

Ольшанський В. П.

Бурлака В. В.

Сліпченко М. В.

Малець О. М.

*Харківський
національний технічний
університет сільського
господарства
ім. П.Василенка*

Olshansky V. P.

Burlaka V. V.

Slipchenko M. V.

Malec O. M.

*Kharkiv Petro Vasylenko
National Technical
Univerciti of Agriculture*

УДК 532.631.362

УЗАГАЛЬНЕНА НЕЛІНІЙНА МОДЕЛЬ РУХУ ЗЕРНОСУМІШІ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ ВІБРОРЕШЕТІ

Виведено та проінтегровано нелінійне диференціальне рівняння усталеного потоку зерноsumіші в вертикальному циліндричному віброрешеті, яке обертається зі сталою кутовою швидкістю. В основу теорії покладено нелінійну трьохпараметричну степеневу залежність дотичного напруження від швидкості деформації зсуву в зерноsumіші. При цьому враховано не лише нелінійний в'язкий опір, а і наявність внутрішнього сухого тертя в рухомому сипкому матеріалі. Розв'язок рівняння руху виражено через інтеграл, який не зводиться до відомих функцій, тобто підлягає числовому інтегруванню на комп'ютері. Як альтернативу числовому методу, запропоновано наближений аналітичний спосіб обчислення інтеграла з використанням формули Сімпсона. Одержано також двобічні нерівності для оцінки величини швидкості потоку зерноsumіші. На числових прикладах показано, що похибка наближеного способу обчислень швидкості становить десять долі відсотка. Встановлено суттєву залежність розрахункової швидкості зернопотоку від усіх трьох реологічних констант.

Ключові слова: вертикальне циліндричне віброрешето, зернопотік, швидкість руху, степенева залежність, формула Сімпсона, інтеграл рівняння руху.

Аналіз досліджень і публікацій.

Останнім часом з'явилися публікації [1-4], в яких при виведенні рівняння руху вібророзрідженої зерноsumіші, як суцільного сипкого середовища, використано нелінійні залежності дотичного напруження в суміші від швидкості деформації зсуву. Раніше реологічні залежності такого типу з двома сталими приймали в розрахунках швидких гравітаційних течій сипких матеріалів по нахиленій площині [5-7]. На відміну від названих публікацій, тут розглядаємо варіант узагальненої реологічної залежності з трьома сталими. Завдяки їм, сила в'язкого опору пропорційна деякому степеню швидкості деформації зсуву, а сила залишкового сухого тертя пропорційна внутрішньому надлишковому тиску в суміші. Як окремі випадки, із розглянутої теорії витікають відомі нелінійні моделі руху.

Метою роботи є виведення узагальнених формул для обчислення швидкості усталеного вертикального руху шару вібророзрідженої зерноsumіші по поверхні циліндричного решета віброцентрифуги.

Основна частина роботи. При виведенні диференціального рівняння

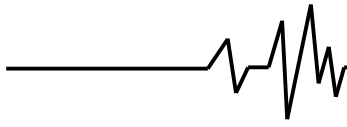
усталеного зернопотоку виходимо з розрахункової схеми, показаної на рис. 1, де розподіл дотичного напруження в суміші τ по радіальній координаті r , як і в роботах [3, 4], описується виразом:

$$\tau(r) = \frac{\rho g}{2} \left(\frac{R_0^2}{r} - r \right), \quad (1)$$

де ρ – осереднена по радіальній координаті питома маса зерноsumіші; g – прискорення вільного падіння; R_0 – радіус вільної внутрішньої поверхні рухомого циліндричного шару зерноsumіші товщиною $h = R - R_0$; R – радіус віброрешета, яке обертається навколо вертикальної вісі зі сталою кутовою швидкістю Ω .

Далі використовуємо узагальнену реологічну залежність:

$$\tau(r) = \left[\mu_* \left| \frac{du}{dr} \right|^{1/\alpha} + f \cdot p(r) \right] \cdot \text{sign} \left(\frac{du}{dr} \right), \quad (2)$$



у якій μ_* , α , f – константи, що підлягають експериментальному визначенню; $u = u(r)$ – швидкість усталеного потоку суміші в напрямі вісі OZ ; $p(r)$ – внутрішній надлишковий тиск, спричинений дією відцентрової сили.

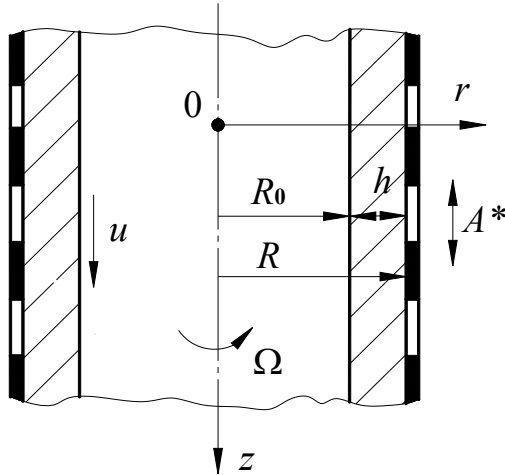


Рис. 1. Розрахункова схема вертикального циліндричного решета з сепарованою сумішшю

При $\alpha = 0,5$ – залежність (2) переходить у співвідношення типу Севіджа [7, 8]. Варіант $f = 0$ розглядали в [3]. Якщо $\alpha = 1$, $f = 0$, то маємо класичну лінійну залежність Ньютона, яку використовували в [9 - 11].

Враховуючи, що [11]:

$$p(r) = \frac{\rho \Omega^2}{2} (r^2 - R^2), \quad \frac{du}{dr} \leq 0,$$

та вирази (1), (2), одержуємо диференціальне рівняння руху:

$$\left| \frac{du}{dr} \right|^{1/\alpha} = \frac{\rho g}{2\mu_*} \left(r - \frac{R_0^2}{r} \right) - \frac{f \rho \Omega^2}{2\mu_*} (r^2 - R_0^2).$$

Елементарним перетворенням йому надаємо вигляд:

$$\frac{du}{dr} = - \left(\frac{\rho g}{2\mu_*} \right)^\alpha \left[\frac{r^2 - R_0^2}{r} \left(1 - \frac{\gamma r}{R_0} \right) \right]^\alpha, \quad (3)$$

причому $\gamma = f \Omega^2 R_0 / g < R_0 / R$.

Проінтегрувавши (3), при крайовій умові $u(R) = u_0$, отримуємо:

$$u(r) = - \left(\frac{\rho g}{2\mu_*} \right)^\alpha \int_r^R \left[\frac{y^2 - R_0^2}{y} \left(1 - \frac{\gamma y}{R_0} \right) \right]^\alpha dy + u_0. \quad (4)$$

Тут u_0 – швидкість ковзання суміші по поверхні решета.

Переходом до нової змінної інтегрування $y = R_0 (1 + x)$ виразові (4) надаємо форму:

$$u(r) = \left(\frac{\rho g R_0}{2\mu_*} \right)^\alpha R_0 \int_{x_1}^{x_2} \left[x \frac{2+x}{1+x} (1 - \gamma - \gamma x) \right]^\alpha dx + u_0, \quad (5)$$

де $x_1 = \frac{r}{R_0} - 1$; $x_2 = \frac{h}{R_0}$.

Інтеграл в (5) не виражається через відомі функції. Тому його доводиться інтегрувати числовими методами на комп'ютері.

Але для оцінки $u(r)$ можна запропонувати компактні нерівності. Приймаючи до уваги, що на проміжку $x \in [x_1, x_2]$:

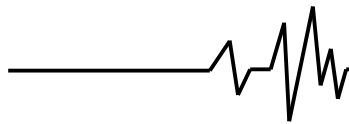
$$\frac{2+x}{1+x} (1 - \gamma - \gamma x) \leq \frac{2+x_1}{1+x_1} (1 - \gamma - \gamma x_1);$$

$$\frac{2+x}{1+x} (1 - \gamma - \gamma x) \geq \frac{2+x_2}{1+x_2} (1 - \gamma - \gamma x_2),$$

отримуємо наступну двобічну нерівність:

$$u_*(r) < u(r) < u^*(r). \quad (6)$$

У ній нижня та верхня межі подаються виразами:



$$u_*(r) = \left(\frac{\rho g R_0}{2\mu_*} \right)^\alpha R_0 \left[\frac{2+x_2}{1+x_2} (1-\gamma-\gamma x_2) \right]^\alpha \frac{x_2^{\alpha+1} - x_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} + u_0;$$

$$u^*(r) = \left(\frac{\rho g R_0}{2\mu_*} \right)^\alpha R_0 \left[\frac{2+x_1}{1+x_1} (1-\gamma-\gamma x_1) \right]^\alpha \frac{x_2^{\alpha+1} - x_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} + u_0;$$

Окрім комп'ютерного інтегрування, інтеграл (5) можна також обчислити наближеними методами, завдяки малій товщині рухомого шару суміші по відношенню до радіуса решета. Тоді, виділивши аналітичну

частину $u_h(r)$, по формулі Сімпсона, одержуємо:

$$\tilde{u}(r) \approx u_h(r) + \Delta(r) + u_0. \quad (7)$$

Тут

$$\tilde{u}_h(r) = \left(\frac{\rho g R_0}{2\mu_*} \right)^\alpha R_0 \cdot A(\gamma, X) \frac{x_2^{\alpha+1} - x_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

$$A(\gamma, X) = \left[\frac{2+X}{1+X} (1-\gamma-\gamma X) \right]^\alpha; \quad X = 0,5(x_1 + x_2);$$

$$\Delta(r) = \left(\frac{\rho g R_0}{2\mu_*} \right)^\alpha R_0 \frac{x_2 - x_1}{6} \left\{ \left[x_1 \frac{2+x_1}{1+x_1} (1-\gamma-\gamma x_1) \right]^\alpha + \left[x_2 \frac{2+x_2}{1+x_2} (1-\gamma-\gamma x_2) \right]^\alpha - A(\gamma, X)(x_1^\alpha + x_2^\alpha) \right\}.$$

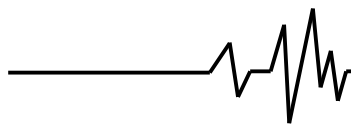
Щоб з'ясувати фактичні похибки формули (7) наближеного обчислення $\tilde{u}(r)$ та знайти відхилення нижньої $u_*(r)$ і верхньої $u^*(r)$ оцінок від $u(r)$, проведено розрахунки при $R = 0,3075$ м; $h = 0,016$ м; $\rho = 750$ кг/м³; $u_0 = 0$ і різних μ_*, α, f . Сталі μ_*, α

задавали так, щоб $\mu_*^\alpha = const$. Одержані результати записано в табл. 1-4. В останніх колонках табл. 1 і табл. 3 вказано значення швидкості $u(R_0)$ і $u(X)$, одержані числовим комп'ютерним інтегруванням з високою точністю. Їх можна прийняти за точні значення при аналізі похибок наближеного способу обчислень по формулі (7).

Таблиця 1

Значення $u_*(R_0)$, $u^*(R_0)$ і точні $u(R_0)$

α	$\mu_*, \text{Па} \cdot \text{с}^{1/\alpha}$	γ	$u_*(R_0), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$u^*(R_0), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$u(R_0), \frac{\text{М}}{\text{с}}$
0,5	0,0200	0,4	0,6140	0,6339	0,6219
0,5	0,0200	0,8	0,3191	0,3660	0,3382
0,5	0,0400	0,4	0,4342	0,4482	0,4397
0,5	0,0400	0,8	0,2256	0,2588	0,2391
0,7	0,0612	0,4	1,2529	1,3099	1,2737
0,7	0,0612	0,8	0,5011	0,6071	0,5406
0,7	0,1000	0,4	0,8884	0,9289	0,9032
0,7	0,1000	0,8	0,3553	0,4305	0,3833
1,0	0,1414	0,4	3,7498	3,9962	3,8304



Продовження таблиці 1

1,0	0,1414	0,8	1,0125	1,3321	1,1175
1,0	0,2000	0,4	2,6511	2,8253	2,7081
1,0	0,2000	0,8	0,7159	0,9418	0,7901

Таблиця 2

Значення $u_n(R_0)$, $\Delta(R_0)$ і наближені $\tilde{u}(R_0)$

α	$\mu_*, \text{Па} \cdot \text{с}^{1/\alpha}$	γ	$u_n(R_0), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$-10^2 \Delta(R_0), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$\tilde{u}(R_0), \frac{\text{М}}{\text{с}}$
0,5	0,0200	0,4	0,6239	0,2455	0,6214
0,5	0,0200	0,8	0,3430	0,5978	0,3370
0,5	0,0400	0,4	0,4411	0,1736	0,4394
0,5	0,0400	0,8	0,2425	0,4227	0,2383
0,7	0,0612	0,4	1,2810	0,7972	1,2730
0,7	0,0612	0,8	0,5544	1,5114	0,5393
0,7	0,1000	0,4	0,9084	0,5653	0,9027
0,7	0,1000	0,8	0,3931	1,0718	0,3824
1,0	0,1414	0,4	3,8706	4,0293	3,8304
1,0	0,1414	0,8	1,1700	5,2479	1,1175
1,0	0,2000	0,4	2,7365	2,8487	2,7081
1,0	0,2000	0,8	0,8272	3,7103	0,7901

Таблиця 3

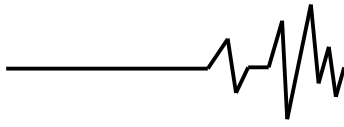
Значення $u_*(X)$, $u^*(X)$ і точні $u(X)$

α	$\mu_*, \text{Па} \cdot \text{с}^{1/\alpha}$	γ	$u_*(X), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$u^*(X), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$u(X), \frac{\text{М}}{\text{с}}$
0,5	0,0200	0,4	0,3969	0,4033	0,3999
0,5	0,0200	0,8	0,2063	0,2217	0,2136
0,5	0,0400	0,4	0,2807	0,2852	0,2828
0,5	0,0400	0,8	0,1459	0,1568	0,1511
0,7	0,0612	0,4	0,8672	0,8867	0,8762
0,7	0,0612	0,8	0,3468	0,3838	0,3639
0,7	0,1000	0,4	0,6150	0,6288	0,6213
0,7	0,1000	0,8	0,2460	0,2721	0,2581
1,0	0,1414	0,4	2,8123	2,9030	2,8524
1,0	0,1414	0,8	0,7594	0,8775	0,8116
1,0	0,2000	0,4	1,9883	2,0524	2,0166
1,0	0,2000	0,8	0,5369	0,6204	0,5738

Таблиця 4

Значення $u_n(X)$, $\Delta(X)$ і наближені $\tilde{u}(X)$

α	$\mu_*, \text{Па} \cdot \text{с}^{1/\alpha}$	γ	$u_n(X), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$-10^4 \Delta(X), \frac{\text{М}}{\text{с}}$	$\tilde{u}(X), \frac{\text{М}}{\text{с}}$
0,5	0,0200	0,4	0,4001	1,7426	0,3999
0,5	0,0200	0,8	0,2141	4,6576	0,2136
0,5	0,0400	0,4	0,2829	1,2322	0,2828
0,5	0,0400	0,8	0,1514	3,2934	0,1510
0,7	0,0612	0,4	0,8769	7,4421	0,8762
0,7	0,0612	0,8	0,3654	1,4756	0,3639
0,7	0,1000	0,4	0,6218	5,2774	0,6213
0,7	0,1000	0,8	0,2591	10,4637	0,2580
1,0	0,1414	0,4	2,8572	48,9786	2,8523



Продовження таблиці 4

1,0	0,1414	0,8	0,8180	64,2102	0,8116
1,0	0,2000	0,4	2,0201	34,6278	2,0166
1,0	0,2000	0,8	0,5784	45,3966	0,5738

Аналіз числових результатів показує, що швидкості $u(R_0)$ і $u(X)$ в табл. 1 і табл. 3 задовольняють нерівності (6), причому точні значення швидкостей ближче до нижньої межі, ніж до верхньої. Відхилення аналітичної частини $u_n(R_0)$ і $u_n(X)$ від точних значень швидкостей не перевищує декількох відсотків. Розраховані по формулі (7) наближені $\tilde{u}(R_0)$ і $\tilde{u}(X)$ відрізняються від відповідних точних значень швидкості лише на десяти долі відсотка. Найбільші похибки наближений спосіб обчислень має при $r = R_0$, де швидкість потоку максимальна. Точність наближеного способу зростає при зменшенні товщини рухомого шару суміші.

Висновки

1. Розглянута узагальнена нелінійна модель руху зерноsumіші призводить до простих розрахункових виразів, користуючись якими можна проводити як комп'ютерні, так і безкомп'ютерні високоточні обчислення швидкості потоку.

2. Розрахунки показали, що величина швидкості руху суттєво залежить від значень усіх трьох реологічних констант і особливо від показника степеня α . Тому є можливість задавати такі значення констант, щоб теорія відповідала практиці сепарування.

Список використаних джерел

1. Шваб А.В. Модель движения высококонцентрированной гранулированной среды [Текст] / А.В. Шваб, М.С. Марценко / Вестник Томского государственного университета, 2011. – №3 (15). – С. 110-116.

2. Тищенко Л.М. Квадратично-нелінійна модель руху зернової суміші на плоскому віброрешеті [Текст] / Л.М. Тищенко, В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Физические и компьютерные технологии. Труды 21-й Международной научн.-практ. Конф. – Днепропетровск: Лира, 2015. – С. 204 - 209.

3. Тищенко Л.М. Про нелінійну модель руху сепарованих сумішей у циліндричному віброрешеті [Текст] / Л.М. Тищенко, В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський //

Инженерия природокористування, 2015. №1 (3). – С. 29-33.

4. Tishchenko L. Quadratic nonlinear model of grain mixture movement in a cylindrical vibratory centrifugal sifter [Text] / L. Tishchenko, V. Olshanskyi, S. Olshanskyi // ТЕКА, Poland: Lublin, 2015. – V.15. – P. 67-72.

5. Сэвидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов в лотках и каналах. [Текст] // Механика гранулированных сред: Теория быстрых движений/ Сб. ст.: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. – С. 86-146.

6. Savage S.B. Jeffrey D. The stress tensor in a granular flow at high shear rates [Text] / S.B. Savage, D.J. Jeffrey // Journal Fluid Mech., 1981. – Vol. 110, P. 255-272.

7. Savage S.B. Granular flows down rough Inclines - Review and extension [Text] / S.B. Savage // Mechanics of granular materials, Elsevier Science publishers. – Amsterdam, 1983. – P. 261-282.

8. Долгунин В.Н. Быстрые гравитационные течения зернистых материалов: техника измерения, закономерности, технологическое применение [Текст] / В.Н. Долгунин, В.Я. Борцев – М.: Машиностроение, 2005. – 73с.

9. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна [Текст] / Л.Н. Тищенко – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.

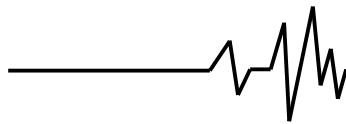
10. Тищенко Л.Н. Колебания зерновых потоков на виброрешетках / [Текст] Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2012. – 267 с.

11. Тищенко Л.Н. Динамика виброцентробежной зерноочистки [Текст] / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский и др. – Харьков: Міськдрук, 2013. – 440 с.

Список джерел в транслітерації

1. Shvab A.V. Model dvszheniya visokokontsentrirrovannoy granulyrovannoy sredy [Tekst] / A.V. Shvab, M.S. Martsenko / Vestnik Tomskoho gosudarstvennoho unsverssteta, 2011. – № 3 (15). – S. 110-116.

2. Tishchenko L.M. Kvadratychno-neliniyna model ruhu zernovoyi sumishi na ploskomu vibroresheti [Tekst] / L.M. Tishchenko, V.P. Olshanskyi, S.V. Olshanskyi // Fizicheskie y



kompyuternie tehnologii. Trudi 21-y Mezhdunarodnoy nauchn.-prakt. Konf. – Dnepropetrovsk: Lyra, 2015. – S. 204 - 209.

3. Tishchenko L.M. Pro neliniynu model' rukhu separovanykh sumishey u tsylindrychnomu vibroresheti [Tekst] / L.M. Tishchenko, V.P. Olshanskyy, S.V. Olshanskyy // Inzheneriya pryrodokorystuvannya, 2015. №1 (3). – S. 29-33.

4. Tishchenko L. Quadratic nonlinear model of grain mixture movement in a cylindrical vibratory centrifugal sifter [Text] / L. Tishchenko, V. Olshanskyi, S. Olshanskyi // TEKA, Poland: Lublin, 2015. – V.15. – P. 67-72.

5. Savydzh S. Gravitatsionnoe techenie nesvyazannykh granulirovannykh materiyalov v lotkah i kanalah [Tekst] // Mehanyka granulirovannykh sred: Teoriya bistrich dvizheniy / Sb. st.: Per. s angl. M.: Mir, 1985. – S. 86-146.

6. Savage S.B. Jeffrey D. The stress tensor in a granular flow at high shear rates [Text] / S.B. Savage, D.J. Jeffrey // Journal Fluid Mech., 1981. – Vol. 110, P. 255-272.

7. Savage S.B. Granular flows down rough. Inclines - Review and extension [Text] / S.B. Savage // Mechanics of granular materials, Elsevier Science publishers. – Amsterdam, 1983. – P. 261-282.

8. Dolgunin V.N. Bistrie gravitatsionnie techeniya zernistih materialov: tehnyka izmereniya, zakonomernosty, tehnolohicheskoe primeneniye [Tekst] / V.N. Dolgunyn, V.Ya. Borshchev – M.: Mashynostroenie, 2005. – 73 s.

9. Tishchenko L.N. Intensifikatsiya separirovaniya zerna [Tekst] / L.N. Tishchenko – Kharkov: Osnova, 2004. – 224 s.

10. Tishchenko L.N. Kolebaniya zernovih potokov na vibroreshetah [Tekst] / L.N. Tishchenko, V.P. Olshanskyy, S.V. Olshanskyy. – Kharkov: Miskdruk, 2012. – 267 s.

11. Tishchenko L.N. Dinamika vibrotsentrobezhnoy zernoochistki [Tekst] / L.N. Tishchenko, V.P. Olshanskyi, S.V. Olshanskyi i dr. – Kharkov: Miskdruk, 2013. – 440 s.

ОБОБЩЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОСМЕСИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Аннотация. Выведено и проинтегрировано нелинейное дифференциальное уравнение установившегося потока зерносмеси в вертикальном цилиндрическом виброрешете, которое вращается с постоянной угловой скоростью. В основу теории положено нелинейную трехпараметрическую степенную зависимость касательного

напряжения от скорости деформации сдвига в зерносмеси. При этом учтено не только нелинейное вязкое сопротивление, а и наличие внутреннего сухого трения в движущемся сыпучем материале. Решение уравнения движения выражено интегралом, который не сводится к известным функциям и подлежит численному интегрированию на компьютере. Как альтернативу численному методу, разработан приближенный способ аналитического вычисления интеграла с использованием формулы Симпсона. Получены также двусторонние неравенства для оценки величины скорости потока зерносмеси. На численных примерах показано, что ошибка приближенного способа вычисления скорости составляет десятичные доли процента. Установлено существенную зависимость расчетной скорости зернопотока от всех трех реологических констант.

Ключевые слова: вертикальное цилиндрическое виброрешето, зернопоток, скорость движения, степенная реологическая зависимость, формула Симпсона, интеграл уравнения движения.

GENERALIZED NONLINEAR MODELS OF THE MOVEMENT OF GRAIN MIXTURES IN A CYLINDRICAL VIBROSIEVE

Annotation. The nonlinear differential equation of the steady flow of grain mixture in a vertical cylindrical vibrosieve, which rotates with a constant angular velocity was derived and integrated. The basis of the theory of non-linear three-parameter model is supposed to power-law dependence of the shear stress on the shear strain rate in the grain mixture. Thus is taken into account not only the non-linear viscous resistance, but a presence of dry internal friction in the moving bulk material. Solution of the equations of motion is expressed by integral that can not be reduced to known functions and should be numerical integrated on a computer. As an alternative to the numerical method it was developed an approximate method of analytical calculation of the integral using Simpson's formula. Also bilateral inequality obtained to estimate the flow rate of grain mixture. In the numerical examples show that the error of the approximate method of calculating the rate is few then tenths of a percent. It was found a significant relationship of estimated grain flows speed from all three of the rheological constants.

Key words: vertical cylindrical vibrosieve, grain flows, motion velocity, power-law rheological dependence, Simpson formula, integral of the equation of motion.