

Ольшанський В. П.

Ольшанський С. В.

*Харківський
національний технічний
університет сільського
господарства
ім. П.Василенка*

Любін М. В.

*Вінницький
національний аграрний
університет*

Olshansky V. P.

Olshansky S. V.

*Kharkiv Petro Vasylenko
National Technical
University of Agriculture*

Lyubin M. V.

*Vinnitsia National
Agrarian University*

УДК 631.362:532

АПРОКСИМАЦІЇ РОЗПОДІЛУ ПОРИСТОСТІ В ШАРІ ЗЕРНОСУМІШІ НА ПЛОСКОМУ ВІБРОРЕШЕТІ

Метою роботи є виведення нових наближених формул для розрахунку розподілу пористості по товщині рухомого шару зерноsumіші при сепаруванні її плоским віброрешетом. Для досягнення поставленої мети побудовано аналітичний розв'язок відповідного нелінійного диференціального рівняння другого порядку, яке раніше інтегрували числовими методами на комп'ютері. Одержаний аналітичний розв'язок представлено невласним інтегралом другого роду, який не виражається через відомі функції. Тому на комп'ютері затабульовано цей невласний інтеграл. Далі запропоновано дві формули наближеного аналітичного обчислення інтеграла і проілюстровано їх використання для розрахунку розподілу концентрації зерен по товщині рухомого шару зерноsumіші. Порівняння з надрукованими раніше результатами числового інтегрування нелінійного диференціального рівняння підтвердило прийнятність розроблених аналітичних способів наближеного розрахунку пористості. Додатково також показана можливість використання для опису розподілу більш простих апроксимацій, а саме: степеневі апроксимації Ейткена та наближення квадратним трьохчленом.

Ключові слова: концентрація зернових частинок, пористість шару зерноsumіші, нелінійне диференціальне рівняння, невласний інтеграл, апроксимація.

Постановка проблеми. При великих завантаженнях віброрешета інтенсивність процесу сегрегації зерноsumіші, а в підсумку продуктивність решета і якість сепарування, залежать від пористості рухомого шару, бо сегрегація відбувається внаслідок проникання зерен проходової фракції через пори між зернами сходової фракції. Тому дослідження пористості сепарованої зерноsumіші та її збільшення відповідними технічними засобами відносяться до актуальних науково-прикладних задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [1-3] при розрахунку пористості шару зерноsumіші, що рухається по поверхні плоского віброрешета, числовими методами на комп'ютері інтегрували складене нелінійне диференціальне рівняння другого порядку з відповідними початковими умовами. Коефіцієнти цього рівняння залежали від параметрів коливальних решета, наявності на його поверхні ребер або спеціальних рифлів, а також від фізико-механічних характеристик зерноsumіші. Одержаний числовий розподіл

пористості потім застосовували у розрахунках швидкості зернопотоку. Але виявляється, що згадане нелінійне диференціальне рівняння має і аналітичний розв'язок у вигляді невласного інтеграла другого роду, що не виражається через відомі функції. Тому в даній роботі складена таблиця невласного інтеграла для різних значень верхньої межі інтегрування і показано, що введенням деяких апроксимацій можна також проводити наближений аналітичний розрахунок пористості.

Метою роботи є виведення та апробація нових наближених формул для розрахунку розподілу пористості по товщині шару зерноsumіші, сепарованої плоским віброрешетом.

Викладення основного матеріалу. Згідно з роботами [2, 3] та розрахунковою схемою на рис. 1, зміна концентрації зерновок ν по координаті y описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{d}{dy} \cdot \left(\alpha \cdot \psi \left(\frac{d\nu}{dy} \right) \right) - \gamma g \cos \theta \nu = 0. \quad (1)$$

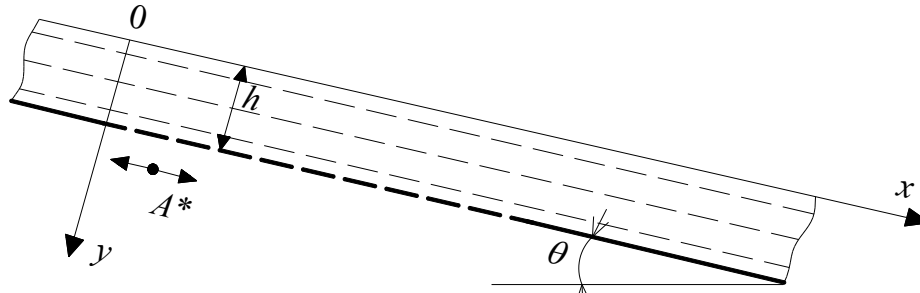
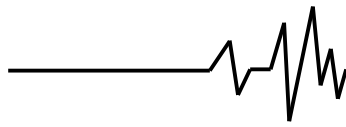


Рис. 1. Розрахункова схема руху шару зернової суміші на плоскому віброрешеті

У ньому: α – феноменологічний коефіцієнт; ψ – множник, який залежить від параметрів коливальних решета, наявності на поверхні решета ребер, рифлів та ін., а також від коефіцієнта внутрішнього сухого тертя в суміші; γ – питома маса матеріалу зернини; g – прискорення вільного падіння; θ – кут нахилу решета до горизонту.

Дотримуючись [2, 3], початковими умовами до (1) приймаємо:

$$v(0) = v_0; \quad \left. \frac{dv}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Щоб одержати аналітичний розв'язок цієї задачі Коші, запишемо рівняння (1) у вигляді:

$$\frac{d^2v}{dy^2} \cdot \frac{dv}{dy} = \beta v, \quad (3)$$

де $\beta = \frac{\gamma g \cos \theta}{2\alpha\psi}$.

Уведенням позначення $\xi = \frac{dv}{dy}$,

рівнянню (3) надаємо форму:

$$\xi^2 \cdot \frac{d\xi}{dv} = \beta v. \quad (4)$$

Проінтегрувавши (4), з урахуванням умов (2), одержуємо:

$$\xi = \frac{dv}{dy} = \left[\frac{3}{2} \beta (v^2 - v_0^2) \right]^{1/3}.$$

Подальше інтегрування цього виразу дає:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt[3]{v^2 - v_0^2}} = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{2}} y$$

або:

$$I(\zeta) = \int_1^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{3\beta}{2v_0}} y. \quad (5)$$

Тут $\zeta = \frac{v}{v_0}$.

Невласний інтеграл в (5) не виражається через відомі функції. Тому доцільно затабулювати його, враховуючи невеликий інтервал зміни ζ в практиці сепарування.

Результати комп'ютерних обчислень $I(\zeta)$ для $\zeta \in [1; 2,05]$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Точні та наближені значення інтеграла в (5)

ζ	$I(\zeta)$	$\tilde{I}(\zeta)$	ζ	$I(\zeta)$	$\tilde{I}(\zeta)$
1,00	0,000	0,000	1,55	0,773	0,771
1,05	0,161	0,162	1,60	0,817	0,814
1,10	0,255	0,257	1,65	0,859	0,856
1,15	0,333	0,335	1,70	0,900	0,896
1,20	0,402	0,404	1,75	0,940	0,935
1,25	0,465	0,467	1,80	0,979	0,972
1,30	0,524	0,525	1,85	1,017	1,009
1,35	0,578	0,579	1,90	1,053	1,044
1,40	0,630	0,631	1,95	1,089	1,079
1,45	0,680	0,680	2,00	1,124	1,113
1,50	0,727	0,727	2,05	1,159	1,146



Використовуючи табл. 1, методом інтерполяції можна обчислювати ζ при відомих β і ν_0 , тобто знаходити $\nu = \zeta \nu_0$ для різних y .

Але для інженерних розрахунків пористості бажано мати просту аналітичну залежність $I(\zeta)$, що допускає інверсію, тобто

обчислення ζ при відомому $I(\zeta)$. Далі одержимо дві наближені такі залежності.

1. Врахуємо, що при малих товщинах шару зерноsumіші значення $\zeta - 1$ менші одиниці. Тому невласний інтеграл в (5) можна розкласти в степеневий ряд. Для цього введемо змінну $t = 1 + \xi$. Тоді:

$$I(\zeta) = \int_0^{\zeta-1} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{\xi(2+\xi)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^{\zeta-1} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{\xi} \sqrt[3]{1+\xi/2}}. \quad (6)$$

Оскільки:

$$\left(1 + \frac{\xi}{2}\right)^{-1/3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3} - j\right) \frac{\xi^n}{2^n n!}, \quad (7)$$

після підстановки (7) в (6), отримуємо:

$$I(\zeta) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[\frac{3}{2} (\zeta-1)^{2/3} + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{3} - j\right) \frac{(\zeta-1)^{n+2/3}}{2^n n! (n+2/3)} \right]. \quad (8)$$

При $\zeta < 1,6$, з невеликою похибкою, в розрахунках можна обмежитись утриманням лише одного члена ряду в (8). Тоді:

$$I(\zeta) \approx \frac{(\zeta-1)^{2/3}}{2\sqrt[3]{2}} \left(3 - \frac{\zeta-1}{5}\right). \quad (9)$$

Результати обчислень $I(\zeta)$ по формулі (9) записано в табл. 2.

Таблиця 2

Наближені значення $I(\zeta)$

ζ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$I(\zeta)$	0,255	0,402	0,523	0,629	0,725	0,813

Наближені $I(\zeta)$ в табл. 2 мало відрізняються від точних значень $I(\zeta)$ в табл. 1.

Із (9) витікає, що:

$$\zeta - 1 = \left[\frac{2\sqrt[3]{2} I(\zeta)}{3 - 0,2(\zeta - 1)} \right]^{3/2}. \quad (10)$$

Ця формула дає можливість методом ітерації знаходити $\zeta - 1$, коли відомо $I(\zeta)$. Наприклад, нехай $I(\zeta) = 0,725$. Для нього, поклавши $\zeta - 1 = 0$, одержуємо наступні значення ітерацій: 0,475; 0,499; 0,500, що узгоджується з результатами в табл. 2.

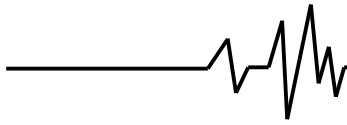
Збіжність процесу ітерацій досить швидка, що не ускладнює розрахунок.

Таким чином, знаючи β і ν_0 , для любого $y \in [0; h]$, по формулі (5) можна обчислити $I(\zeta)$, а потім по формулі (10) знайти відповідне ζ і значення пористості:

$$\varepsilon = 1 - \nu = 1 - \zeta \cdot \nu_0. \quad (11)$$

Як приклад, обчислимо значення ε для різних y , коли: $\nu_0 = 0,325$; $h = 0,006$ м;

$\sqrt[3]{\frac{3\beta h^3}{2\nu_0}} = 0,532$. Результати розрахунків заносимо в табл. 3.



Таблиця 3

Значення пористості, обчислені по формулах (5), (10), (11)

$y^* = y/h$	$I(\zeta)$	ζ	ν	ε
0,00	0,000	1,000	0,325	0,675
0,25	0,133	1,037	0,337	0,663
0,50	0,266	1,107	0,360	0,640
0,75	0,399	1,198	0,389	0,611
1,00	0,532	1,308	0,425	0,575

Одержані значення ε мало відхиляються від відповідних ε на графіку 1, що на рис. 2, який запозичено з [2, гл. 2, рис. 2.6]. У дисертації графіки одержано числовим

інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері, а теоретичні результати були підтверджені експериментально в [4].

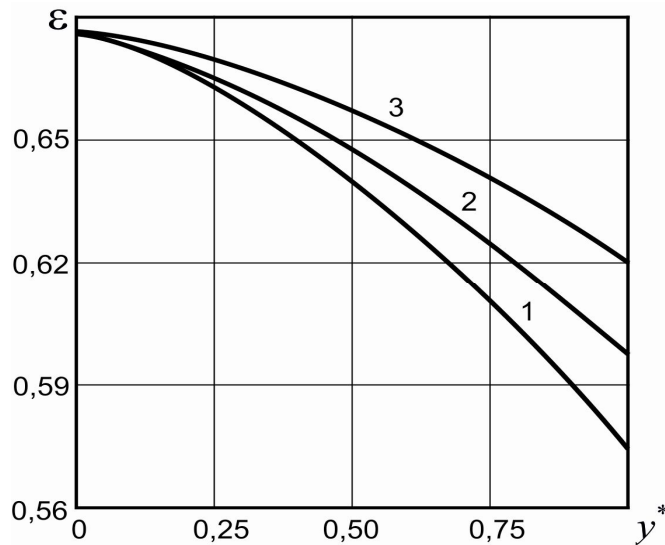


Рис. 2. Залежності ε від y , y запозичені з [2]

2. Поряд з розглянутою можливі й інші апроксимації $I(\zeta)$. В якості такої можна прийняти:

$$I(\zeta) \approx \tilde{I}(\zeta) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2}{2,9 + \zeta}} (\zeta - 1)^2. \quad (12)$$

На проміжку $\zeta \in [1; 2]$ похибка цієї апроксимації не перевершує 1 %, в чому переконує порівняння значень $I(\zeta)$ і $\tilde{I}(\zeta)$, записаних в табл. 1.

Із (12) випливає, що

$$\zeta = \zeta(y) = 1 + \eta + \sqrt{\eta^2 + 7,8\eta}, \quad (13)$$

$$\text{де } \eta = \eta(y) = \frac{\beta h^3}{9\nu_0} (y^*)^3.$$

Для перевірки вірогідності формули (13)

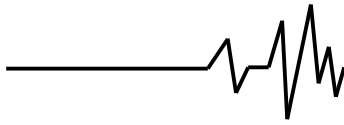
$$\text{приймаємо: } \nu_0 = 0,325; \quad \frac{\beta h^3}{9\nu_0} = 0,1115.$$

Результати розрахунків заносимо в табл. 4.

Таблиця 4

Значення пористості, обчислені по формулах (11), (13)

y^*	ζ	ν	ε	$\tilde{\varepsilon}$
0,00	1,000	0,325	0,675	0,675
0,25	1,037	0,337	0,663	0,663
0,50	1,106	0,359	0,641	0,641
0,75	1,196	0,389	0,611	0,611
1,00	1,307	0,425	0,575	0,576



Значення ε в табл. 4 майже не відрізняються від тих, що в табл. 3. Але другий варіант апроксимації має переваги над першим. У другому випадку не треба проводити ітерацій і формула (13) має чинність на більшому проміжку значень $I(\zeta)$, ніж формула (10).

Оскільки при розрахунках швидкості зернопотоку, залежність $v(y)$ треба підставляти в рівняння руху [2, 3], то бажано спростити одержані вище результати. Це нескладно зробити, якщо врахувати, що в практиці сепарування змінна $\eta(y) \gg 1$. Тому (13) можна замінити більш простим виразом:

$$\zeta(y) \approx \tilde{\zeta}(y) = 1 + \eta + \sqrt{7,8} \eta^{1/2}. \quad (14)$$

Обчислені після такої заміни $\tilde{\varepsilon} = 1 - v_0 \cdot \tilde{\zeta}(y)$ фактично співпадають з відповідними ε в табл. 4.

Окрім (14), при розрахунках швидкості зернопотоку, можна використовувати й інші варіанти апроксимації $v(y)$. До таких відноситься степенева апроксимація Ейткена [5]:

$$v(y) \approx v_e(y) = v_0 + (v_2 - v_0) \cdot \left(\frac{y}{h}\right)^\lambda, \quad (15)$$

$$\text{де } \lambda = \frac{\ln \frac{v_1 - v_0}{v_2 - v_0}}{\ln 0,5}; \quad v_0 = v(0); \quad v_1 = v\left(\frac{h}{2}\right); \quad v_2 = v(h).$$

Отже, для використання (15) потрібно знати v_0, v_1 і v_2 , які можна обчислити викладеним вище способом.

Зручною може бути і апроксимація квадратним трьохчленом:

$$v(y) \approx v_T(y) = v_0 + (4v_1 - v_2 - 3v_0) \frac{y}{h} + 2 \cdot (v_2 + v_0 - 2v_1) \cdot \frac{y^2}{h^2}, \quad (16)$$

в якій теж задіяні v_0, v_1, v_2 .

Якщо взяти ці значення v із табл. 4, то одержимо v_e і v_T , що записані в табл. 5.

Таблиця 5

Апроксимовані значення $v(y)$

y^*	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
$v_e(y)$	0,325	0,337	0,359	0,389	0,425
$v_T(y)$	0,325	0,338	0,359	0,388	0,425

Розрахунки підтверджують високу точність апроксимацій (15) і (16). Варто зауважити, що для прийнятих числових даних $\lambda = 1,556 > 1$. Тому вираз (15) задовольняє обом крайовим умовам в (2). Цю властивість має і апроксимація (14). Квадратний трьохчлен (16) не задовольняє другій умові в (2), але це не суттєво впливає на точність наближення.

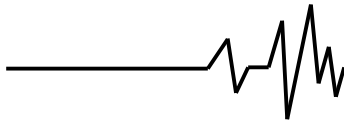
Висновки

1. Дослідження показало, що виведені наближені компактні формули цілком придатні для розрахунку розподілу пористості в шарі зерноsumіші на плоскому віброрешеті.

2. Запропоновані апроксимації розподілу концентрації зерновок по товщині шару можна використовувати у подальших аналітичних розрахунках швидкості зернопотоку та обчисленнях масової продуктивності віброрешета.

Список використаних джерел

1. Тищенко Л.Н. К исследованию движения зерновой смеси на решетке под действием вибраций / Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень // Науковий вісник НАУ. – Київ: НАУ, 2002. – Вип. 49. – С. 329–336.
2. Пивень М.В. Обоснование параметров процесса решетного сепарирования зерновых смесей: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.11 / М.В. Пивень. – Харьков: ХНТУСГ им. П. Василенко, 2006. – 260 с.
3. Тищенко Л.Н. Исследование послойного движения зерновых смесей на плоских вибрационных решетках / Л.Н. Тищенко, А.В. Миняйло, М.В. Пивень, С.А. Харченко // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – Вип. 59. Т. 1. – С. 69–76.
4. Тищенко Л.Н. Экспериментальные исследования внутрислоевых процессов в



плоскорешетных вибрационных сепараторах / Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2015. – № 4(80). – С. 206–211.

5. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Список джерел в транслітерації

1. Tischenko L.N. K issledovaniyu dvizheniya zernovoy smesi na reshete pod deystviem vibratsiy / L.N. Tischenko, M.V. Piven // Naukoviy visnik NAU. – Kyiv: NAU, 2002. – Vip. 49. – S. 329–336.

2. Piven M.V. Obosnovanie parametrov protsessa reshetnogo separirovaniya zernovyih smesey: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.05.11 / M.V. Piven. – Harkov: HNTUSG im. P. Vasilenko, 2006. – 260 s.

3. Tischenko L.N. Issledovanie posloynogo dvizheniya zernovyih smesey na ploskih vibratsionnyih reshetah / L.N. Tischenko, A.V. Minyaylo, M.V. Piven, S.A. Harchenko // Mehanizatsiya sllskogospodarskogo virobnitstva: Visnik HNGUS. – Harkiv: HNTUS, 2007. – Vip. 59. T. 1. – S. 69–76.

4. Tischenko L.N. Eksperimentalnye issledovaniya vnutrisloevyih protsessov v ploskoreshetnyih vibratsionnyih separatorah / L.N. Tischenko, M.V. Piven // Vibratsiyi v tehnltsi ta tehnologiyah. – Vinnitsya, 2015. – №4(80). – S. 206–211.

5. Kalitkin N.N. Chislennyye metody / N.N. Kalitkin. – M.: Nauka, 1978. – 512 s.

АППРОКСИМАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРИСТОСТИ В СЛОЕ ЗЕРНОСМЕСИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Аннотация. Целью работы является выведение новых приближенных формул для расчета распределения пористости по толщине движущегося слоя зерносмеси при сепарировании ее плоским виброрешетом. Для достижения поставленной цели построено аналитическое решение соответствующего нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, которое ранее интегрировали численными методами на компьютере. Полученное аналитическое решение представлено несобственным интегралом второго рода, который не выражается через известные функции. Поэтому на компьютере затабулировано этот несобственный интеграл. Далее предложено две формулы

приближенного аналитического вычисления интеграла и проиллюстрировано их применение к расчету распределения концентрации зерен по толщине движущегося слоя зерносмеси. Сравнение с опубликованными ранее результатами численного интегрирования нелинейного дифференциального уравнения подтвердило состоятельность разработанных аналитических способов приближенного расчета пористости. Дополнительно также показана возможность использования для описания распределения более простых аппроксимаций, а именно: степенной аппроксимации Эйткена и приближения квадратным трехчленом.

Ключевые слова: концентрация зерновых частичек, пористость слоя зерносмеси, нелинейное дифференциальное уравнение, несобственный интеграл, аппроксимация.

ABOUT THE APPROXIMATION OF APPORTIONMENT OF POROSITY IN LAYER OF GRAIN MIXTURE ON THE FLAT SIEVE

Annotation. The aim of the research is preparation of the new approximate formulas for calculating the distribution of porosity in the thickness of the moving layer separation grain mixture at the flat vibrating sieve. To achieve corresponding goal the analytic solution of the second-order nonlinear differential equation is constructed, which had previously integrated the numerical methods on a computer. The resulting analytical solution represented an improper integral of the second kind, which is not expressed in terms of known functions, so tabulated the improper integral on the computer. Further were suggested two formulas approximate analytical calculation of the integral and illustrates their application to the calculation of the concentration distribution of the grains in the thickness of the moving layer of grain mixture. The comparison with previously published results of the numerical integration of nonlinear differential equations confirmed the viability of the developed analytical methods for the approximate calculation of porosity. The possibility of using to describe the distribution of more simple approximations was shown, namely the power approximation Aitken and proximity square trinomials as well.

Key words: the concentration of particles of grain, grain mixture porosity layer, a non-linear differential equation, the improper integral, approximation.