделях, які описують наближену, спрощену механічну модель динаміки пружної прямокутної пластинки з



рухомих інерційним навантаженням та механічну модель стиснутої пружної прямокутної пластинки. При цьому зауважимо, що задачі стійкості стиснутих прямокутних пластинок досліджені більш повно та детально. Відомо багато літератури [6] і, навіть довідників [5], де наведені результати досліджень. Дана робота є продовженням досліджень [2-4], де основна увага приділена дослідження математичної моделі динаміки балки Тимошенко під дією рухомого інерційного

навантаження, яка знаходиться на пружній основі під дією осьової стискуючої сили. Розв'язок задачі будується на основі метода двохвильового подання руху у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань [2]. Клас задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень має цілу низку специфічних особливостей а за значимістю та складністю являє самостійний науковий напрямок у будівельній механіці та в МТДТ.

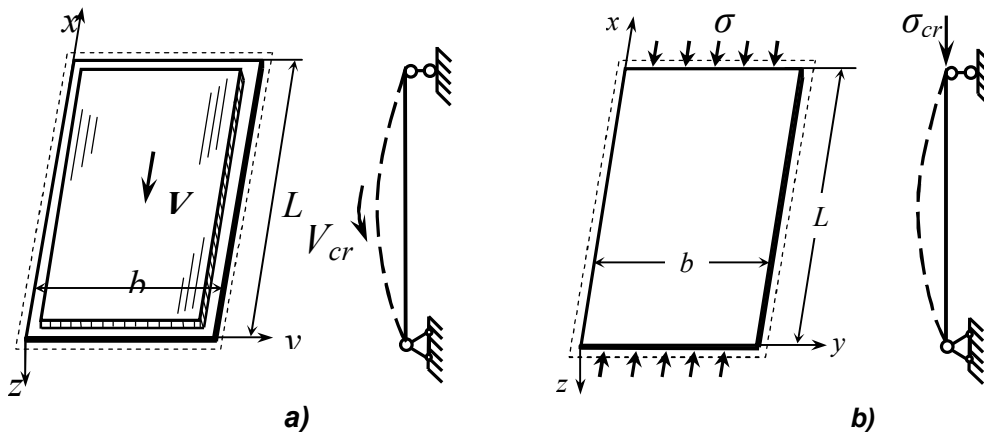


Рис. 1. Розрахункові схеми: а) пластинки з рухомих навантаженням; б) стиснутої пластинки

**Коливання і стійкість прямокутних пружних пластинок. Механічні, математичні моделі, їх особливості та деякі аналогії.**

Розглянемо задачу про поперечні коливання прямокутної пластинки  $L \times b$ , товщиною  $h$ , паралельно більшій стороні  $L$  якої рухається зі швидкістю  $v$  потік розподіленого навантаження з вагою на одиницю площі  $q_1(x)$  (рис.1 а). На першому кроці вважатимемо швидкість рухомого навантаження сталою.

Рівняння рівноваги елемента пластинки під дією поперечного навантаження  $Z$ , як відомо має вигляд [6]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + Z = 0, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Після підстановки виразів (2) в диференціальне рівняння (1) отримаємо рівняння рівноваги пластинки відносно функції прогину  $w(x,y)$

$$D \nabla^4 w = D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = Z, \quad (3)$$

У наведених виразах  $h$ -товщина пластинки,  $E, \mu$  -модуль Юнга і коефіцієнт Пуасона матеріалу пластинки. Приймавши до уваги дію на пластинку потоку рухомого рівномірно розподіленого навантаження, яке рухається зі сталою швидкістю паралельно осі  $x$

$$Z(x, y, t) = - \frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2 \frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4)$$

рівняння руху пластинки набере вигляду

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

де  $q_0$  – вага пластинки на одиницю площі, а



$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (6)$$

циліндрична жорсткість пластинки. Розв'язок диференціального рівняння (5) будемо при

$$\begin{aligned} w(0, y, t) = 0, \quad w(L, y, t) = 0, \quad w''(0, y, t) = 0, \quad w''(L, y, t) = 0, \\ w(x, 0, t) = 0, \quad w(x, b, t) = 0, \quad w''(x, 0, t) = 0, \quad w''(x, b, t) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Початкові умови прийемо у вигляді

$$w(x, y, 0) = f_1(x, y), \quad \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = f_2(x, y). \quad (8)$$

Дифференціальне рівняння у змішаних похідних (5) описує вільні коливання пластинки відносно квазістатичного положення.

Головними особливостями математичної моделі (5)-(8) є, по перше, наявність у диференціальному рівнянні руху (5) інерційного оператора (4), який визначає силову дію на пластинку рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія (4) залежить від інтенсивності  $q_1(x)$  і швидкості руху потоку навантаження  $v$ , від деформації пластинки  $w(x, y, t)$ , від прискорення деформації  $w_{tt}(x, y, t)$ , швидкості кутової деформації  $w_{tx}(x, y, t)$ , зміни кривини поверхні пластинки  $w_{xx}(x, y, t)$  і слідує за ними, що є другою суттєвою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень. Третьою особливістю є наявність у диференціальному рівнянні руху (5) непарної за часом змішаної похідної, яка викликає деякі труднощі при побудові аналітичного розв'язку, а саме, не дозволяє розділити змінні  $x, y$  і  $t$  за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. Практичне застосування такої механіки і, відповідно, математичної моделі можемо знайти при дослідженні динаміки мостів, естакад, по яким рухаються потоки транспорту, охолоджувальних систем з урахуванням інерційної дії охолоджуючої рідини, транспортуючих систем та інших механічних систем, де природа і характер дії рухомих навантажень можуть бути самими різними.

У першому грубому наближенні, нехтуючи силами інерції Коріоліса та розглядаючи пластинку розташовану у

відповідних крайових та початкових умовах. У випадку, коли усі края пластинки шарнірно обіперті, крайові умови запишемо наступним чином

вертикальній площині у байдужому стані виходячи з (5) отримаємо наступне диференціальне рівняння серединної поверхні пластинки

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{q_1 v_{cr}^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

Що ж стосується диференціального рівняння (5) то його часткові розв'язки відшукуємо у вигляді [2]

$$w(x, y, t) = \varphi(x, y) \cos \omega t + \psi(x, y) \sin \omega t. \quad (10)$$

Після підстановки виразу (10) у рівняння (5) та введення комплексної функції дійсних змінних

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (11)$$

розв'язок диференціального рівняння (5) після розділення змінних  $x, y$  і  $t$  зводимо до розв'язку диференціального рівняння відносно функції  $\Phi(x, y)$

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \\ - 2i\omega \frac{q_1 v}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{q_0 + q_1}{g} \omega^2 \Phi = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

розв'язок якого  $\Phi(x, y)$  з урахуванням крайових умов (7) представимо у вигляді

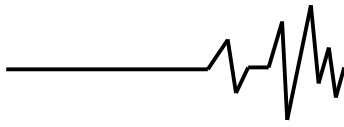
$$\Phi(x, y) = \sum_m F_m(x) \sin \frac{m\pi}{b} y. \quad (13)$$

Задовільняючи крайовим умовам (7), які для функції  $F_m(x)$  запишуться наступним чином

$$F_m(0) = 0, \quad F_m(1) = 0, \quad F_m''(0) = 0, \quad F_m''(1) = 0 \quad (14)$$

загальний розв'язок рівняння (12) з урахуванням (14) запишеться

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = \sum_{m,n} \{ [T_n(x) + B_{2n} U_n(x)] \cos \delta_n x + [B_{1n} S_n(x) + B_{2n} \text{sh} \beta_n x] \sin \delta_n x \} \sin \frac{m\pi}{b} y + \\ + i \sum_{m,n} \{ [V_n(x) + B_{2n} S_n(x)] \sin \delta_n x + [B_{2n} \text{sh} \beta_n x - B_{1n} U_n(x)] \cos \delta_n x \} \sin \frac{m\pi}{b} y, \end{aligned} \quad (15)$$



где  $T_n(x)$ ,  $U_n(x)$ ,  $S_n(x)$ ,  $V_n(x)$  – модифіковані функції Кривола [3]. Остаточо загальний

точний розв'язок математичної моделі (5) – (7) має вигляд [2]

$$w(x, y, t) = \sum_{n,m} a_{n,m} \left[ \operatorname{Re}(\Phi_{n,m}(x, y)) \cos(\omega_{n,m} t + \alpha_{n,m}) + \operatorname{Im}(\Phi_{n,m}(x, y)) \sin(\omega_{n,m} t + \alpha_{n,m}) \right] \quad (16)$$

де довільні сталі  $a_{n,m}$  и  $b_{n,m}$  визначаються за початковими умовами (8).

Процедура побудови розв'язку диференціального рівняння руху пластинки (5) з відповідними крайовими умовами вимагає виконання деяких операцій [2], які дуже складно, а іноді, і неможливо реалізувати в аналітичній формі без застосування сучасних інформаційних технологій, наприклад, для обчислення коренів алгебраїчного рівняння четвертої степені з комплексними коефіцієнтами, обчислення частотного визначника матриці  $4 \times 4$  с комплексними елементами, визначення параметрів при яких він дорівнює нулю і таке інше. В свою чергу, для побудови та дослідження коливальних і стійкості методом двохвильового подання (10) необхідно знати початкові, відправні значення деяких параметрів, які в подальшому підлягають уточненню. Саме з цієї точки зору являє інтерес рзглянути стійкість стиснутої в одному напрямку нормальними напруженнями прямокутної пластинки, розташованої у вертикальній площині (рис. 1b).

Відомо [6,8], що задача визначення критичної стискувочої сили для такої пластинки зводиться до розв'язування наступного диференціального рівняння

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \sigma_{cr} h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (17)$$

Порівнюючи отримане диференціальне рівняння з рівнянням (9) бачимо, що вони формально співпадають, що дає змогу зробити висновок, що дія рухомого інерційного навантаження на пластинку формально зводиться до дії стискувочих нормальних напружень, тобто ці дії по наслідкам еквівалентні. Аналогія задач, яка полягає в

першу чергу в аналогіях математичних моделей, при більш глибокому дослідженні спостерігається і в поведінці пластинок, у тому числі, і в критичних станах. Стійкість стиснутих прямокутних пластинок у пружній області досліджена досить повно. Для багатьох випадків навантаження, при різних крайових умовах, для різних геометрико-жорсткісних параметрів пластинок отримані та наведені [5,6,8] формули і таблиці для визначення критичного значення нормальних напружень або стискувочої сили. Прирівнявши відцентрові сили інерції при критичному значенні швидкості руху навантаження критичному значенню стискувочої сили

$$q_1 v_{cr}^2 / g = h \sigma_{cr} \quad (18)$$

знайдемо у загальному вигляді вираз для визначення критичної швидкості руху навантаження

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{h \sigma_{cr} g}{q_1}} \quad (19)$$

Використовуючи [5,6] знаходимо для пластинки вільно обіпертої сторонами  $b$  і вільними краями  $L$  вирази для визначення критичного нормального напруження

$$\sigma_{cr} = k_0 \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (20)$$

і відповідно для визначення критичного значення швидкості

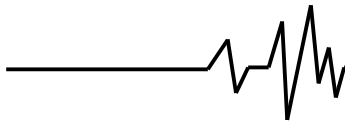
$$V_{cr} = \frac{\pi h}{b} \sqrt{k_0 \frac{E h}{12(1-\mu^2)} \frac{g}{q_1}} \quad (21)$$

Значення коефіцієнта  $k_0$  визначаємо [5] за таблицею 1 в залежності від співвідношення сторін  $\gamma = L/b$

Таблиця 1

Значення коефіцієнта  $k_0$  в залежності від відношення сторін пластинки  $\gamma = L/b$

$\gamma$	0,5	1	1,5	2	2,5	3,0
$k_0$	3,83	1,039	0,47	0,27	0,18	0,13



У випадку вільно обіпертих сторін пластинки маємо наступний вираз для визначення критичного значення стискуючого напруження

$$\sigma_{cr} = k_1 \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \quad (22)$$

Значення коефіцієнта  $k_1$  в залежності від співвідношення сторін знайдемо у відповідній таблиці [5]. В загальному випадку критичне значення нормального напруження визначаємо наступним чином

$$\sigma_{cr} = k_i \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2, \quad (23)$$

де коефіцієнт  $k_i$  знаходимо за відповідними таблицями в залежності від умов закріплення кромки пластинки та співвідношення її геометричних розмірів [5,6].

### Висновки

Виявлена аналогія в математичних моделях розглянутих задач, яка дозволяє наближено визначати критичне значення швидкості руху інерційного навантаження, використовуючи яке, як нульове наближення, в подальшому уточнювати та досліджувати як кількісну так і якісну сторони процесу коливальності та стійкості прямокутних пластинок під дією рухомих інерційних навантажень, природа та характер дії яких можуть бути самими різними. Для практики являє інтерес випадок, коли по тим чи іншим причинам пластинка стиснута, наприклад термонапруженнями, і водночас знаходиться під дією рухомого інерційного навантаження, наприклад охолоджуючої рідини. При суттєвих значеннях стискуючої сили критичне значення швидкості руху рідини навантаження може бути малим і на практиці досить реальним для втрати пластинкою стійкості.

### Список використаних джерел

1. Блехман И.И. Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов / И.И.Блехман, А. Д. Мышкис, Я.Г.Пановко. - К.: Наукова думка, 1976. - 269 с.
2. Горошко О. О. Двохвильові процеси в механічних системах/ О.О.Горошко, А.Г.Дем'яненко, С.П.Кибя. - К.: Либідь, 1991. - 188 с.
3. Демьяненко А. Г. Модифицированные функции Крылова и их применение в задачах динамики упругих систем с подвижной инерционной

нагрузкой/А.Демьяненко// Theoretical Foundation of Civil Engineering. – 2013. - Warsaw, V.21. С. 205-210.

4. Дем'яненко А. Г. Механічні і математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження/ А.Г.Дем'яненко // Вібрації в техніці та технологіях.- 2014.- № 2(74). С. 12-22.

5. Вайнберг Д.В. Справочник по прочності, устійливості и колебаніям пластин/ Д.В.Вайнберг. – К: Будівельник, 1973, 488 с.

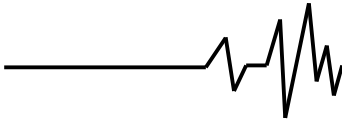
6. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем/А.С.Вольмир.- М.: Наука, 1967 – 984 с.

7. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г.Пановко, И. И Губанова. – М.: Наука, 1987 – 352 с.

8. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле/ С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

### Список джерел в транслітерації

1. Blekhman I.I.Prikladnaia matematika: Predmet,logika,osobennosti podkhodov/I.I. Blekhman, A.D.Mishkis, Ia.H.Panovko. – К; Naukova dumka, 1976.-269 s.
2. Horoshko O.O. Dvokhivlevi protsesi v mekhanichnikh sistemakh/O.O. Horoshko, A.G.Demianenko, S.P.Kiba. - К;Libid, 1991, - 188 s.
3. Demianenko A.G. Modifitsirovanie funktsii Krilova I ikh primenenie v zadachakh dinamiki uprugikh system s podvizhnoy inertsiionoy nagruzkoy/A. G.Demianenko // Theoretical Foundation of Civil Engineering. Warsaw, 2013. V.21, s. 205-210.
4. Demianenko A.G Mekhanichni i matematichni modeli zadach dynamiki pruzhnikh system z rukhomim inertsiionnim navantahzenniam ta ikh doslidzhennia/ A.G Demianenko // Vibratsiy v tekhnitsi ta tekhnologiyakh.- № 2(74), 2014, s. 12-22.
5. Vayinberg D.V. Spravochnik po prochnosti,ustoychivosti I kolebaniiam plastin / D.V. Vayinberg – К: Budivelnik, 1973, 488 s.
6. Volmir A.S. Ustoychivost deformirovanikh system/A.S. Volmir.- М.: Nauka, 1967 – 984s.
7. Panovko Ia.G. Ustoychivost i kolebaniiia uprugikh system/ Ia.G.Panovko, I.I.Hubanova. – М.: Nauka, 1987 – 352 s.
8. Timoshenko S.P. Vibration problems in engineering / S.P. Timoshenko. – М.: Nauka, 1967. – 444 s.

**НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ И АНАЛОГИИ  
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГИХ СЖАТЫХ  
ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК И  
ПЛАСТИНОК С ПОДВИЖНЫМ  
ИНЕРЦИОННЫМ ПОГРУЗОЧНЫЕ-ГРУЗКИ**

**Аннотация.** Рассмотрены механические и соответствующие математические модели некоторых задач динамики упругих систем под действием подвижной инерционной нагрузки и некоторые другие механические системы, приводящиеся к таким математическим моделям. Приведены аналогии в математических моделях сжатых прямоугольных пластинок и пластинок с подвижной нагрузкой, что позволяет в некоторых случаях получить приближенные значения критических параметров, которые в дальнейшем можно уточнять и использовать для исследования как количественных так и некоторых качественных особенностей поведения пластинок.

**Ключевые слова:** динамика, инерция, сила, частота, критическая скорость.

**SOME FEATURES AND ANALOGIES IN  
THE DYNAMICAL PROBLEM OF THE  
COMPRESSED ELASTIC RECTANGULAR  
PLATES AND THE PLATES UNDER MOVABLE  
INERTIA LOADING**

**Annotation.** This work describes the mechanical models with their respective mathematical models for some problems of the dynamic of elastic systems under movable inertia loads and some other mechanical systems with similar mathematical models. As a result of the work, the analogies in the mathematical models of compressed rectangular plates and plates with the moving load have been proposed, that allows to obtain the approximated values of the critical parameters of the mechanical systems for further clarification or for research of their quantitative and qualitative characteristics, and to study the behavioral features of the rectangular plates.

**Key words:** frequency, mobile, inertia load, critical speed, dynamics.