

Лавінський Д. В.

Морачковський О. К.

*Національний технічний
університет
"Харківський
політехнічний
інститут"*

Lavinskii D. V.

Morachkovskii O. K.

*National Technical
University "KhPI"*

УДК 539.3

**ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНЕ
ДЕФОРМУВАННЯ СКЛАДЕНИХ
КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ДІЇ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ**

У статті запропоновано ефективний метод аналізу пружно-пластичного деформування складених конструкцій під дією електромагнітного поля. Розглянуто загальну математичну постановку зв'язаної задачі деформування електропровідних тіл при наявності електромагнітного поля. Для побудови методу чисельного розв'язку вихідна задача зведена до пошуку мінімуму повної енергії системи. В якості чисельного методу розв'язання використовується метод скінчених елементів. Запропонований метод застосований для аналізу деформування системи „індуктор–заготовка” технологічної операції магнітно-імпульсної обробки металів. Представлені деякі результати, які дозволяють робити певні рекомендації щодо проектування та застосування технологічних операцій подібного класу.

Ключові слова: пружно-пластичне деформування, електромагнітне поле, метод скінчених елементів, магнітно-імпульсна обробка.

Вступ. Енергія електромагнітного поля (ЕМП) використовується для великої кількості технологічних операцій. Силовий вплив ЕМП на оброблювану заготовку використовується під час магнітно-імпульсної обробки матеріалів (МІОМ). У даному випадку дії електромагнітних сил піддається не лише заготовка а й інструмент – індуктор. Збільшення величин електромагнітних сил призводить до більш інтенсивного деформування як заготовки так і індуктора, що може призводити до втрати працездатності останнім. Тому, створення

ефективних методів аналізу пружно-пластичного деформування елементів технологічних систем МІОМ та подальшого розрахункового оцінювання міцності є актуальною науково-практичною проблемою.

Математична постановка задачі. Розподіл векторних компонент ЕМП у і електропровідному тілі описується системою фундаментальних рівнянь Максвелла, які доповнюються матеріальними залежностями та граничними умовами:

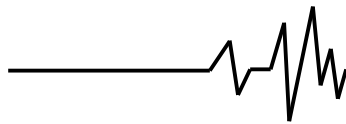
$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_c \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0; \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \vec{j} = \gamma_c \vec{E} + \gamma_c [\dot{\vec{u}} \times \vec{B}] \quad (1)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}; \vec{B} = \mu_c \vec{H}; \vec{E}_\Gamma \times \vec{n} = 0; \vec{D}_\Gamma \cdot \vec{n} = 0; \vec{H}_\Gamma \times \vec{n} = 0; \vec{B}_\Gamma \cdot \vec{n} = 0, \quad (2)$$

де $\vec{H}, \vec{E}, \vec{H}_\Gamma, \vec{E}_\Gamma$ – вектори напруженості магнітного та електричного полів у об'ємі тіла та на границі (Γ) тіла; $\vec{D}, \vec{B}, \vec{D}_\Gamma, \vec{B}_\Gamma$ – вектори електричної та магнітної індукції у об'ємі тіла та на границі (Γ) тіла; $\varepsilon_c, \mu_c, \gamma$ – електрична та магнітна проникність, та електрична провідність

матеріалу; \vec{j} – вектор густини сили струму; \vec{n} – вектор нормалі до границі тіла.

Розподіл компонент тензорів напружень $\vec{\sigma}$ та деформацій $\vec{\varepsilon}$, а також вектора переміщень \vec{u} піддається системі рівнянь, яка містить диференціальні рівняння рівноваги, геометричні залежності, матеріальні залежності стану та граничні умови:



$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f} = 0; \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T]; \bar{\varepsilon} = {}^{(4)}\bar{S} \cdot \vec{\sigma}; \\ \vec{\sigma}_n = \vec{p} + \frac{\Xi}{2} \vec{E}_\Gamma + \frac{\mu_c}{2} (\Xi \dot{\vec{u}} \times \vec{n} + \vec{i}) \times H_\Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

де ρ – густина матеріалу; \vec{f} – вектор інтенсивності об'ємних сил (у випадку врахування електромагнітних сил $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$); ${}^{(4)}\bar{S}$ – тензор відповідності 4-го рангу, який у випадку пружного деформування має вигляд

відповідно до лінійного закону Гука; \vec{p} – поверхневе навантаження; Ξ, \vec{i} – густина поверхневих зарядів та струмів. При розгляді пружно-пластичного деформування поведінка матеріалу розглядається у інкрементальній формі (4) разом із умовою пластичності (5):

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left(d\vec{\sigma} - \frac{3\nu}{1+\nu} d\vec{\sigma}_0 \vec{I} \right) + \frac{3}{2} d\varepsilon_i^p \frac{\vec{s} - \vec{\beta}}{\sigma_i}; \quad \beta = \frac{2}{3} \frac{EE_h}{E - E_h} \bar{\varepsilon}^p; \\ \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}((\vec{s} - \vec{\beta})^2)} - \sigma_T = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де σ_i – інтенсивність напружень; \vec{I} – одиничний тензор; $\vec{\sigma}_0$ – кульовий тензор напружень; \vec{s} – девіатор напружень; $\bar{\varepsilon}^p$ – тензор деформацій пластичності; ε_i^p – інтенсивність пластичних деформацій; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; σ_T – межа текучості; E_h – модуль зміцнення.

зменшення кількості рівнянь, які описують розподіл ЕМП, вводимо у розгляд векторний магнітний потенціал, який зв'язаний із основними векторними компонентами ЕМП наступними чином:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_c \vec{j}, \quad (7)$$

де \vec{A} – векторний магнітний потенціал. Рівняння (7) записані для випадку нехтування нелінійною «магнітною» поведінкою матеріалу та без врахування «електричної» складової ЕМП, бо для аналізу деформування електропровідних тіл її внесок є неістотним. Вираз повної енергії має наступний вигляд:

$$E = U + W, \quad (8)$$

де U – енергія квазіпружного деформування; W – енергія ЕМП (при нехтуванні електричною складовою).

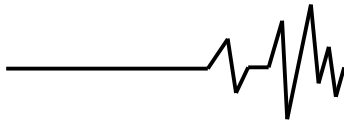
Аналіз пружно-пластичного деформування систем електропровідних тіл складної геометрії потребує використання чисельних методів. До найбільш універсальних методів відноситься метод скінчених елементів (МСЕ). МСЕ дозволяє у рамках єдиної розрахункової схеми розглядати розподіл векторних компонент електромагнітного поля (ЕМП) та тензорних компонент процесу деформування. Конкретна реалізація МСЕ у даному випадку спирається на варіаційний принцип стаціонарності повної енергії системи електропровідних тіл. По-перше, для

$$U = \frac{1}{2} \int_V \bar{\varepsilon} \cdot {}^{(4)}C \cdot \bar{\varepsilon} dV - \int_V (\vec{j} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} dV - \int_{A_p} \left(\vec{p} + \frac{1}{2} \vec{i} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{u} dA; \quad (9)$$

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2} |\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2 - \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV, \quad (10)$$

де $\bar{\varepsilon}$ – тензор деформацій; ${}^{(4)}C$ – тензор коефіцієнтів пружності; \vec{u} – вектор переміщень;

\vec{p} – поверхневе навантаження; \vec{i} – густина поверхневого струму.



Розв'язок повинен задовольняти наступному варіаційному рівнянню:

$$\delta E = \delta U + \delta W = 0. \quad (11)$$

Рівність (5) призводить у підсумку до розв'язання двох незалежних систем алгебраїчних рівнянь відносно вузлових переміщень та вузлових значень векторного магнітного потенціалу. У випадку пластичного деформування повинен розглядатись ітераційний процес, особливості якого розглянуті у статті [1].

Приклад розрахунку. Застосуємо даний метод для аналізу деформування системи електропровідних тіл за умов технологічної операції МІОМ. Розглянемо технологічну операцію, спрямовану на притягнення тонких металевих заготовок, практичним спрямуванням цієї операції є виправлення дефектів корпусних

елементів транспортної техніки. Зазначимо, що особливості конструкційних рішень для технологічних систем диктуються властивостями матеріалів, які оброблюються. Так якщо заготовка виконана з феромагнітних матеріалів, то допустимим є застосування масивних одновиткових індукторів, ці питання докладно висвітлені у монографії [2]. У роботах [1,3,4] наведено постановку задачі та аналіз пружно-пластичного деформування одновиткового індуктора та заготовки.

У роботах [5,6] показано, що для притягнення заготовок з не феромагнітних матеріалів можна використовувати індуктор із допоміжним екраном. На рис.1 наведено модельний варіант одновиткового індуктора із допоміжним екраном.

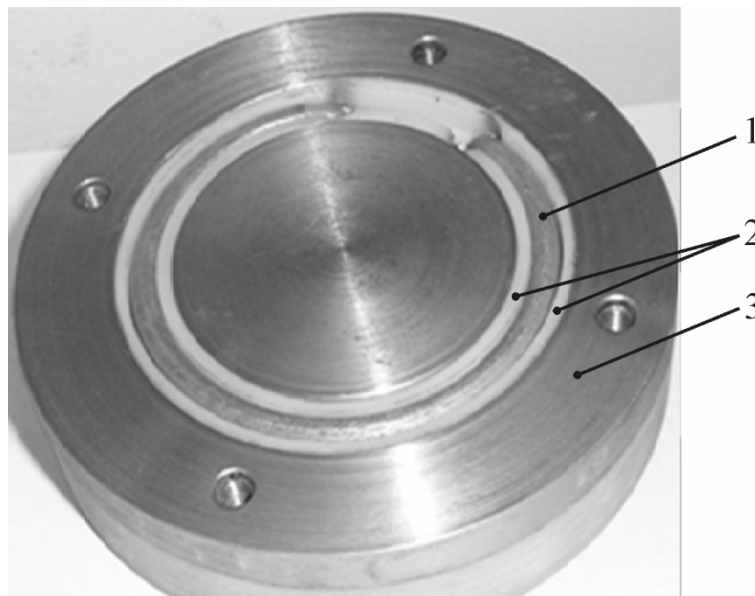


Рис. 1. Одновитковий індуктор із допоміжним екраном. 1 – струмопровід індуктора, 2 – ізоляція струмопровіда, 3 – допоміжний екран

Проаналізуємо пружно-пластичне деформування індуктора із заготовкою в рамках вісесиметричної розрахункової схеми, наведеної на рис.2. Розрахункова схема містить окрім елементів технологічної системи та заготовки також оточуюче середовище (повітря). Зазор, що розглядається поміж індуктором та заготовкою, повинен імітувати наявність вм'ятини (дефекту) на заготовці. Геометричні параметри системи є наступними:

$R_1 = 150 \text{ mm}$, $R_2 = 167 \text{ mm}$, $R_3 = 175 \text{ mm}$,
 $R_4 = 200 \text{ mm}$, $h_1 = 10 \text{ mm}$, $h_2 = 15 \text{ mm}$,
 $h_3 = 1 \text{ mm}$, $d = 1 \text{ mm}$, товщина ізоляції струмопроводу – 1 mm . Розміри оточуючого

середовища варіювались із метою досягнення умов згасання компонентів ЕМП на віддалені від джерела поля. У даному випадку виявилось, що для зменшення компонентів ЕМП у 5 разів, достатньо обирати розміри оточуючого середовища рівними подвійній товщині індуктора h_2 . Джерелом ЕМП обирався струм, що був рівномірно розподіленим по перерізу струмопроводу, у часі густина струму змінювалась за законом:

$j(t) = I_m e^{-\delta 2\pi f t} \cdot \sin(2\pi f t)$, де амплітуда сили струму $I_m = 40 \text{ kA}$, частота $f = 2 \text{ kHz}$, відносний коефіцієнт згасання $\delta = 0.3$.

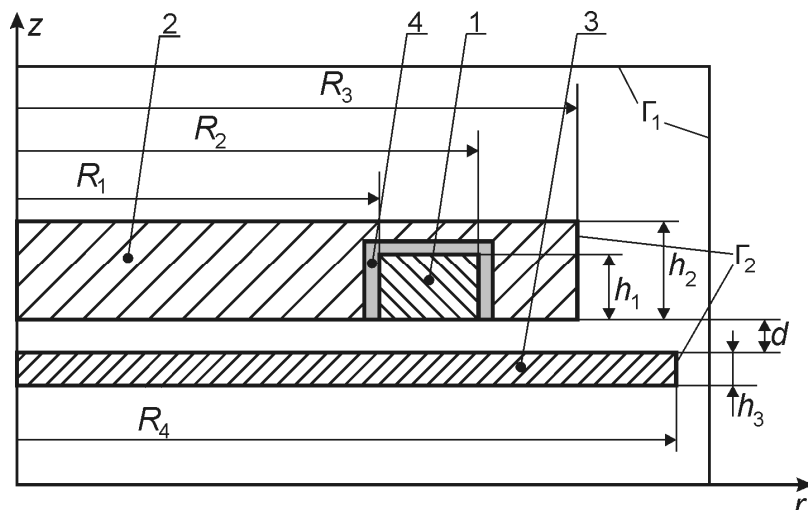
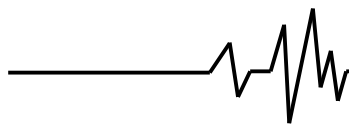


Рис. 2. Розрахункова схема індуктора разом із заготовкою. 1 – струмопровід індуктора, 2 – допоміжний екран, 3 – заготовка, 4 – ізоляція струмопроводу

Скінчено-елементна модель була створена із застосуванням чотирьох-вузлового скінченного елемента із білінійною апроксимацією переміщень та окружної компоненти векторного магнітного потенціалу

[7,8]. Використання скінченного елемента даного типу дозволяє автоматично задовольняти умовам на границях розділу середовищ із різними електрофізичними властивостями

Таблиця 1

Фізико-механічні параметри елементів системи

	струмопровід, мідь	Допоміжний екран, сталь	заготовка, сталь	ізоляція, капролон	повітря
μ_r	1	1	1	1	1
$\gamma, (\Omega\text{m})^{-1}$	7×10^7	0.2×10^7	0.2×10^7	0	0
E , ГПа	180	215	200	2.5	–
ν	0.33	0.27	0.29	0.3	–
σ_T , МПа	200	270	220	–	–
σ_B^+ , МПа	–	–	–	70	–
σ_B^- , МПа	–	–	–	90	–

Розв'язання було проведене для нульових початкових умов, граничні умови відображали затухання ЕМП на віддаленні від джерела, а також закріплення торців індуктора та заготовки:

$$A|_{\Gamma_1} = 0; \quad u_r|_{\Gamma_2} = 0; \quad u_z|_{\Gamma_2} = 0. \quad (12)$$

На першому етапі розв'язання були одержані просторово-часові розподіли векторних компонент ЕМП та компонент електромагнітної сили уздовж поверхні заготовки. Максимальні значення нормальної компоненти електромагнітної сили спостерігаються у околі витка індуктора.

Далі розглянемо сумісне деформування індуктора та заготовки, результати надані для часового максимуму. На рис. 3 наведений деформований стан системи, видно, що переміщення заготовки значно перевищують

переміщення індуктора. Максимальні значення переміщень заготовки спостерігаються в околі її центру. На рис. 4 наведено розподіл інтенсивності напружень у індукторі та заготівці. Максимальні значення інтенсивності напружень у заготівці спостерігаються в околі торцевої зони, що обумовлюється заданими там умовами закріплення. «Другий» максимум спостерігається у центрі, що обумовлене максимальними переміщеннями у цій зоні. Відзначимо, що максимальні значення інтенсивності напружень у заготівці не досягають межі текучості, тобто незворотна формозміна за даних умов не досягається. У індукторі максимальна інтенсивність спостерігається в околі витка, причому її значення майже досягають межі текучості міді та межі міцності на розтяг для капролону.

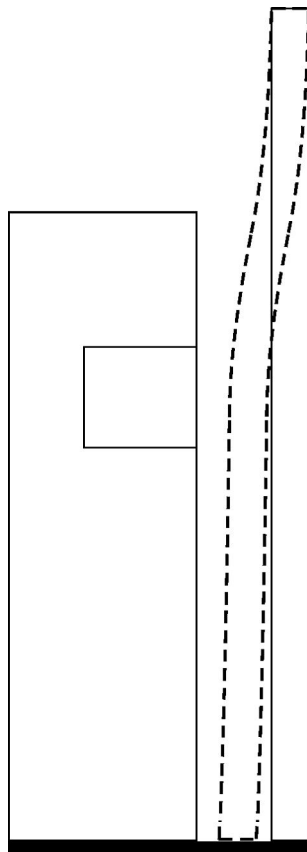
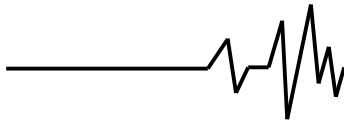


Рис. 3. Деформированное состояние индуктора и заготовки. Сплошная линия – исходное состояние, штриховая линия – деформированное состояние

Таким чином, за розглянутих умов ціль технологічної операції не досягається. При збільшенні величини сили струму будуть збільшуватись і величин напружень, при цьому інтенсивність напружень досягне опарних значень спершу у індукторі. Для досягнення цілій технологічної операції можна використовувати багатовитковий варіант індуктора.

Висновки: у статті сформульовано актуальну науково-практичну проблему пружно-пластичного деформування елементів конструкцій при дії електромагнітного поля, представлено математичну постановку задачі та наведено приклад розв'язку.

Список використаних джерел

1. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 27 (12), 1-13 (2015).

2. Туренко А.Н. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Т. 3: Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными

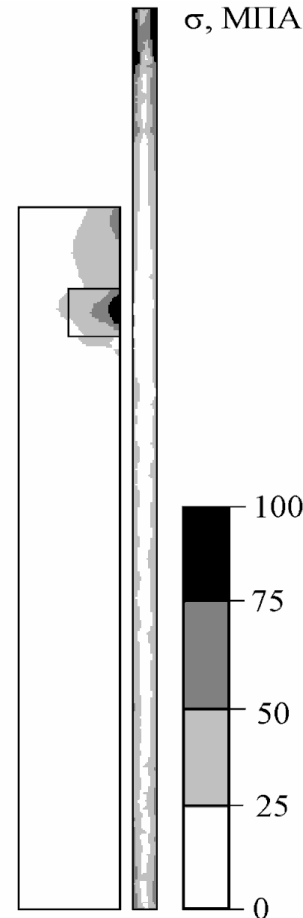


Рис. 4. Интенсивность напряжений в индукторе и заготовке

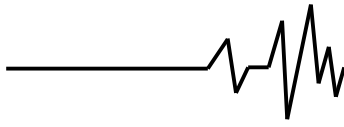
магнитными полями: Монография / Туренко А.Н., Батыгин Ю.В., Гнатов А.В. – Харьков: ХНАДУ, 2009. – 240 с.

3. Лавінський Д. В. Нестационарне деформування елементів конструкцій під дією електромагнітного поля / Д. В. Лавінський, О. К. Морачковський // *Вібрації в техніці та технологіях*. – 2014. – № 4 (76). – С. 19-23.

4. Лавінський Д. В. Пружно-пластичне деформування систем тіл при дії електромагнітних полів / Д. В. Лавінський, О. К. Морачковський // *Вісник Запорізького національного університету* : зб. нак. ст. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя : ЗНУ, 2015. – № 2. – С. 125-135.

5. Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology*. 214 (2), 390-401 (2014)

6. Yuri V. Batygin, Sergey F. Golovashchenko, Andrey V. Gnatov, Evgeniy A. Chaplygin Pulsed Electromagnetic Attraction Processes for Sheet Metal Components. *High speed forming 2014, proceedings of the 6th International conference, May 26–29, 2014 Daejeon, Korea*, 253-260.



7. Cazzani, A., Atluri, S.N.: Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes. *Comput. Mech.* 11 (4), 229–251 (1993).

8. Cazzani, A., Garusi, E., Tralli, A., Atluri, S.N.: A four-node hybrid as-sumed-strain finite element for laminated composite plates. *CMC Comput. Mater. Contin.* 2 (1), 23–38 (2005).

Список джерел у транслітерації

1. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* 27 (12), 1-13 (2015).

2. Turenko A.N. Impulsnyye magnitnyye polya dlya progressivnykh tekhnologiy. – Т. 3: Teoriya i eksperiment prityazheniya tonkostennykh metallov impul'snym magnitnymi polyami: Monografiya / Turenko A.N., Batygin Yu.V., Gnatov A.V. – Kharkov: KHNADU, 2009. – 240 s.

3. Lavinskiy D. V. Nestatsionarne deformuvannya elementiv konstruktsiy pid diyeyu elektromagnitnoho polya / D. V. Lavinskiy, O. K. Morachkovskiy // *Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh.* – 2014. – № 4 (76). – S. 19–23.

4. Lavinskiy D. V. pruzhnoyu-plastychnye deformuvannya system til pry Diyi elektromagnitnikh poliv / D. V. Lavinskiy, O. K. Morachkovskiy // *Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu: zb. nak. st. Fyzyko-matematychni nauky.* – Zaporizhzhya: ZNU, 2015. – № 2. – S. 125–135.

5. Batygin Y. V., Golovashchenko S. F., Gnatov A. V. Pulsed electromagnetic attraction of nonmagnetic sheet metals. *Journal of Materials Processing Technology.* 214 (2), 390-401 (2014)

6. Yuri V. Batygin, Sergey F. Golovashchenko, Andrey V. Gnatov, Evgeniy A. Chaplygin Pulsed Electromagnetic Attraction Processes for Sheet Metal Components. High speed forming 2014, proceedings of the 6th International conference, May 26–29, 2014 Daejeon, Korea, 253-260.

7. Cazzani, A., Atluri, S.N.: Four-noded mixed finite elements, using unsymmetric stresses, for linear analysis of membranes. *Comput. Mech.* 11 (4), 229–251 (1993).

8. Cazzani, A., Garusi, E., Tralli, A., Atluri, S.N.: A four-node hybrid as-sumed-strain finite element for laminated composite plates. *CMC Comput. Mater. Contin.* 2 (1), 23–38 (2005).

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Аннотация. В статье предложен эффективный метод анализа упруго-

пластического деформирования элементов конструкций под действием электромагнитного поля. Рассмотрена общая математическая постановка связанной задачи деформирования электропроводных тел при наличии электромагнитного поля. Для построения численного решения исходная задача сводится к поиску минимума полной энергии системы. В качестве численного метода решения используется метод конечных элементов. Предложенный метод использован для анализа деформирования системы «индуктор–заготовка» технологической операции магнитно-импульсной обработки металлов. Представлены некоторые результаты, позволяющие давать определенные рекомендации для разработки и использования технологических операций подобного класса.

Ключевые слова: упруго-пластическое деформирование, электромагнитное, метод конечных элементов, магнитно-импульсная обработка.

INELASTIC DEFORMATION OF COMPOSED STRUCTURES UNDER THE ACTION OF ELECTROMAGNETIC FIELD

Annotation. A large number of technical and technological facilities work under the action of electromagnetic fields. In electroconductive bodies have significant largest electromagnetic forces that can cause movement or deformation of structural elements. The creation of effective methods of analysis of the distribution of the electromagnetic field and coupled inelastic deformation of structural elements is topical at present time. The article contains a mathematical formulation of the problem of inelastic deformation of structural elements under the action of electromagnetic fields. Coupling of electromagnetic field and mechanical field is carried out with the help of local electromagnetic forces. Further made the transition to a variational formulation on the basis of the task of finding the minimum of the total energy of the system, which includes the energy of the electromagnetic field. For the numerical solution the finite element method is used. Nodal unknowns in this case are the magnetic vector potential and displacements. The proposed method is applied to non-stationary deformation of the "inductor-billet" technological operation of magnetic-pulse processing of metals. Some results of the deformation are presented.

Key words: non-stationary deformation, electromagnetic field, the finite element method, magnetic-pulse processing.