Ольшанський В. П.

Ольшанський С. В.

Бурлака В. В.

Малець О. М.

Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. П.Василенка

Olshanskii V. P.

Olshanskii S. V.

Burlaka V. V.

Malets O. M.

Kharkiv Petro Vasylenko National Technical Univerciti of Agriculture

УДК 539.3:534.1

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ГІПЕРБОЛІЧНО ЗМІННОЇ МАСИ

У функціях Ейрі, без урахування дії реактивної сили, побудовано аналітичний розв'язок задачі про вільні нестаціонарні коливання осцилятора, зміна маси якого є дробово-лінійною функцією часу. Показано, що в математичному аспекті, до цієї задачі призводить також моделювання руху системи сталої маси, але лінійно-змінної жорсткості. Одержано компактні асимптотичні формули для обчислення амплітуд і тривалостей напівциклів. Встановлена можливість розрахунку вільних нестаціонарних коливань осцилятора модифікованим методом енергетичного балансу, без застосування спеціальних функцій.

Ключові слова: *коливання, рівняння руху, змінна маса, функції Ейрі, асимптотичні наближення, метод енергетичного балансу.*

Вступ. Задача про вільні коливання осцилятора монотонно змінної маси постає при аналізі динаміки окремих елементів машин [1], [2]. Огляд досліджень останніх років з цієї проблеми надруковано в [3]. Оскільки рівняння коливань мають змінні коефіцієнти, то їх точні аналітичні розв'язки для певних законів зміни маси, виражаються в спеціальних функціях [2], [4], [5], [6], [7]. Для побудови наближених аналітичних розв'язків у цьому класі задач можуть успішно використовуватись асимптотичні методи нелінійної механіки [8], [9], [10], а також метод ВБК [11]. На відміну від указаних публікацій, тут розглядаємо задачу, коли зміна маси системи у часі відбувається за гіперболічним законом. Знаходимо її точний аналітичний розв'язок в спеціальних затабульованих функціях. З'ясовуємо можливості проведення наближених розрахунків коливань модифікованим методом енергетичного балансу.

Метою роботи є одержання та опробація формул, для обчислення амплітуд і тривалостей напівциклів при вільних коливаннях осцилятора, у якого маса змінюється у часі за гіперболічним законом.

У математичній моделі коливань не враховуємо дію реактивної сили. Саме так поступив І.В. Мещерський, при розгляді малих коливань математичного маятника лінійно-змінної маси [12].

Основна частина роботи. Вважаємо, що вільні нестаціонарні коливання осцилятора спричинені початковим відхиленням його від положення рівноваги або миттєвим імпульсом сили, що надає певну початкову швидкість системі. Рух описуємо диференціальним рівнянням:

$$\frac{m}{в_0+\gamma t}\ddot{x}+cx=0\,, \qquad (1)$$

де $m,\ в_0,\ \gamma$ - параметри, які характеризують зміни маси системи у часі t, при $\gamma>0$ - вона зменшується, а при $\gamma<0$ - збільшується;

$m/в_0$ - значення маси при $t=0$; c - коефіцієнт жорсткості пружини осцилятора; $x=x(t)$ - його відхилення від положення рівноваги $x=0$; крапкою над x позначено похідну по t.

Надалі, замість (1), будемо розв'язувати при $в_0+\gamma t>0$ еквівалентне йому рівняння:

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}(в_0+\gamma t)x=0\,, \qquad (2)$$

що описує вільні коливання осцилятора лінійно-змінної жорсткості. Таким чином, одержані нижче розв'язки будуть стосуватись двох варіантів коливальної системи змінних параметрів.

Рівняння (2) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0)=-a_0<0\,; \qquad \dot{x}(0)=U_0\,, \qquad (3)$$

де a_0 - амплітудне відхилення системи вліво (проти вісі ox) від положення рівноваги; U_0 - початкова швидкість руху.

Уведенням нової змінної:

$$\xi=\lambda(в_0+\gamma t)\,; \quad \lambda=\left(\frac{c}{m\gamma^2}\right)^{1/3}, \qquad (4)$$

рівнянню (2) надаємо форму:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}+\xi x=0\,.$$

Воно має загальний розв'язок [13]:

$$x(t)=c_1Ai(-\xi)+c_2Bi(-\xi)\,. \qquad (5)$$

Тут $Ai(-\xi)$, $Bi(-\xi)$ - функції Ейрі; c_1, c_2 - довільні сталі. Швидкість руху системи, згідно з (4), (5), становить:

$$\dot{x}(t)=\lambda\gamma\left[c_1Ai'(-\xi)+c_2Bi'(-\xi)\right], \qquad (6)$$

де штрихом позначено похідні функції Ейрі за їх аргументами.

Підставивши вирази (5) і (6) в (3), одержуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} &c_1Ai(-\xi_0)+c_2Bi(-\xi_0)=-a_0\\ &c_1Ai'(-\xi_0)+c_2Bi'(-\xi_0)=\frac{-U_0}{\lambda\gamma}, \end{aligned} \qquad (7)$$

в якій $\xi_0=\gamma в_0$.

Розв'язавши систему (7), з урахуван-ням того, що [13]

$$Ai(-\xi_0)Bi'(-\xi_0)=-Ai'(-\xi_0)Bi(-\xi_0)=\frac{1}{\pi};$$

знаходимо сталі c_1 і c_2, подальша підстановка яких в (5)і (6) дає:

$$\begin{aligned} x(t)=&-\pi a_0\left[Bi'(-\xi_0)Ai(-\xi)-\right.\\ &\left.-Ai'(-\xi_0)Bi(-\xi)\right]-\\ &-\frac{\pi U_0}{\lambda\gamma}\left[Ai(-\xi_0)Bi(-\xi)-Bi(-\xi_0)Ai(-\xi)\right]; \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)=&\pi a_0\lambda\gamma\left[Bi'(-\xi_0)Ai'(-\xi)-\right.\\ &\left.-Ai'(-\xi_0)Bi'(-\xi)\right]+\\ &+\pi U_0\left[Ai(-\xi_0)Bi'(-\xi)-\right.\\ &\left.-Bi(-\xi_0)Ai'(-\xi)\right]; \end{aligned} \qquad (9)$$

Обчислюючи значення функцій Ейрі та їх похідних на комп'ютері, можна за формулами (8) і (9) побудувати графіки (осцилограми) коливань. Застосування при цьому відомих таблиць функцій Ейрі [13] проблематичне, бо в технічних розрахунках елементів машин аргументи цих функцій можуть перевершувати ті значення, для яких складено таблиці. Тому доцільно перейти до асимптотичних наближень спеціальних функцій при великих значеннях аргументу.

З цією метою виразимо функції Ейрі через їх модулі і фази по формулах [13]:

$$\begin{aligned} &Ai(-\xi)=M(\xi)\cos(Q(\xi));\\ &Bi(-\xi)=M(\xi)\sin(Q(\xi));\\ &Ai'(-\xi)=N(\xi)\cos(\Phi(\xi));\\ &Bi'(-\xi)=N(\xi)\sin(\Phi(\xi)). \end{aligned} \qquad (10)$$

Тоді розв'язки (8) і (9) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned} x(t)=&-\pi a_0M(\xi)N(\xi_0)\sin\left[\Phi(\xi_0)-Q(\xi)\right]-\\ &-\frac{\pi u_0}{\lambda\gamma}M(\xi_0)M(\xi)\sin\left[Q(\xi)-Q(\xi_0)\right];\\ \dot{x}(t)=&\pi a_0\lambda\gamma N(\xi_0)N(\xi)\sin\left[\Phi(\xi_0)-\Phi(\xi)\right]+\\ &+\pi u_0M(\xi_0)N(\xi)\sin\left[\Phi(\xi)-Q(\xi_0)\right]. \end{aligned} \qquad (11)$$

Для проведення обчислень далі зручно використати асимптотичні формули:

$$M(z)=\left\{\frac{1}{\pi\sqrt{z}}\left[1-\frac{5}{32z^3}+\frac{10395}{18432}\frac{1}{z^6}+0\left(\frac{1}{z^9}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$N(z)=\left\{\frac{\sqrt{z}}{\pi}\left[1+\frac{7}{32z^3}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{135135}{202752}\frac{1}{z^6}+0\left(\frac{1}{z^9}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$Q(z)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}z^{3/2}+\frac{5}{48z^{3/2}}+0\left(\frac{1}{z^{9/2}}\right);$$

$$\Phi(z)=\frac{3\pi}{4}-\frac{2}{3}z^{3/2}-\frac{7}{48z^{3/2}}+0\left(\frac{1}{z^{9/2}}\right). \quad (12)$$

Формули (10), (12) забезпечують високу точність обчислень функції Ейрі та їх похідних при $z \ge 5$. В цьому переконують результати,записані в табл.1.

Таблиця 1

Значення функцій Ейрі та їх похідних

$Ai(-5)$	$Bi(-5)$	$Ai'(-5)$	$Bi'(-5)$
$\frac{0{,}35077}{0{,}35076}$	$\frac{-0{,}13834}{-0{,}13837}$	$\frac{0{,}32725}{0{,}32719}$	$\frac{0{,}77839}{0{,}77841}$

Значення в чисельниках обчислені по асимптотичних формулах (10), (12), причому $M(5)=0{,}37706$; $N(5)=0{,}84438$;; $Q(5)=-6{,}65885$; $\Phi(5)=-5{,}11037$.

В знаменник записано значення, запозичені з таблиці 10. 11 в [13]. Підкреслимо, що для більших значень аргументів точність формул (12) стає ще більш високою. Тому для обчислень $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ можна користуватись виразами (10), (11) і (12). Розрахунок суттєво спрощується, якщо обмежитись обчисленням тільки амплітуд і тривалостей напівциклів. Проведемо таке спрощення при $u_0=0$. Позначимо через $\xi=\xi_*$ корінь рівняння:

$$\Phi(\xi_0)-Q(\xi_*)=-\frac{\pi}{2}. \quad (13)$$

Тоді, згідно з (11), амплітудне відхилення системи вправо на першому розмасі a_1 становитиме:

$$a_1=\pi a_0 M(\xi_*)N(\xi_0).$$

Для обчислення відношення амплітуд q_1 на першому розмасі одержуємо компактну формулу:

$$q_1=\frac{a_1}{a_0}=\frac{M(\xi_*)}{M(\xi_0)}. \quad (14)$$

Щоб знайти ξ_* підставимо в (13) асимптотичні вирази $\Phi(\xi_0)$ і $Q(\xi_*)$ з (12). Це приводить до квадратного рівняння:

$$y^2-Ay+\frac{5}{32}=0,$$

в якому $y=\xi_*^{3/2}$,

$$A=\xi_0^{3/2}+\frac{7}{32\xi_0^{3/2}}+\frac{3\pi}{2}\sin gn(\gamma).$$

Тоді:

$$\xi_*=\left(\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{5}{32}}\right)^{2/3}. \quad (15)$$

Для обчислення q_1, це значення ξ_* слід підставити в (12), а потім знайдене $M(\xi_*)$ - в (14).

Підкреслимо, що (15) має високу точність лише при $\xi_0 \ge 5$.

Розрахунок тривалості t_1 першого напівциклу зводиться до використання формули:

$$t_1=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\xi_*}{\lambda}-в_0\right).$$

Щоб знайти параметри коливань другого напівциклу q_2 і t_2 треба обчислити $в_1=в_0+\gamma t_1$. Потім в записаних вище формулах слід замінити $в_0$ на $в_1$, ξ_0 на ξ_* і повторити розрахунок.

Аналогічним чином можна послідовно знайти параметри й інших напівциклів.

Далі розглянемо інший спосіб розрахунку, не зв'язаний з розв'язанням рівнянь руху і асимптотиками спеціальних функцій. Його уже використовували в дослідженнях коливань систем змінної маси в роботах [14], [15], [16]. У відповідності з методом енергетичного балансу на першому розмасі коливань маємо рівність:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_1}}(в_0+\gamma t)\cdot x_1\dot{x}_1dt+\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_2}}(в_0^*+\gamma t)\cdot x_2\dot{x}_2dt=0, \quad (16)$$

де $в_0^*=в_0+\frac{\pi\gamma}{2\omega_1}$; ω_1, ω_2 - додатні сталі величини.

Для наближеного обчислення інтегралів в (16), позначимо, як і раніше, амплітудні відхилення осцилятора на першому напівциклі через a_0 і a_1 і використаємо апроксимації:

$$x_1 = -a_0 \cos(\omega_1 t);\ \dot{x}_1 = a_0 \omega_1 \sin(\omega_1 t);$$
$$x_2 = a_1 \sin(\omega_2 t);$$
$$\dot{x}_2 = a_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t). \qquad (17)$$

В положенні рівноваги $x = 0$ повинна виконуватись умова неперервності швидкості руху:

$$a_0 \omega_1 = a_1 \omega_2 \ \text{ або } \ \frac{a_1}{a_0} = q_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (18)$$

Обчислення інтегралів в (16), з урахуванням (17), дає:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_1}} (в_0 + \gamma t) \cdot x_1 \dot{x}_1 dt = -\frac{a_0^2}{2}\left(в_0 + \frac{\pi\gamma}{4\omega_1}\right);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_2}} \left(в_0^* + \gamma t\right) \cdot x_1 \dot{x}_1 dt = \frac{a_1^2}{2}\left(в_0^* + \frac{\pi\gamma}{4\omega_2}\right),$$

що зводить (16) до алгебраїчного рівняння:

$$a_1^2\left(в_0^* + \frac{\pi\gamma}{4\omega_2}\right) = a_0^2\left(в_0 + \frac{\pi\gamma}{4\omega_1}\right).$$

Виразивши в ньому невідому ω_2 через ω_1 за допомогою (18), одержуємо кубічне рівняння відносно q_1:

$$q_1^3 + \alpha q_1^2 + \beta = 0. \qquad (19)$$

Тут

$$\alpha = \frac{4\omega_1}{\pi\gamma}\left(в_0 + \frac{\pi\gamma}{2\omega_1}\right);$$

$$\beta = -\frac{4\omega_1}{\pi\gamma}\left(в_0 + \frac{\pi\gamma}{4\omega_1}\right).$$

Сталу ω_1 обчислюємо по формулі:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}\left(в_0 + \frac{\pi\gamma}{4}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{в_0 c}}\right)} \qquad (20)$$

Возв'язавши (19), одержуємо:

$$q_1 = \frac{\alpha}{3}\left\{2\cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arccos\left(1 + \frac{27\beta}{2\alpha^3}\right)\right] - 1\right\},$$

при $\gamma > 0$ і

$$q_1 = \frac{|\varsigma + \alpha|}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4\varsigma}{|\varsigma + \alpha|}} + 1\right),$$

$$\varsigma = \frac{|\alpha|}{3}\left\{2\cos\left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27\beta}{2|\alpha|^3} - 1\right)\right] + 1\right\},$$

при $\gamma < 0$.

Тривалість першого напівциклу подаємо сумою:

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2\omega_1}(1 + q_1).$$

Щоб знайти параметри другого напівциклу q_2 і t_2 треба перед обчисленням у формулах (19), (20) замінити $в_0$ на $в_1 = в_0 + \gamma t_1$ і провести повторний розрахунок. Для обчислення параметрів третього напівциклу слід замінити $в_1$ на $в_2 = в_1 + \gamma t_2$. Так послідовно можна знайти параметри й інших розмахів.

Аналіз результатів розрахунків. Числові результати одержано при $m = 4\,кг$; $c = 900\,Н/м$; $в_0 = 1$ і різних γ.

В табл. 2 записано значення q_k і t_k, до яких приводять асимптотичні формули (чисельники) і метод енергетичного балансу (знаменники), при $\gamma = \pm 0{,}25\,c^{-1}$. Спостерігається гарна узгодженість результатів, одержаних двома способами. Характерно, що значення q_k і t_k залежать від номера напівциклу k, що властиво нестаціонарним коливанням. При зменшенні маси $(\gamma > 0)\, q_k < 1$, тобто відбувається затухання коливань і скорочення тривалостей напівциклів, а при збільшенні маси $(\gamma < 0)\, q_k > 1$, тобто мають місце розгойдування коливань і збільшення тривалостей напівциклів. До таких закономірностей вільних коливань систем змінної маси, при відсутності реактивної сили, раніше прийшли автори робіт [1], [8], [9], [10], використовуючи асимптотичний метод Боголюбова-Митропольського.

Таблиця 2

Обчислені двома способами значення q_k і t_k.

k	$\gamma = 0{,}25\,c^{-1}$		$\gamma = -0{,}25\,c^{-1}$	
	q_k	t_k, c	q_k	t_k, c
1	$\frac{0{,}9875}{0{,}9875}$	$\frac{0{,}2068}{0{,}2068}$	$\frac{1{,}0137}{1{,}0136}$	$\frac{0{,}2122}{0{,}2123}$
2	$\frac{0{,}9884}{0{,}9884}$	$\frac{0{,}2019}{0{,}2018}$	$\frac{1{,}0150}{1{,}0150}$	$\frac{0{,}2184}{0{,}2184}$
3	$\frac{0{,}9891}{0{,}9891}$	$\frac{0{,}1973}{0{,}1973}$	$\frac{1{,}0164}{1{,}0164}$	$\frac{0{,}2253}{0{,}2253}$
4	$\frac{0{,}9898}{0{,}9898}$	$\frac{0{,}1932}{0{,}1932}$	$\frac{1{,}0182}{1{,}0182}$	$\frac{0{,}2331}{0{,}2332}$
5	$\frac{0{,}9904}{0{,}9904}$	$\frac{0{,}1894}{0{,}1893}$	$\frac{1{,}0205}{1{,}0205}$	$\frac{0{,}2422}{0{,}2422}$
6	$\frac{0{,}9909}{0{,}9909}$	$\frac{0{,}1859}{0{,}1858}$	$\frac{1{,}0233}{1{,}0233}$	$\frac{0{,}2529}{0{,}2529}$
7	$\frac{0{,}9914}{0{,}9914}$	$\frac{0{,}1826}{0{,}1825}$	$\frac{1{,}0271}{1{,}0271}$	$\frac{0{,}2658}{0{,}2658}$
8	$\frac{0{,}9918}{0{,}9918}$	$\frac{0{,}1795}{0{,}1795}$	$\frac{1{,}0324}{1{,}0324}$	$\frac{0{,}2818}{0{,}2818}$
9	$\frac{0{,}9922}{0{,}9922}$	$\frac{0{,}1766}{0{,}1766}$	$\frac{1{,}0402}{1{,}0402}$	$\frac{0{,}3026}{0{,}3025}$
10	$\frac{0{,}9925}{0{,}9925}$	$\frac{0{,}1740}{0{,}1739}$	$\frac{1{,}0531}{1{,}0531}$	$\frac{0{,}3313}{0{,}3311}$

В табл. 3 записано значення q_1 і t_1, одержані двома способами при $m = 4\,кг$; $c = 900\,Н/м$; $в_0 = 1$ і різних γ.

Таблиця 3

Значення q_1 і t_1 при різних γ.

γ, c^{-1}	асимптотичні формули		метод енергетичного балансу	
	q_1	t_1, c	q_1	t_1, c
0,1	0,9949	0,2084	0,9949	0,2084
0,3	0,9851	0,2063	0,9851	0,2063
0,6	0,9716	0,2035	0,9717	0,2033
0,9	0,9594	0,2009	0,9595	0,2005
-0,1	1,0053	0,2105	1,0060	0,2106
-0,3	1,0166	0,2128	1,0167	0,2129
-0,6	1,0353	0,2166	1,0354	0,2166
-0,9	1,0567	0,2208	1,0566	0,2206

Тут теж маємо гарну узгодженість результатів обчислень двома методами, що дає підставу до використання методу енергетичного балансу в дослідженнях коливань систем замінної маси.

Висновки. Задача про вільні коливання осцилятора з гіперболічною зміною маси, при відсутності реактивної сили, має аналітичний розв'язок в функціях Ейрі. Цей розв'язок можна використовувати і для розрахунку коливань осцилятора сталої маси, але лінійно-змінної жорсткості. В практичних розрахунках, при великих значеннях аргументів, функції Ейрі зручно обчислювати за формулою їх асимптотичних наближень, а при малих і середніх значеннях треба використовувати відомі таблиці цих функцій, або комп'ютер з відповідними програмами. З досить високою точністю обчислення амплітуд коливань і тривалостей напівциклів можна здійснювати також модифікованим тут методом енергетичного балансу, без використання спеціальних функцій.

Список використаних джерел

1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев/ А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с.
2. Cvetikanin L. Dynamics of Machines with variable mass/ L. Cvetikanin. – Taylor 8, Francis Ltd, 1998. – 300 p.
3. Cvetikanin L. A review on dynamics of mass variable system/ L. Cvetikanin// Journal of the Serbial Sosiety for computational mechanics. – 2012. – Vol 6, № 1/ - P. 56-74.
4. Ольшанский В.П. Свободные вертикальные колебания осциллятора линейно-переменной массы/ В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский//Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. Вип. 1 (69). – 2013. – С. 37-41.
5. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси/ В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський//Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. Вип. 2 (70). – 2013. – С. 57-59.
6. Ольшанский В.П. Нестационарные колебания осцелятора при экспоненциальном изменении его массы/ В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський// Динамические системы, 2013. Т. 3 (31),№ 3-4, С. 321-326.
7. Ольшанський В.П. Нестационарные колебания осциллятора переменной массы с учетом вязкого трения/ В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський//Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. Вип. 3 (75). – 2014. – С. 18-27.
8. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах/ Ю.А. Митропольский. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 283 с.
9. Митропольский Ю.А. Избранные труды в двух томах/ Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.
10. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем/ Е.Г. Голоскоков, А.П. Филлипов. – К.: Наукова думка, 1977. – 339 с.
11. Ольшанський В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осциляторов/ В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський. – Х.: «Міськдрук», 2014. – 264 с.
12. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы/ И.В. Мещерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с.
13. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
14. Ольшанський В.П. Нестационарные колебания механической системы линейно-переменной массы с комбинированным трением/ В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський//Вісник ХНТУСГ: Проблеми надійності машин та засобів механізації сільськогосподарського виробництва. – Х.: ХНТУСГ, 2014. Вип 151. – С. 324-333.
15. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси з сухим тертям/ В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський//Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. Вип. 1 (73). – 2014. – С. 33-39.
16. Ольшанський В.П. Коливання дисипативних осциляторів/ В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, Л.М. Тіщенко та ін. – Х.: «Міськдрук», 2015. – 116 с.

Список джерел в транслітерації

1. Bessonov A.P. Osnovyi dinamiki mehanizmov s peremennoy massoy zvenev/ A.P. Bessonov. – M.: Nauka, 1967. – 267 s.
2. Cvetikanin L. Dynamics of Machines with variable mass/ L. Cvetikanin. – Taylor 8, Francis Ltd, 1998. – 300 p.
3. Cvetikanin L. A review on dynamics of mass variable system/ L. Cvetikanin// Journal of the Serbial Sosiety for computational mechanics. – 2012. – Vol 6, № 1/ - P. 56-74.
4. Olshanskiy V.P. Svobodnyie vertikalnyie kolebaniya ostsillyatora lineyno-peremennoy massyi/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy// Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh:

Vseukr. nauk.-tekhn. zhurnal. – Vinnytsia. Vyp. 1 (69). – 2013. – S. 37-41.
5. Olshanskiy V.P. Vilni kolyvannia ostsyliatora zminnoi masy/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy//Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh: Vseukr. nauk.-tekhn. zhurnal. – Vinnytsia. Vyp. 2 (70). – 2013. – S. 57-59.
6. Olshanskiy V.P. Nestatsionarnyie kolebaniya ostselyatora pri eksponentsialnom izmenenii ego massyi/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy// Dinamicheskie sistemyi, 2013. T. 3 (31),№ 3-4, S. 321-326.
7. Olshanskiy V.P. Nestatsionarnyie kolebaniya ostsillyatora peremennoy massyi s uchetom vyazkogo treniya/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy//Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh: Vseukr. nauk.-tekhn. zhurnal. – Vinnytsia. Vyp. 3 (75). – 2014. – S. 18-27.
8. Mitropolskiy Yu.A. Nestatsionarnyie protsessyi v nelineynyih kolebatelnyih sistemah/ Yu.A. Mitropolskiy. – K.: Izd-vo AN USSR, 1955. – 283 s.
9. Mitropolskiy Yu.A. Izbrannyie trudyi v dvuh tomah/ Yu.A. Mitropolskiy. – K.: Naukova dumka, 2012. – 504 s.
10. Goloskokov E.G. Nestatsionarnyie kolebaniya deformiruemyih sistem/ E.G. Goloskokov, A.P. Fillipov. – K.: Naukova dumka, 1977. – 339 s.
11. Olshanskiy V.P. Metod VBK v raschetah nestatsionarnyih kolebaniy ostsilyatorov/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy. – Kh.: MIskdruk, 2014. – 264 s.
12. Mescherskiy I.V. Rabotyi po mehanike tel peremennoy massyi/ I.V. Mescherskiy. – M.: GITTL, 1952. – 276 s.
13. Abramovits A. Spravochnik po spetsialnyim funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) / A. Abramovits, I. Stigan. – M.: Nauka, 1979. – 832 s.
14. Olshanskiy V.P. Nestatsionarnyie kolebaniya mehanicheskoy sistemyi lineyno-peremennoy massyi s kombinirovannyim treniem/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy//Visnyk KhNTUSH: Problemy nadiinosti mashyn ta zasobiv mekhanizatsii silskohospodarskoho vyrobnytstva. – Kh.: KhNTUSH, 2014. Vyp 151. – S. 324-333.
15. Olshanskiy V.P. Vilni kolyvannia ostsyliatora zminnoi masy z sukhym tertiam/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy//Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh: Vseukr. nauk.-tekhn. zhurnal. – Vinnytsia. Vyp. 1 (73). – 2014. – S. 33-39.
16. Olshanskiy V.P. Kolyvannia dysypatyvnykh ostsyliatoriv/ V.P. Olshanskiy, S.V. Olshanskiy, L.M. Tishchenko ta in. – Kh.: MIskdruk, 2015. – 116 s.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Аннотация. *В функциях Эйри, без учета действия реактивной силы, построено аналитическое решение задачи о свободных нестационарных колебаниях осцилятора, изменение массы которого является дробно-линейной функцией времени. Показано, что в математическом аспекте, к этой задаче приводит также моделирование движения системы постоянной массы, но линейно-переменной жесткости. Получены компактные асимптотические формулы для вычисления амплитуд и длительности полуциклов. Установлена возможность расчета свободных нестационарных колебаний осцилятора модифицированным методом энергетического баланса, без применения специальных функций.*

Ключевые слова: *колебания, уравнения движения, переменная масса, функции Эйри, асимптотические приближения, метод энергетического баланса.*

FREE VIBRATIONS OF OSCILATOR HYPERBOLIC VARIABLE MASS

Annotation. *In Airy function, without the action of reactive force, analytic solution of the problem of unsteady free oscillations of the oscillator were built, change in the mass are fractional-linear function of time. It is shown that in the mathematical aspect to this problem also results in modeling the motion of a permanent weight but linearly variable stiffness. A compact asymptotic formula for the calculation of the amplitude and duration of half cycles were got. The possibility of calculating the time-dependent fluctuations of the free oscillator modified method-cal energy balance without the use of special functions were got.*

Key words: *vibrations, equations of motion, variable weight, the Airy function, asymptotic approximation method of energy balance.*