



Шатохин В. М.

*Харьковский
национальный
университет
строительства и
архитектуры*

Шатохина Н. В.

*Харьковский
национальный
автомобильно-
дорожный университет*

Shatokhin V. M.

*Kharkov National
University of Construction
and Architecture*

Shatokhina N. V.

*Kharkov National
Automobile and Highway
University*

УДК 621.432

ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ УСТАНОВИВШИХСЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ МАШИННЫХ АГРЕГАТОВ

Предложен метод исследования установившихся динамических процессов в нелинейных моделях машинных агрегатов. Количество нелинейных элементов технологического и конструктивного характера в них в большинстве случаев существенно меньше числа степеней свободы. Уравнения движения с помощью импульсно-частотных характеристик линеаризованных моделей записаны в форме интегро-дифференциальных уравнений. Число уравнений равно количеству нелинейностей; трудоемкость решения задачи практически не зависит от числа степеней свободы, что существенно при решении задач синтеза и оптимизации. Изложен алгоритм решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на основе метода Ньютона-Канторовича решения операторных уравнений. Для решения линейных интегро-дифференциальных уравнений на каждом шаге итерационного процесса разработан эффективный численный алгоритм на основе дискретного преобразования Фурье и интерполяции. Предложен способ оценки погрешности решений. Приведены результаты расчетных исследований по снижению динамических нагрузок в машинном агрегате транспортного двигателя.

Ключевые слова: *установившийся динамический процесс, машинный агрегат, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, импульсно-частотная характеристика, двигатель внутреннего сгорания.*

Постановка проблемы. Увеличение мощности и быстроходности современных машин неизбежно ведет к возрастанию динамических нагрузок, когда все в большей степени проявляются упругие свойства их деталей и узлов. Анализ и устранение опасных колебаний требуют с одной стороны учета технологических нелинейностей при построении моделей, а с другой – введения упругих муфт и демпфирующих устройств, характеристики которых чаще всего также являются нелинейными. Указанные факторы являются главной причиной многообразия и сложности динамических процессов: смещения резонансов, деформирования резонансных

кривых, многозначности колебаний, возникновения субгармонических режимов, что существенно осложняет решение задач анализа и тем более синтеза для многомерных моделей машинных агрегатов. Универсальные, эффективные и при решении задач синтеза методы расчета установившихся движений в многомерных нелинейных моделях машинных агрегатов, несмотря на значительный прогресс в развитии численных и аналитических методов исследования нелинейных колебаний, разработаны недостаточно.

Анализ последних исследований и публикаций. Расчет вынужденных колебаний многомерных нелинейных систем при



произвольном возбуждении представляет собой сложную математическую проблему [1-3]. Характерной особенностью большинства моделей силовых передач машин является то, что количество нелинейных элементов в них, как правило, существенно меньше числа степеней свободы. Поэтому при исследовании периодических колебаний уравнения движения представляется перспективным записывать в интегральной форме с использованием импульсно-частотных характеристик (ИЧХ) линеаризованных моделей [3, 4]. Число нелинейных уравнений оказывается при этом равным количеству нелинейностей; трудоемкость решения задачи практически не зависит от числа степеней свободы системы, что существенно при решении задач синтеза и оптимизации. Кроме того спектральные характеристики ИЧХ, отражающие резонансные и фильтрующие свойства линейных контуров моделей, облегчают выбор начальных приближений при численном решении интегральных уравнений. В статье [4] получены интегральные уравнения движения для моделей с нелинейными упругими связями, изложен алгоритм их решения, основанный на итерационном методе Ньютона-Канторовича решения операторных уравнений и представлении решений тригонометрическими рядами конечного числа базисных функций. В прикладных задачах часто приходится иметь дело с моделями, в которых нелинейные соединения имеют упруго-диссипативный характер. Для принятого подхода построения математических моделей с помощью ИЧХ это ведет к тому, что уравнения движения приобретают характер интегро-дифференциальных [5].

Цель исследований. Разработка математической модели динамических процессов в многомерных моделях силовых передач машинных агрегатов с нелинейными упруго-диссипативными элементами в форме интегро-дифференциальных уравнений, записанных с помощью ИЧХ. Создание метода, эффективного численного алгоритма решения соответствующих уравнений, удобного в реализации практического способа оценки погрешности решений.

В статье приведены результаты расчетных исследований по улучшению динамических характеристик машинного агрегата с транспортным двигателем на установившихся режимах.

1. Уравнения движения и метод решения. Рассмотрим дискретную цепную многомассовую крутильную систему произвольной структуры, упруго-

диссипативные свойства S_1 соединений которой описываются нелинейными функциями

$$F_j(\psi_j, \dot{\psi}_j) \quad (j = \overline{1, s_1}) \quad \text{углов}$$

закручивания ψ_j и их производных, к S_2 массам которой приложено нелинейное демпфирование $B_k(\vartheta_k, \dot{\vartheta}_k)$ ($k = \overline{1, s_2}$),

зависящее от углов поворота масс ϑ_k и их угловых скоростей. На p масс системы действуют периодические возмущающие моменты $M_i(t)$ ($i = \overline{1, p}$). Представим

$$F_j(\psi_j, \dot{\psi}_j) \text{ и } B_k(\vartheta_k, \dot{\vartheta}_k) \text{ в виде}$$

$$F_j(\psi_j, \dot{\psi}_j) = c_j \psi_j + \beta_j \dot{\psi}_j + \bar{f}_j(\psi_j, \dot{\psi}_j) \quad (j = \overline{1, s_1}), \quad (1)$$

$$B_k(\vartheta_k, \dot{\vartheta}_k) = b_k \dot{\vartheta}_k + \bar{q}_k(\vartheta_k, \dot{\vartheta}_k) \quad (k = \overline{1, s_2}), \quad (2)$$

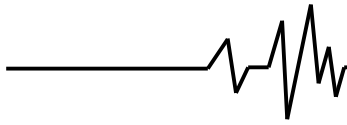
где c_j , β_j и b_k – коэффициенты жесткости, вязкого трения j -го участка и вязкого трения на k -ой массе. Указанное представление нелинейностей означает выделение в нелинейной модели некоторой линейной части. Теперь при периодических колебаниях исходную систему можно рассматривать как линейную, к которой для эквивалентности следует приложить возмущающие периодические моменты, зависящие от движения. В линеаризованных соединениях

$$f_j(\psi_j, \dot{\psi}_j) = -\bar{f}_j(\psi_j, \dot{\psi}_j) = c_j \psi_j + \beta_j \dot{\psi}_j - F_j(\psi_j, \dot{\psi}_j) \quad (j = \overline{1, s_1}), \quad (3)$$

на массах с линеаризованным демпфированием

$$q_k(\vartheta_k, \dot{\vartheta}_k) = -\bar{q}_k(\vartheta_k, \dot{\vartheta}_k) = b_k \dot{\vartheta}_k - B_k(\vartheta_k, \dot{\vartheta}_k) \quad (k = \overline{1, s_2}). \quad (4)$$

Используя ИЧХ линейной части модели, принцип суперпозиции, аналогично [3, 4] запишем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно углов закручивания нелинейных участков и углов поворота масс, к которым приложено нелинейное демпфирование:



$$\left. \begin{aligned} \psi_j(t) &= \sum_{m=1}^{s_1} \int_0^T \varphi_{jm}^{(3)}(t-\tau) f_m(\psi_m, \dot{\psi}_m) d\tau + \sum_{m=1}^{s_2} \int_0^T \varphi_{jm}^{(1)}(t-\tau) q_m(\vartheta_m, \dot{\vartheta}_m) d\tau + \\ &+ \sum_{m=1}^p \int_0^T \varphi_{jm}^{(1)}(t-\tau) M_m(\tau) d\tau, \\ \vartheta_k(t) &= \sum_{m=1}^{s_1} \int_0^T \varphi_{km}^{(2)}(t-\tau) f_m(\psi_m, \dot{\psi}_m) d\tau + \sum_{m=1}^{s_2} \int_0^T \varphi_{km}^{(0)}(t-\tau) q_m(\vartheta_m, \dot{\vartheta}_m) d\tau + \\ &+ \sum_{m=1}^p \int_0^T \varphi_{km}^{(0)}(t-\tau) M_m(\tau) d\tau \quad (j = \overline{1, s_1}, k = \overline{1, s_2}), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где T – период колебаний (в общем случае кратен периоду возмущения); $\varphi_{jm}^{(l)}(t)$, $\varphi_{km}^{(l)}(t)$ ($j = \overline{1, s_1}$; $k = \overline{1, s_2}$; $l = 0, 1, 2, 3$) – ИЧХ различных типов [3].

Если ввести векторы

$$\mathbf{y} = [\psi_1, \dots, \psi_{s_1}, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{s_2}]^T = [y_1, \dots, y_s]^T, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) &= [f_1(\psi_1, \dot{\psi}_1), \dots, f_{s_1}(\psi_{s_1}, \dot{\psi}_{s_1}), q_1(\vartheta_1, \dot{\vartheta}_1), \dots, q_{s_2}(\vartheta_{s_2}, \dot{\vartheta}_{s_2})]^T = \\ &= [\tilde{f}_1(y_1, \dot{y}_1), \dots, \tilde{f}_s(y_s, \dot{y}_s)]^T, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= \left[\sum_{m=1}^p \int_0^T \varphi_{1m}^{(1)}(t-\tau) M_m(\tau) d\tau, \dots, \sum_{m=1}^p \int_0^T \varphi_{s_1 m}^{(1)}(t-\tau) M_m(\tau) d\tau, \right. \\ &\left. \sum_{m=1}^p \int_0^T \varphi_{1m}^{(0)}(t-\tau) M_m(\tau) d\tau, \dots, \sum_{m=1}^p \int_0^T \varphi_{s_2 m}^{(0)}(t-\tau) M_m(\tau) d\tau \right]^T = \\ &= [\mathbf{g}_1(t), \dots, \mathbf{g}_s(t)]^T \end{aligned} \quad (8)$$

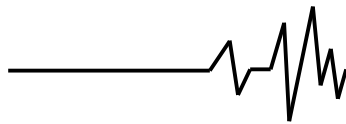
и матрицу

$$\Phi(\gamma) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}^{(3)}(\gamma) & \dots & \varphi_{1s_1}^{(3)}(\gamma) & \varphi_{11}^{(1)}(\gamma) & \dots & \varphi_{1s_2}^{(1)}(\gamma) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{s_1 1}^{(3)}(\gamma) & \dots & \varphi_{s_1 s_1}^{(3)}(\gamma) & \varphi_{s_1 1}^{(1)}(\gamma) & \dots & \varphi_{s_1 s_2}^{(1)}(\gamma) \\ \varphi_{11}^{(2)}(\gamma) & \dots & \varphi_{1s_1}^{(2)}(\gamma) & \varphi_{11}^{(0)}(\gamma) & \dots & \varphi_{1s_2}^{(0)}(\gamma) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{s_2 1}^{(2)}(\gamma) & \dots & \varphi_{s_2 s_1}^{(2)}(\gamma) & \varphi_{s_2 1}^{(0)}(\gamma) & \dots & \varphi_{s_2 s_2}^{(0)}(\gamma) \end{bmatrix} = [\varphi_{kj}(\gamma)], \quad (9)$$

где $\gamma = t - \tau$, $s = s_1 + s_2$ (τ – знак транспонирования; $k, j = \overline{1, s}$), то систему интегро-дифференциальных уравнений (5) можно записать в компактной матричной форме

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^T \Phi(t-\tau) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) d\tau + \mathbf{g}(t). \quad (10)$$

В большинстве прикладных задач упругие и диссипативные свойства нелинейностей разделяются [3]. Полагая



$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}})$, уравнение (10)
перепишем так:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^T \Phi(t - \tau) [\mathbf{f}(\mathbf{y}) + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}})] d\tau + \mathbf{g}(t). \quad (11)$$

Применение метода Ньютона-Канторовича (МНК) [3, 4] к уравнению (11)

позволяет формулы итерационного процесса его решения представить в виде

$$\mathbf{y}_{n+1}(t) = \mathbf{y}_n(t) - \mathbf{z}_n(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где вектор-функция невязки

$$\mathbf{z}_n(t) = [z_{1n}(t), \dots, z_{s_n}(t)]^T \quad \text{является}$$

решением линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\mathbf{z}_n(t) - \int_0^T \Phi(t - \tau) [\mathbf{f}'_y(\mathbf{y}_n) \mathbf{z}_n(\tau) + \mathbf{b}'_{\dot{\mathbf{y}}}(\dot{\mathbf{y}}_n) \dot{\mathbf{z}}_n(\tau)] d\tau = -\mathbf{I}_n(t), \quad (13)$$

а вектор-функция $\mathbf{I}_n(t) = [I_{1n}(t), \dots, I_{s_n}(t)]^T$ определяется из выражения

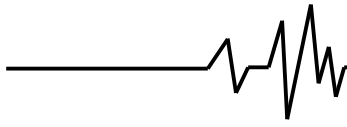
$$\mathbf{I}_n(t) = \int_0^T \Phi(t - \tau) [\mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + \mathbf{b}(\dot{\mathbf{y}}_n)] d\tau + \mathbf{g}(t) - \mathbf{y}_n(t), \quad (14)$$

причем $\mathbf{f}'_y(\mathbf{y}) = \text{diag} [f'_{jy_j}(y_j)]$, $\mathbf{b}'_{\dot{\mathbf{y}}}(\dot{\mathbf{y}}) = \text{diag} [b'_{j\dot{y}_j}(\dot{y}_j)]$ – диагональные матрицы.

2. Алгоритм реализации метода. При численной реализации алгоритма для решения линейных интегро-дифференциальных уравнений на каждом шаге итерационного процесса воспользуемся методом квадратурных формул совместно с идеей интерполяции искомого решения. Метод квадратурных формул является наиболее универсальным методом решения интегральных уравнений с постоянными пределами [6]. Использование же идеи интерполяции важно для рассматриваемых в статье моделей по нескольким причинам. Во-первых, характерным для них является наличие в линейном интегро-дифференциальном уравнении (13) ядра, гладкость которого существенно ниже гладкости решения (нелинейности часто являются кусочно-гладкими или даже кусочно-непрерывными); ИЧХ, входящие в ядро, могут иметь существенные высокочастотные составляющие, что требует, как правило, для его описания с необходимой точностью большего числа точек, чем для описания решения. Очевидно, что простое увеличение их количества не оптимально с точки зрения использования памяти компьютера и затрат времени (объем памяти пропорционален квадрату, а число арифметических операций – кубу числа узлов [7]). Интерполяция искомого решения дает возможность при замене интеграла конечной суммой увеличить число узлов интегрирования с целью более точного представления ядра интегрального уравнения, не увеличивая при этом числа точек, в которых определяется искомая функция, а следовательно, и порядок соответствующей

системы линейных алгебраических уравнений. Во-вторых, указанная система не может быть построена непосредственно с использованием квадратурных формул, так как при замене интегралов конечными суммами необходимо располагать значениями производной $\dot{\mathbf{z}}_n(t)$ от функции невязки в узловых точках, что делает особенно целесообразным использование формул интерполяции. В-третьих, при получении решения с одинаковой точностью алгоритм, использующий интерполяцию, требует существенно меньшего числа узлов, чем алгоритм без интерполяции. Во многих случаях это обстоятельство является важным даже не столько из-за возможности экономичного использования памяти компьютера, сокращения времени счета, а благодаря тому, что область сходимости итерационного процесса в этом случае расширяется [8].

Преобразуем линейное интегро-дифференциальное уравнение (13) к системе линейных алгебраических уравнений, используя квадратурную формулу прямоугольников с равноотстоящими узлами и равными коэффициентами, обеспечивающую в рассматриваемом случае наивысшую степень тригонометрической точности [9]. Решение уравнения будем определять в N (N – четное) равноотстоящих точках на периоде (основные узлы) $t_m = (m-1)\Delta$, где $\Delta = T/N$ ($m = \overline{1, N}$). Приближенное выражение для функции невязки через ее значения в узлах $\tilde{z}_{j_n}^m = \tilde{z}_{j_n}(t_m)$ с помощью



интерполяционной формулы представим в виде

$$\tilde{z}_{j_n}(\tau) = \sum_{m=1}^N C_m(\tau) \tilde{z}_{j_n}^m$$

$$(j = \overline{1, s}; n = 0, 1, 2, \dots), \quad (15)$$

где $C_m(\tau)$ – известные функции времени, зависящие от конкретного вида интерполяционной формулы. Квадратуры в правой части заменим конечными суммами, используя наряду с основными и вспомогательные равноотстоящие узлы $\tau_i = (i-1)\Delta_1$ ($i = 1, N_1$), где Δ_1 выбираем

из условия $\Delta_1 = \Delta/q$ (q – четное). (При $i = (m-1)q + 1$ имеет место совпадение основных и вспомогательных узлов). Так как функции $z_{j_n}(t)$, $y_{j_n}(t)$

($j = \overline{1, s}; n = 0, 1, 2, \dots$) по смыслу решаемой задачи являются периодическими, естественным является использование тригонометрической интерполяции [10] – прямого дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Приближенное выражение функции $z_{j_n}(\tau)$ имеет в этом случае вид (для компактности записи индекс n опущен)

$$\tilde{z}_j(\tau) = a_j^0 + \sum_{k=1}^{r+1} \left(a_j^k \cos k \frac{2\pi}{T} \tau + b_j^k \sin k \frac{2\pi}{T} \tau \right), \quad (16)$$

где $r = N/2 - 1$,

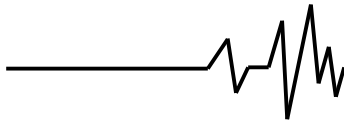
$$\left. \begin{aligned} a_j^0 &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \tilde{z}_j^m, \\ a_j^k &= \begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \tilde{z}_j^m \cos k \frac{2\pi}{N} (m-1) & (k = \overline{1, r}), \\ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \tilde{z}_j^m & (k = r+1), \end{cases} \\ b_j^k &= \begin{cases} \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \tilde{z}_j^m \sin k \frac{2\pi}{N} (m-1) & (k = \overline{1, r}), \\ 0 & (k = r+1). \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

После подстановки выражений (17) в формулу (16), последняя приобретает вид (15), где

$$C_m(\tau) = \frac{1}{N} \left[1 + (-1)^{m+1} \cos(r+1) \frac{2\pi}{T} \tau \right] + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^r \cos 2\pi k \left(\frac{m-1}{N} - \frac{\tau}{T} \right). \quad (18)$$

Для узловых точек $\tau_i = (i-1)\Delta_1$ значения коэффициентов $C_m^i = C_m((i-1)\Delta_1)$, после соответствующих преобразований, будут определяться по формуле

$$C_m^i = \begin{cases} \frac{1}{N} \left\{ \left[1 + (-1)^{m+1} \cos \frac{i-1}{q} \pi \right] + 2 \frac{\cos(n+1)\alpha_m^i \sin n\alpha_m^i}{\sin \alpha_m^i} \right\} & (i \neq (m-1)q + 1), \\ 1 & (i = (m-1)q + 1), \end{cases} \quad (19)$$



где $\alpha_m^i = \left[\frac{(m-1)q - i + 1}{Nq} \right] \pi$.

Можно показать, что имеют место соотношения

$$C_m^i = \begin{cases} C_1^{(N-m+1)q+i} & (i = \overline{1, (m-1)q}), \\ C_1^{i-(m-1)q} & (i = \overline{(m-1)q+1, Nq}), \end{cases}$$

т.е. при $1 < m \leq N$ коэффициенты C_m^i выражаются через коэффициенты C_1^i путем циклической сдвижки последних на $(m-1)q$

значений. Кроме того коэффициенты C_1^i ($i = \overline{1, N_1}$), удовлетворяют условию $C_1^{j+1} = C_1^{Nq-j+1}$ ($j = \overline{1, Nq/2-1}$). Таким образом их значения симметричны относительно узла с номером $Nq/2+1$ и, следовательно, именно столько коэффициентов фактически необходимо предварительно подсчитать.

Дифференцируя формулу (16) по τ , после соответствующих преобразований получим выражение аналогичное (15)

$$\tilde{z}_{j_n}(\tau) = \sum_{m=1}^N \tilde{C}_m(\tau) \tilde{z}_{j_n}^m, \quad (20)$$

где

$$\tilde{C}_m(\tau) = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{2} (-1)^m \sin N\pi \frac{\tau}{T} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^r k \sin 2\pi k \left(\frac{m-1}{N} - \frac{\tau}{T} \right) \right]. \quad (21)$$

В узловых точках $\tau_i = (i-1)\Delta_1$ коэффициенты $\tilde{C}_m^i = \tilde{C}_m((i-1)\Delta_1)$ будут определяться по формуле

$$\tilde{C}_m^i = \frac{2\pi}{T} \left\{ \frac{1}{2} (-1)^m \sin \frac{i-1}{q} \pi + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^r k \sin 2\pi k \left[\frac{(m-1)q - i + 1}{Nq} \right] \right\}. \quad (22)$$

Аналогично предыдущему можно показать, что для $1 < m \leq N$ они выражаются через коэффициенты \tilde{C}_1^i путем циклической сдвижки последних на $(m-1)q$ значений

$$\tilde{C}_m^i = \begin{cases} \tilde{C}_1^{(N-m+1)q+i} & (i = \overline{1, (m-1)q}), \\ \tilde{C}_1^{i-(m-1)q} & (i = \overline{(m-1)q+1, Nq}). \end{cases}$$

Коэффициенты \tilde{C}_1^i ($i = \overline{1, N_1}$) удовлетворяют условию $\tilde{C}_1^{j+1} = -\tilde{C}_1^{Nq-j+1}$ ($j = \overline{1, Nq/2-1}$), т.е. их значения кососимметричны относительно узла с номером $Nq/2+1$. Таким образом и в этом

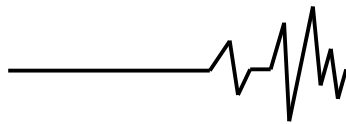
случае фактически предварительно необходимо насчитать лишь $Nq/2+1$ значение.

Преобразуем теперь один из непрерывных интегральных операторов в левой части системы линейных интегро-дифференциальных уравнений (13)

$$L(z_{j_n}(\tau)) = \int_0^T \varphi_{kj}(t-\tau) \left[f'_{jy_j}(y_{j_n}) z_{j_n}(\tau) + b'_{j\dot{y}_j}(\dot{y}_{j_n}) \dot{z}_{j_n}(\tau) \right] dt \quad (23)$$

к конечномерному дискретному оператору. Для каждого момента времени $t_m = (m-1)\Delta$ ($m = \overline{1, N}$) интегралы заменим конечными

суммами, используя узлы $\tau_i = (i-1)\Delta_1$ ($i = \overline{1, N_1}$) и выражая значения функции



$\tilde{z}_{j_n}(\tau)$ и ее производной $\dot{\tilde{z}}_{j_n}(\tau)$ в них через значения в основных узловых точках с помощью полученных выше коэффициентов. Для компактной записи указанного преобразования введем следующие обозначения:

$\tilde{\mathbf{z}}_{j_n} = [\tilde{z}_{j_1}, \dots, \tilde{z}_{j_N}]^T$ – матрица-столбец, где $\tilde{z}_{j_m} = \tilde{z}_{j_n}((m-1)\Delta)$; $\mathbf{F}'_j = \text{diag}(f'_{j_1}, \dots, f'_{j_{N_1}})$, $\mathbf{B}'_j = \text{diag}(b'_{j_1}, \dots, b'_{j_{N_1}})$ – диагональные матрицы, где $f'_{j_i} = f'_{j_{y_j}}(y_{j_n}((i-1)\Delta_1))$,

$$b'_{j_i} = b'_{j_{\dot{y}_j}}(\dot{y}_{j_n}((i-1)\Delta_1)) \quad (j = \overline{1, s};$$

$$i = \overline{1, N_1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots); \quad \mathbf{C} = [c_{mi}],$$

$\mathbf{C}' = [c'_{mi}]$ – прямоугольные матрицы, где

$$c_{mi} = C_m^i, \quad c'_{mi} = \tilde{C}_m^i \quad (m = \overline{1, N}; \quad i = \overline{1, N_1}).$$

В силу установленных выше свойств коэффициентов C_m^i , \tilde{C}_m^i матрицы будут представлять собой обобщенные циркулянты [11] – матрицы, у которых каждая последующая строка получается из предыдущей циклическим сдвигом на некоторое число элементов (в рассматриваемом случае – на q элементов).

Из значений ИЧХ $\Phi_{kj}^i = \Phi_{kj}((i-1)\Delta_1)$

$(i = \overline{1, N_1})$ также составим обобщенную циркулянту Φ_{kj} – матрицу размерности

$N \times N_1$, первая строка которой имеет вид

$$[\Phi_{kj}^1, \Phi_{kj}^{N_1}, \Phi_{kj}^{N_1-1}, \Phi_{kj}^{N_1-2}, \dots, \Phi_{kj}^2],$$

а каждая последующая получается из предыдущей циклической сдвижкой на q элементов. При этом учтено, что ИЧХ являются периодическими функциями, для которых явные выражения [3] имеют место на интервале $[0, T]$, а следовательно, справедливо соотношение

$$\Phi_{kj}(-t) = \Phi_{kj}(T-t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Теперь нетрудно показать, что дискретное линейное преобразование, соответствующее (23) имеет вид

$$\mathbf{A}_{kj} \tilde{\mathbf{z}}_j = \Phi_{kj} (\mathbf{F}'_j \mathbf{C}^T + \mathbf{B}'_j \mathbf{C}'^T) \Delta_1 \tilde{\mathbf{z}}_j, \quad (24)$$

где \mathbf{A}_{kj} – матрица размерности $N \times N$, причем

$$\mathbf{A}_{kj} = \Phi_{kj} (\mathbf{F}'_j \mathbf{C}^T + \mathbf{B}'_j \mathbf{C}'^T) \Delta_1 \quad (j, k = \overline{1, s}). \quad (25)$$

Запишем теперь формулы для получения соответствующих дискретных значений правой части выражения (13). При определении $\tilde{l}_{j_n}(t_m)$ интегралы следует вычислять, используя квадратурную формулу прямоугольников с тем же числом вспомогательных узлов, что и выше (это существенно для точности решения задачи и быстроты сходимости итерационного процесса). Выражения для значений функции $y_{j_n}(\tau)$ и ее производных в указанных точках через значения в основных узловых точках необходимо использовать интерполяционные формулы, аналогичные (15), (20). Введем

обозначения: $\tilde{\mathbf{l}}_{j_n} = [\tilde{l}_{j_1}, \dots, \tilde{l}_{j_N}]^T$ – матрицы-столбцы правой части (13), без учета знака, где

$$\tilde{l}_{j_m} = \tilde{l}_{j_n}(t_m); \quad \tilde{\mathbf{y}}_{j_n} = [\tilde{y}_{j_1}, \dots, \tilde{y}_{j_N}]^T$$

– матрицы-столбцы приближенных решений на n -ом шаге в основных узловых точках, где

$$\tilde{y}_{j_m} = \tilde{y}_{j_n}(t_m); \quad \mathbf{u}_{j_n} = [u_{j_1}, \dots, u_{j_{N_1}}]^T,$$

$\mathbf{v}_{j_n} = [v_{j_1}, \dots, v_{j_{N_1}}]^T$ – матрицы-столбцы соответственно приближенных решений и их производных на n -ом шаге с учетом дополнительных узловых точек, где

$$u_{j_i} = \tilde{y}_{j_n}(\tau_i), \quad v_{j_i} = \dot{\tilde{y}}_{j_n}(\tau_i),$$

$\mathbf{f}_{j_n} = [f_{j_1}, \dots, f_{j_{N_1}}]^T$, $\mathbf{b}_{j_n} = [b_{j_1}, \dots, b_{j_{N_1}}]^T$ – матрицы-столбцы значений нелинейных функций, где соответственно $f_{j_i} = f_j(u_{j_i})$,

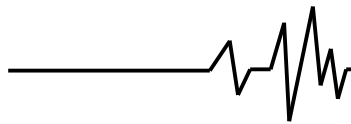
$$b_{j_i} = b_j(v_{j_i}), \quad \tilde{\mathbf{g}}_j = [\tilde{g}_{j_1}, \dots, \tilde{g}_{j_N}]^T$$

– матрица-столбец, обусловленная наличием внешних возмущающих моментов, где

$$\tilde{g}_{j_m} = \tilde{g}_j(t_m) \quad (j = \overline{1, s}; \quad m = \overline{1, N};$$

$i = \overline{1, N_1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots)$. Заметим, что при вычислении соответствующих интегралов (см. формулу (8)) следует пользоваться, как и выше, квадратурной формулой

прямоугольников с равноотстоящими узлами



$\tau_i = (i - 1)\Delta_1$ ($i = \overline{1, N_1}$). Теперь с учетом введенных обозначений имеем

$$\tilde{\mathbf{l}}_{j_n} = \sum_{k=1}^s \Phi_{jk}(\mathbf{f}_{j_n} + \mathbf{b}_{j_n})\Delta_1 + \tilde{\mathbf{g}}_j + \tilde{\mathbf{y}}_{j_n} \quad (j = \overline{1, s}; n = \overline{0, 1, 2, \dots}). \quad (26)$$

Формулы же итерационного процесса окончательно принимают вид

$$\tilde{\mathbf{y}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{y}}_n - \tilde{\mathbf{z}}_n, \quad (27)$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\tilde{\mathbf{z}}_n = -\tilde{\mathbf{l}}_n, \quad (28)$$

$$\tilde{\mathbf{l}}_n = \Phi(\mathbf{f}_n + \mathbf{b}_n)\Delta_1 + \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{y}}_n. \quad (29)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{y}}_n = [\tilde{y}_{j_n}]^T$, $\tilde{\mathbf{z}}_n = [\tilde{z}_{j_n}]^T$,

$$\tilde{\mathbf{l}}_n = [\tilde{l}_{j_n}]^T, \quad \mathbf{f}_n = [\mathbf{f}_{j_n}]^T, \quad \mathbf{b}_n = [\mathbf{b}_{j_n}]^T$$

($j = \overline{1, s}; n = \overline{0, 1, 2, \dots}$) – блочные матрицы-столбцы; $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{kj}]$ – блочная матрица, блоки которой определяются в соответствии с формулой (25); $\Phi = [\Phi_{kj}]$ – блочная матрица, клетками которой являются матрицы Φ_{kj} в формуле (25) ($k, j = \overline{1, s}$); \mathbf{E} – единичная матрица размерности $sN \times sN$.

В качестве критерия окончания итерационного процесса удобно принять условие

$$\|\tilde{\mathbf{z}}_n\| = \max_j \max_m |\tilde{z}_{jn}^m| < \varepsilon \quad (j = \overline{1, s}; m = \overline{1, N}). \quad (30)$$

3. Оценки погрешности численных решений уравнений. Использование известных приемов оценки погрешности решений интегральных (интегродифференциальных) уравнений [13] для задач рассматриваемого класса затруднительно из-за их ограниченности и сложности. Значение погрешности при этом оказывается существенно завышенным. В практических расчетах для оценки погрешности численных решений уравнений эффективным оказался следующий подход. В общем случае уравнению (10) или (11), устанавливающему связь между $\mathbf{g}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$, можно придать двоякий смысл. Его можно рассматривать как оператор для определения $\mathbf{g}(t)$, если

известна функция $\mathbf{y}(t)$. Значения $\mathbf{g}(t)$ можно находить с любой наперед заданной точностью, так как задача численного интегрирования не представляет трудностей. В то же время обратная задача определения функции $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_n(t)$ с помощью изложенного алгоритма решается менее точно, чем первая. Если бы прямая $\mathbf{y}_n(t) \rightarrow \mathbf{g}(t)$ и обратная

$\mathbf{g}(t) \rightarrow \mathbf{y}_n^*(t)$ задачи решались точно, то выполнялось бы равенство $\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{y}_n^*(t)$. Однако в силу сказанного оно не будет иметь места. Для оценки абсолютной погрешности удобно использовать соответствующую норму разности указанных функций

$$\Delta\varepsilon = \|\mathbf{y}_n(t) - \mathbf{y}_n^*(t)\|, \quad (31)$$

где $\|\mathbf{y}\| = \max_j \max_{0 \leq t \leq T} |y_j(t)|$ ($j = \overline{1, s}$).

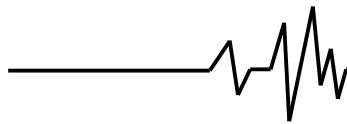
Относительную погрешность удобно взять в виде

$$\delta = \Delta\varepsilon / \|\mathbf{y}_n(t)\|. \quad (32)$$

Практически указанные действия следует выполнить для функции $\tilde{\mathbf{y}}_n(t)$ (результат интерполяции найденного решения).

Рекомендации по выбору коэффициентов линеаризации, числа основных и вспомогательных узлов, построению ИЧХ, оценке устойчивости решений, данные в работе [3], сохраняют силу и для рассмотренного алгоритма.

4. Расчетные исследования динамических нагрузок в машинном агрегате с транспортным двигателем. Приведем результаты некоторых расчетов по программе, реализующей описанный алгоритм, подтверждающие эффективность использования ДПФ, при решении интегральных уравнений колебаний, а также возможность практической оценки погрешности результатов с применением предложенного приема. На рис. 1 представлена нелинейная модель шестицилиндрового V-образного четырехтактного двигателя 6V396TC4 и трансмиссии промышленного трактора Т35.01 (I_1 – вентилятор; $I_2 \div I_4$ – цилиндрические массы; I_5 – маховик; I_6, I_7 – полумуфты; I_8 – приведенная масса редуктора; I_9, I_{11} – масляные насосы; I_{10} – гидротрансформатор). Параметры модели приведены в табл. 1.



Конструктивные соображения потребовали установки между двигателем и гидротрансформатором редуктора. При эксплуатации, однако, обнаружился чрезмерный износ его шестерен от интенсивных вынужденных колебаний. Указанное обстоятельство потребовало

введения в систему дополнительной резино-пальцевой муфты и рационального выбора ее параметров (числа пальцев, мест их установки). Упругие свойства муфты схематизируются нелинейной характеристикой, также представленной на рис. 1.

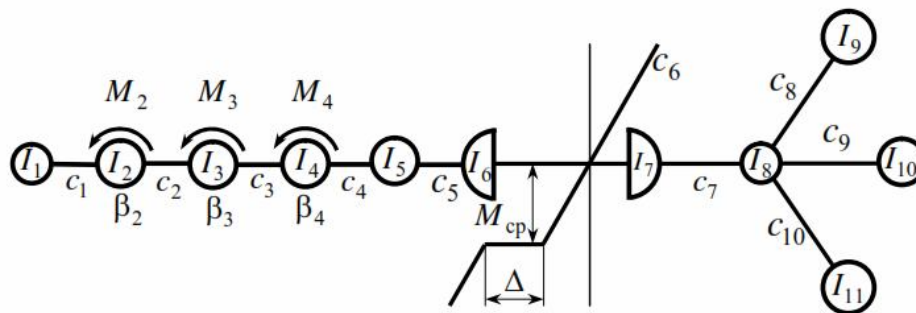


Рис. 1. Механическая модель машинного агрегата с транспортным двигателем

Таблица 1

Параметры модели

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$I_k, \text{кгм}^2$	0,26	0,984	0,677	0,984	2,55	1,4	0,5	0,11	0,088	2,55	0,13
$c_k \cdot 10^{-6}, \text{Нм}$	7,05	4,52	4,52	7,53	1,18	0,266	100	0,83	0,674	0,91	-
$\beta_k, \text{Нмс}^{-1}$	0	98,1	98,1	98,1	0	0	0	0	0	0	0
$M_k, \text{Нм}$	0	1349	1349	1349	0	0	0	0	0	0	0

На рис. 2 приведены результаты одного из расчетов упругого момента в редукторе (в соединении с жесткостью c_7) при следующих параметрах муфты: $c_6 = 0,266 \cdot 10^6 \text{ Нм}$; $M_{cp} = 1700 \text{ Нм}$; $\Delta = 0,028 \text{ рад}$. Возбуждение рассматривалось от главной третьей гармоники, демпфирование учитывалось только на цилиндрических массах.

Для частоты $\omega = 412 \text{ с}^{-1}$, соответствующей максимальному упругому моменту, в табл. 2 приведены значения погрешностей для решения, полученного с разным числом основных узлов, а также при наличии вспомогательных узлов (погрешность при этом уменьшается на порядок).

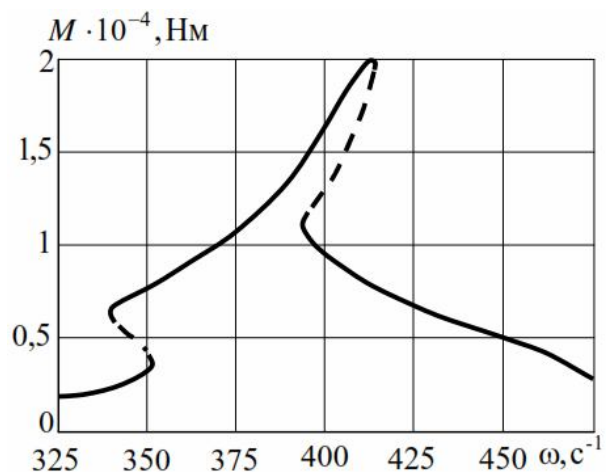
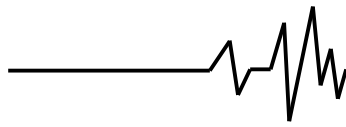


Рис. 2. Упругий момент в редукторе

Таблица 2

Абсолютная и относительная погрешности

N	24	36	48	60	72	84	24 ($q = 4$)
$\Delta \varepsilon$	$0,194 \cdot 10^{-3}$	$0,172 \cdot 10^{-3}$	$0,125 \cdot 10^{-3}$	$0,85 \cdot 10^{-4}$	$0,41 \cdot 10^{-4}$	$0,15 \cdot 10^{-4}$	$0,19 \cdot 10^{-4}$
$\delta, \%$	1,21	1,05	0,81	0,53	0,26	0,096	0,12

**Выводы**

1. Предложено использовать для исследования установившихся динамических процессов в нелинейных моделях машинных агрегатов интегро-дифференциальные уравнения движения, записанные с помощью ИЧХ линеаризованных моделей.

2. Изложен алгоритм решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на основе метода Ньютона-Канторовича решения операторных уравнений; для решения линейных интегро-дифференциальных уравнений на каждом шаге итерационного процесса разработан эффективный численный алгоритм на основе дискретного преобразования Фурье и интерполяции.

3. Разработан удобный в реализации практический способ оценки погрешности решений, позволяющий подбирать важные параметры численных алгоритмов в процессе расчетов.

4. Приведены результаты расчетных исследований динамических нагрузок в машинном агрегате с транспортным двигателем.

5. Предложенные математические модели установившихся динамических процессов в силовых передачах машинных агрегатов, методы их исследования имеют широкие перспективы для моделей, в которых число нелинейных элементов меньше числа степеней свободы.

Список использованных источников

1. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 1. Модели, методы, явления / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин.– Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010.– 704 с.

2. Вибрации в технике: В 6-ти т. / Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова.– М.: Машиностроение, 1980.– т. 3.– 544 с.

3. Шатохин В.М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин: Монография / В.М. Шатохин.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2008.– 456 с.

4. Шатохин В.М. Исследование установившихся динамических процессов в нелинейных моделях машинных агрегатов с использованием интегральных уравнений движения / В.М. Шатохин, Н.В. Шатохина // Вібрації в техніці та технологіях.– 2015.– № 4 (80).– С. 96-104.

5. Краснов М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов.– М.: Наука, 1975.–

304 с.

6. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения : методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков.– Киев.: Наукова думка, 1986.– 543 с.

7. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин.– М.: Наука, 1977.– 304 с.

8. Шуп Т. Решение нелинейных задач на ЭВМ: Практическое руководство / Т. Шуп.– М.: Мир, 1982.– 238 с.

9. Крылов В.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполяция и интегрирование / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский.– Мн.: Наука и техника, 1983.– 287 с.

10. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн.– М.: Наука, 1970.– 720 с.

11. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон.– М.: Мир, 1989.– 665 с.

12. Алексеева С.В. Силовые передачи транспортных машин: Динамика и расчет / С.В. Алексеева, В.Л. Вейц, Ф.Р. Геккер, А.Е. Кочура.– Л.: Машиностроение, 1982.– 256 с.

13. Мысовских И.П. Ошибка численного решения нелинейного интегрального уравнения / И.П. Мысовских // ДАН СССР.– 1963.– т. 153.– №1.– С. 30-33.

Список источников в транслитерации

1. Avramov K.V. Nelineynaya dinamika uprugih sistem. Tom 1. Modeli, metody, yavleniya / K.V. Avramov, Yu.V. Mihlin.– Moskva-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2010.– 704 s.

2. Vibratsii v tehnikе: V 6-ti t. / Pod red. F.M. Dimentberga i K.S. Kolesnikova.– M.: Mashinostroenie, 1980.– t. 3.– 544 s.

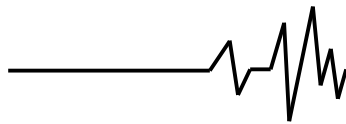
3. Shatohin V.M. Analiz i parametricheskii sintez nelineynykh silovykh peredach mashin: Monografiya / V.M. Shatohin.– Harkov: NTU "HPI", 2008.– 456 s.

4. Shatohin V.M. Issledovanie ustanovivshisya dinamicheskikh protsessov v nelineynykh modelyakh mashinnykh agregatov s ispolzovanie integralnykh uravneniy dvizheniya / V.M. Shatohin, N.V. Shatohina // Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh.– 2015.– № 4 (80).– S. 96-104.

5. Krasnov M.L. Integralnyie uravneniya / M.L. Krasnov.– M.: Nauka, 1975.– 304 s.

6. Verlan A.F. Integralnyie uravneniya : metody, algoritmy, programmy / A.F. Verlan, V.S. Sizikov.– Kiev.: Naukova dumka, 1986.– 543 s.

7. Voevodin V.V. Vyichislitelnyie osnovy lineynoy algebrы / V.V. Voevodin.– M.: Nauka, 1977.– 304 s.



8. Shup T. Reshenie nelineynykh zadach na EVM: Prakticheskoe rukovodstvo / T. Shup.–M.: Mir, 1982.–238 s.

9. Kryilov V.I. Nachala teorii vyichislitelnykh metodov. Interpolyatsiya i integrirovaniye / V.I. Kryilov, V.V. Bobkov, P.I. Monastyirskiy.–Mn.: Nauka i tehnika, 1983.–287 s.

10. Korn G. Spravochnik po matematike / G. Korn.–M.: Nauka, 1970.–720 s.

11. Horn R. Matrichnyy analiz / R. Horn, Ch. Dzhonson.–M.: Mir, 1989.–665 s.

12. Alekseeva S.V. Silovye peredachi transportnykh mashin: Dinamika i raschet / S.V. Alekseeva, V.L. Veyts, F.R. Gekker, A.E. Kochura.–L.: Mashinostroenie, 1982.–256 s.

13. Myisovskiy I.P. Oshibka chislennogo resheniya nelineynogo integralnogo uravneniya / I.P. Myisovskiy // DAN SSSR.– 1963.– t. 153.– №1.– S. 30-33.

ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ РАЗНУЕНИЯ СТАБИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ МАШИНЫХ АГРЕГАТИВ

Аноація. Запропоновано метод дослідження сталих динамічних процесів у нелінійних моделях машинних агрегатів. Кількість нелінійних елементів технологічного і конструктивного характеру в них у більшості випадків істотно менше числа ступенів вільності. Рівняння руху за допомогою імпульсно-частотних характеристик лінеаризованих моделей записані у формі інтегро-диференціальних рівнянь. Число рівнянь дорівнює кількості нелінійностей; трудомісткість розв'язання задачі практично не залежить від числа ступенів вільності, що істотно при розв'язанні задач синтезу і оптимізації. Викладено алгоритм розв'язання нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь на основі методу Ньютона-Канторовича розв'язання операторних рівнянь. Для розв'язання лінійних інтегро-диференціальних рівнянь на кожному кроці ітераційного процесу розроблено ефективний числовий алгоритм на основі дискретного перетворення Фур'є і інтерполяції. Запропоновано спосіб оцінки погрешності розв'язків. Приведені результати розрахункових досліджень по зниженню динамічних навантажень в машинному агрегаті транспортного двигуна.

Ключові слова: сталий динамічний процес, машинний агрегат, нелінійне інтегро-диференціальне рівняння, імпульсно-частотна характеристика, двигун внутрішнього згорання.

THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ESTABLISHED DYNAMIC PROCESSES IN NONLINEAR MODELS OF MACHINE AGGREGATES

Annotation. For investigation of steady-state dynamic processes in non-linear models of machine aggregates it is offered to use integro-differential equations of movement that are presented by pulse-frequency characteristics of linearized models: the number of the nonlinear equations is equal to the number of nonlinearities. Laboriousness of the task's solution virtually doesn't depend on system's number of degrees of freedom that is essential to the numerical algorithms of the solution of the nonlinear tasks which have iterative character during a solution of problems of synthesis and optimization.

The decision algorithm of nonlinear integro-differential equations is based on the iteration Newton-Kantorovich method for resolving of operator equations. During the numerical implementation of the algorithm for resolving of linear integro-differential equations on every step of iteration process the method of quadrature formulas in pair with the idea of interpolation of a desired solution are used. The method of quadrature formulas is the most universal method for resolving of integral equations with constant limits. The usage of interpolation is important because of the following reasons: presence of a kernel in a linear integro-differential equation with a smoothness that is essentially lower than decision's smoothness; impossibility of direct application of quadrature formulas; widening of convergence domain of iteration process. The method for assessment of solution's error is proposed.

The results of calculated researches regarding reducing of dynamic load in a machine aggregate of a transport engine are presented.

Key words: stable dynamic process, machine aggregate, nonlinear integro-differential equation, pulse-frequency characteristic, explosion engine aggregate.