

Беломятцев А. С.

Дружинин Е. И.

Морачковский О. К.

*Национальный
технический
университет
«Харьковский
политехнический
институт»*

Billomyttcev A. S.

Druzhynin E. I.

Morachkovsky O. K.

*National Technical
University "KhPI"*

УДК 518:517.9

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

В статье представлены два метода расчета колебаний нелинейных систем, один из которых позволяет «проходить» особые точки частотных кривых, используя прием инвертирования дифференциальных уравнений, а другой позволяет параллельно с нахождением решений неавтономного векторно-матричного дифференциального уравнения, оценивать их устойчивость по Ляпунову, а также производить анализ бифуркаций, исчисляя мультипликаторы уравнения в вариациях. Рассмотренные в статье методы могут быть полезны при решении прикладных задач из различных областей техники.

Ключевые слова: нелинейные системы, численные методы, точки бифуркации, мультипликаторы, устойчивость по Ляпунову.

Постановка проблемы. Во многих силовых установках вынужденные нелинейные колебания являются причиной усталостных разрушений элементов конструкций и требуют специального расчетного исследования. Особенно актуальна задача расчета таких колебаний в установках, содержащих мощный источник возбуждения в виде двигателя внутреннего сгорания, что характерно для колесных и гусеничных транспортных машин, сельскохозяйственной техники, судовых и тепловозных установок. Кроме того, при изучении колебательных процессов в системах, подверженных действию периодических возмущающих сил, исследователя обычно интересует функциональная зависимость некоторых параметров, характеризующих колебательный процесс, от частоты возмущающего воздействия. Эти зависимости могут быть неоднозначны и иметь точки ветвления. Определение последних представляет особый интерес, так как в этих точках берут начало или заканчиваются отдельные ветви решений. Исследование устойчивости режима функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Таким образом, анализ и исследования вынужденных колебаний в нелинейных системах является актуальной проблемой, которая имеет важное практическое значение.

Цель исследований. Разработка, совершенствование и использование численных методов расчета нелинейных

систем, позволяющих производить эффективный анализ протекающих в них колебательных процессов.

Метод инвариантного погружения. Этот метод нашел широкое применение для решения различных функциональных уравнений [2,4,5,7], а также при решении задач определения периодических режимов в нелинейных системах при изменении частоты возмущающего воздействия. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$I\ddot{x} + B\dot{x} + Cx + f(\gamma, \omega, \dot{x}, x) = \mu(\gamma, \omega), (1)$$

где $x, f, \mu \in R^k$, I, B, C постоянные $k \times k$ матрицы, μ и $f - 2\pi$ – периодические функции параметра $\gamma = \omega t$, ω – частота возмущающего воздействия, t – время. Рассмотрим далее усеченные ряды Фурье

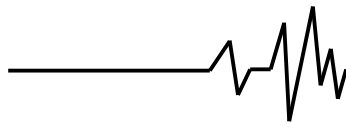
$$x_i = X_{i0} + \sum_{v=1}^n (X_{iCv} \cos v\gamma + Y_{iSv} \sin v\gamma),$$

$$f_i = F_{i0} + \sum_{v=1}^n (F_{iCv} \cos v\gamma + F_{iSv} \sin v\gamma),$$

$$\mu_i = M_{i0} + \sum_{v=1}^n (M_{iCv} \cos v\gamma + M_{iSv} \sin v\gamma), \quad i = \overline{1, k} \quad (2)$$

и введем соответствующие векторы коэффициентов гармоник

$X_{i\Gamma}, F_{i\Gamma}, M_{i\Gamma}, i = \overline{1, k}$, элементами которых



являются коэффициенты рядов (2). Рассмотрим сетку из m равноудаленных узлов

$$\gamma_i = 2\pi(i-1)/m, i = \overline{1, m}, m > 4n \quad \text{и}$$

введем следующие векторы значений:

$$x_{ic} = (x_i(\gamma_1), x_i(\gamma_2), \dots, x_i(\gamma_m))^T,$$

$$f_{ic} = (f_i(\gamma_1), f_i(\gamma_2), \dots, f_i(\gamma_m))^T,$$

$$\mu_{ic} = (\mu_i(\gamma_1), \mu_i(\gamma_2), \dots, \mu_i(\gamma_m))^T, i = \overline{1, k}.$$

Обозначим $X_\Gamma, F_\Gamma, M_\Gamma$ векторы размерности $k(2n+1)$, элементами которых являются соответственно векторы $X_{i\Gamma}, F_{i\Gamma}, M_{i\Gamma}$. Тогда система уравнений метода гармонического баланса для (1) запишется аналогично [1] следующим образом

$$-\omega^2 I_D X_\Gamma + \omega B_D X_\Gamma + C_E X_\Gamma + F_\Gamma(\omega, X'_\Gamma(\omega), X_\Gamma(\omega)) = M_\Gamma(\omega), \quad (3)$$

где I_D, B_D, C_E — блочные матрицы размерности $(2n+1)k \times (2n+1)k$:

$$I_D = \{I_{ij} D^{(2)}\}_{i,j=1}^k, B_D = \{B_{ij} D^{(1)}\}_{i,j=1}^k,$$

$$C_E = \{C_{ij} E\}_{i,j=1}^k,$$

где I_{ij}, B_{ij}, C_{ij} — элементы матриц I, B, C ; X'_Γ — вектор коэффициентов гармоник усеченного ряда Фурье функции \dot{x} ; E — единичная матрица размерности $(2n+1) \times (2n+1)$;

$$D^{(1)} = \text{diag}\left(0, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix}\right), \quad D^{(2)} = \text{diag}(0, 1, 1, 4, 4, \dots, n^2, n^2).$$

Дифференцируя систему (3) по параметру ω , получим:

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 I_D + \omega B_D + C_E + \frac{\partial F_\Gamma}{\partial X_\Gamma} + \omega \frac{\partial F_\Gamma}{\partial X'_\Gamma} D^1 \right) \frac{dX_\Gamma}{d\omega} = \\ & = \left(2\omega I_D - B_D - \frac{\partial F_\Gamma}{\partial X'_\Gamma} D^1 \right) X_\Gamma - \frac{\partial F_\Gamma}{\partial \omega} + \frac{dM_\Gamma}{d\omega}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $D^1 = \text{diag}(D^{(1)}, D^{(1)}, \dots, D^{(1)})$, а каждый из k^2 блоков матриц Якоби $\frac{\partial F_\Gamma}{\partial X_\Gamma}$ и

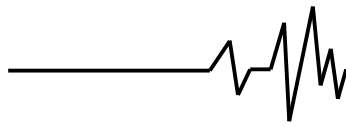
$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 I_D + \omega B_D + C_E + \frac{\partial F_\Gamma}{\partial X_\Gamma} \right) \frac{dX_\Gamma}{d\omega} = \\ & = (2\omega I_D - B_D) X_\Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

$\frac{\partial F_\Gamma}{\partial X'_\Gamma}$ и каждый из k элементов векторов $\frac{\partial F_\Gamma}{\partial \omega}$ и $\frac{dM_\Gamma}{d\omega}$ вычисляются следующим образом через введенные в [1] матрицы F и G :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{i\Gamma}}{\partial x_{j\Gamma}} &= G \frac{\partial f_{i\Gamma}}{\partial x_{jc}} F, \quad \frac{\partial F_{i\Gamma}}{\partial x'_{j\Gamma}} = G \frac{\partial f_{ic}}{\partial \dot{x}_{jc}} F, \\ \frac{\partial F_{i\Gamma}}{\partial \omega} &= G \frac{\partial f_{ic}}{\partial \omega}, \quad \frac{dM_{i\Gamma}}{d\omega} = G \frac{\partial \mu_{ic}}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Система (4) для отдельных частных случаев может быть упрощена, например, если $f = f(\gamma, x)$ и $\mu = \mu(\gamma)$, то имеем:

Для численного интегрирования систем (4) или (5) требуется определить начальные условия, представляющие собой значения коэффициентов гармоник периодического решения системы (1) при некотором значении частоты ω . Эта задача может быть решена с помощью любого численного метода, например, метода Ньютона. Если в некотором частотном диапазоне система (1) имеет несколько решений, то кривые $X_{i0}(\omega)$ и $X_{icv}(\omega), X_{isv}(\omega)$ в этой области многозначны. При прохождении особых точек кривых используется прием инвертирования дифференциальных уравнений (4) или (5) [6]. Отметим, что по классификации работы [9] описанный метод следует считать методом инвариантного погружения по правой части, а



по классификации работы [10] – методом дифференцирования по параметру.

Метод «пристрелки». Известно, что обычные дифференциальные уравнения, описывающие поведение нелинейных динамических систем, имеют четыре типа решений. Этим решениям соответствуют аттракторы системы в виде устойчивого равновесия, предельного цикла, квазипериодического аттрактора (Р-мерного тора) и хаотического или "странного аттрактора". С точки зрения механики и математики, анализ хаотических процессов в детерминированных нелинейных диссипативных системах является одной из фундаментальных проблем, которая интересует многих исследователей [8–12].

Рассмотрим систему с n степенями свободы, движение которой описывается неавтономным векторным дифференциальным уравнением в форме Коши

$$\dot{\vec{y}} = \vec{\Phi}(t, \vec{y}), \quad (6)$$

где \vec{y} – $2n$ -мерный вектор состояния, $\vec{\Phi}(t, \vec{y})$ – $2n$ -мерная вектор-функция, T_1 – периодическая по явно входящему времени t : $\vec{\Phi}(t, \vec{y}) = \vec{\Phi}(t + T_1, \vec{y})$.

Определение периодического решения дифференциального уравнения (6) эквивалентно нахождению неподвижной точки точечного отображения и может быть сведено к решению неявно заданного уравнения:

$$\vec{y}_T(\vec{y}_0) - \vec{y}_0 = \vec{0}, \quad (7)$$

где $\vec{y}_0 = \vec{y}(0), \vec{y}_T = \vec{y}(T)$ – векторы состояния системы в моменты времени $t = 0$ и $t = T$, период T равен или кратен периоду T_1 правой части уравнения (6): $T = rT_1$. Для решения уравнения (7) используется итерационный процесс метода Ньютона:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial \vec{y}_T}{\partial \vec{y}_0} \right)_v - E \right] \vec{z}^v &= \vec{y}_T(\vec{y}_0^v) - \vec{y}_0^v \\ \vec{y}_0^{v+1} &= \vec{y}_0^v - \vec{z}^v, v = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

который позволяет не только определять периодические решения уравнения (6), но и оценивать их устойчивость по Ляпунову. Для оценки устойчивости и анализа бифуркаций периодических колебаний исчисляются мультипликаторы λ_i уравнения в вариациях:

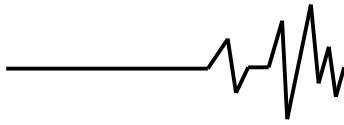
$$\dot{\vec{x}} = \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{y}} \right)_{\vec{y}=\vec{\xi}(t)} \cdot \vec{x}, \quad (9)$$

где $\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{y}} \right)_{\vec{y}=\vec{\xi}(t)}$ – матрица Якоби, которая исчисляется на периодическом решении $\vec{y} = \vec{\xi}(t)$. Таким образом, (9) содержит периодические коэффициенты и исследование устойчивости его тривиального решения, эквивалентно исследованию устойчивости периодического решения $\vec{y} = \vec{\xi}(t)$ уравнения (6) и проводится согласно теории Флоке [13]. Мультипликаторы λ_i являются корнями уравнения $\det[\Phi(T) - \lambda E] = 0$, где $\Phi(T)$ – матрица монодромии, равная матрицанту (9) при $t = T$.

Наибольший интерес представляют бифуркации, при которых периодические решения теряют устойчивость, так как в соответствующих бифуркационных точках качественно меняется структура возможных устойчивых движений нелинейной системы. При построении АЧХ системы изменение частоты возмущающих действия приводит к изменению мультипликаторов уравнения в вариациях, в результате чего мультипликаторы движутся вдоль определенных траекторий. Анализ этих траекторий позволяет сделать выводы относительно устойчивости периодических колебаний и их возможных бифуркаций в точках потери устойчивости. Периодическое решение уравнения (6) $y = \xi(t)$ является асимптотически устойчивым, если спектральный радиус уравнения в вариациях (9)

$$\rho = \max_i |\lambda_i| < 1, \quad (10)$$

таким образом, потеря устойчивости связана с выходом одного или пары мультипликаторов из круга единичного радиуса. Этот выход может осуществляться тремя способами: 1) появляется действительный мультипликатор $\lambda_i < -1$; 2) появляется действительный мультипликатор $\lambda_i > 1$; 3) появляется пара комплексно сопряженных мультипликаторов $|\lambda_i| = |\lambda_{i+1}| > 1$. В первом случае происходит бифуркация удвоения периода: в точке потери



устойчивости T – периодического решения рождаются 2 ветви $2T$ – периодических устойчивых решений. Вторая бифуркация характерна для так называемой точки поворота, в которой кривая зависимости периодического решения от параметра "поворачивает" в противоположную сторону, становясь многозначной. Для расчета периодических колебаний в окрестности такой точки удобно использовать алгоритм инвертирования краевой задачи [8]. Третья бифуркация приводит к рождению почти периодических колебаний.

Примеры расчетов. Особенности метода инвариантного погружения проиллюстрируем на примере определения периодических решений нелинейного дифференциального уравнения

$$I\ddot{\vartheta} + \beta\dot{\vartheta} + f(\vartheta) = M \sin \omega t, \quad (11)$$

описывающего крутильные колебания участка валопровода двигателя (рис.1).

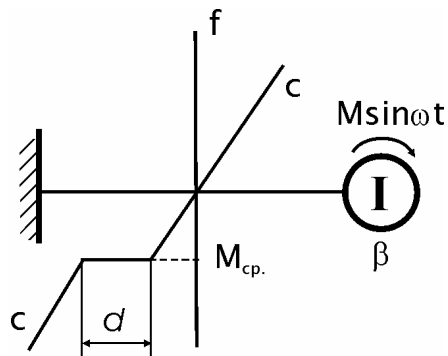


Рис. 1. Схема валопровода двигателя

Параметры системы имеют значения: момент инерции $I = 0.26 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, жесткость участка $C = 7.056 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}$, коэффициент демпфирования $\beta = 9.8 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, амплитуда возмущающего гармонического момента $M = 637 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Нелинейность упругой характеристики участка валопровода вызвана учетом зазора в шлицевом соединении ($d = 0.015 \text{ рад}$), а ее несимметричность, – средним моментом $M_{cp} = 980 \text{ Н} \cdot \text{м}$, передаваемым этим участком.

Для численного интегрирования системы (5), записанной для уравнения (11), был определен вектор X_{Γ} , соответствующий периодическому решению уравнения (11) при частоте $\omega = 600 \text{ рад/с}$. На этой частоте нелинейные свойства системы не проявляются, так как "не раскрывается" зазор, поэтому решение было определено аналитически. Дальнейшее интегрирование системы (5) проводилось в соответствии со специальной процедурой численного интегрирования, использующей инвертирование системы и автоматический выбор шага по методу Рунге-Кутты в модификации Мерсона [3].

На рис.2 показаны зависимости коэффициентов первой гармоники периодического решения X_{s1}, X_{c1} от частоты ω (рад/с) возмущающего воздействия.

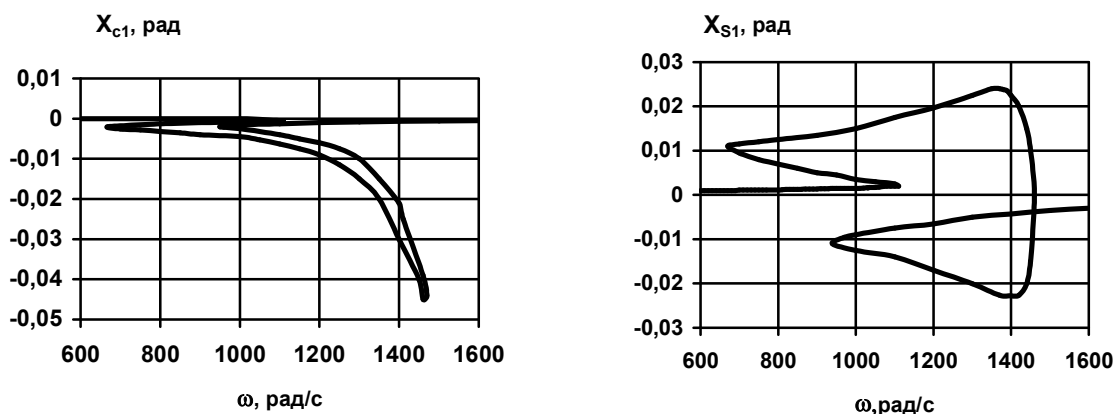
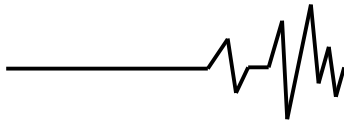


Рис. 2. Коэффициенты первой гармоники периодического решения

Точность определения периодических решений зависит от учитываемого числа гармоник в рядах (2) и от задаваемой погрешности на шаге численного интегрирования. Как показали расчеты, при

определении основных колебаний учет большого числа гармоник и обеспечение малой погрешности на шаге интегрирования не эффективны, т. к. ведут к резкому увеличению объема вычислений. В рассмотренном примере



количество гармоник выбиралось $n = 3$ и абсолютная погрешность на шаге интегрирования $1 \cdot 10^{-6}$ для каждой компоненты вектора X_{Γ} . Уменьшение абсолютной погрешности до $1 \cdot 10^{-7}$ привело к уменьшению «скорости движения» по интегральной кривой на 30%, а увеличение числа гармоник до $n = 5$ уменьшило «скорость движения» в три раза.

Особенности метода «пристрелки» проиллюстрируем на примере расчета вынужденных колебаний модели привода распределительного вала топливных насосов дизеля с антивибратором (рис.3).

Здесь как и ранее, нелинейность упругой характеристики $f_1(\varphi_1)$ вызвана наличием зазора в зубчатой передаче, а её несимметричность объясняется передаваемым средним моментом. На рис. 4 приведена

амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы в области первого основного резонанса.

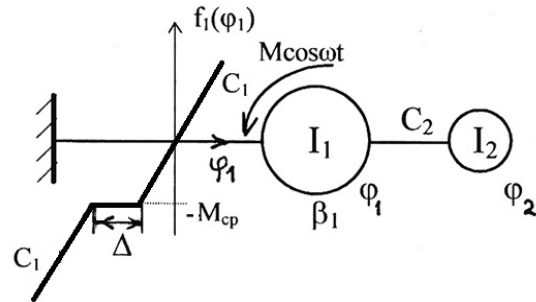


Рис. 3. Механическая модель.

Безразмерные параметры системы:

$$C_1 = 6.73; C_2 = 0.672; I_1 = 0.056; I_2 = 0.0187;$$

$$M_{cp.} = 0.045; \Delta = 0.05236;$$

$$\beta_1 = 0.08; M = 0.085$$

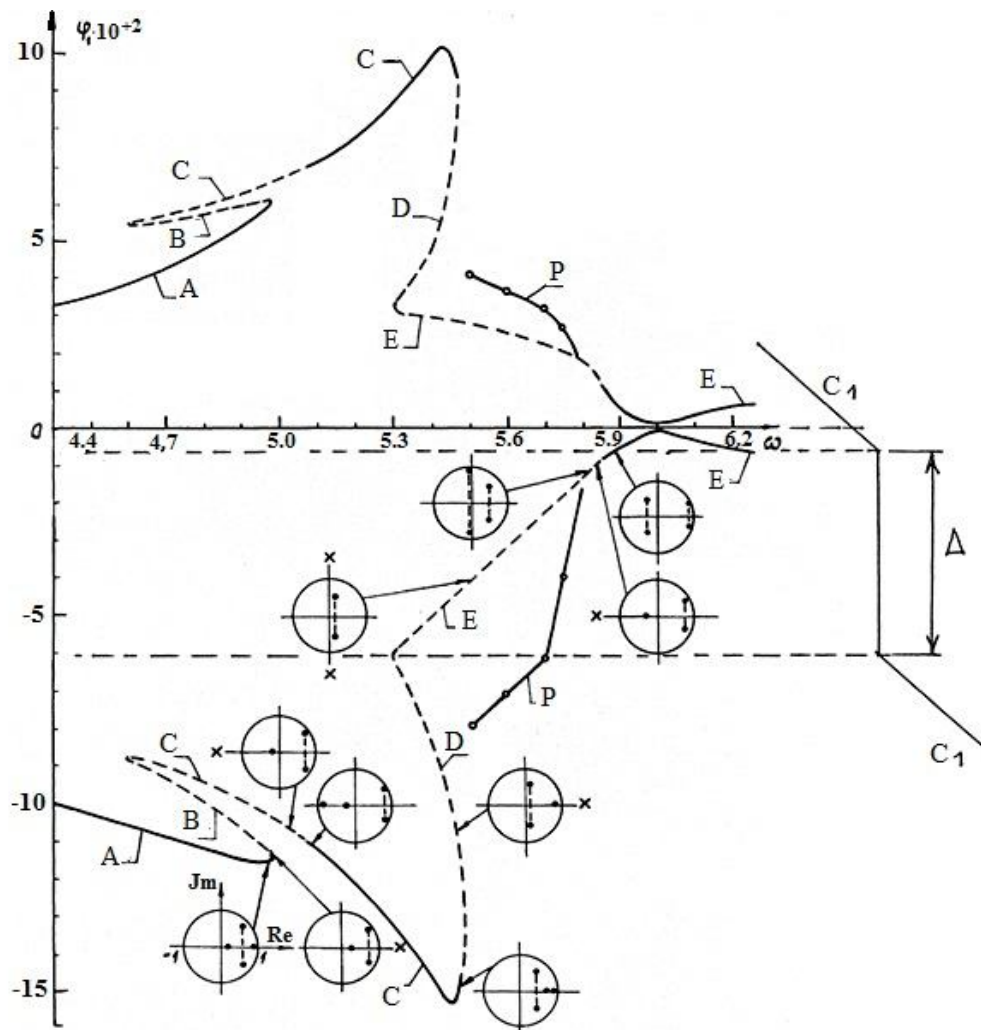
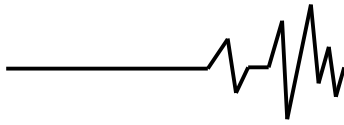


Рис. 4. АЧХ механической модели привода распределительного вала топливных насосов дизеля с антивибратором



Сплошная линия соответствует устойчивым периодическим режимам, период которых совпадает с периодом T_1 возмущающего воздействия, пунктиром изображаются ветви неустойчивых решений того же периода. Каждому T_1 -периодическому решению соответствуют 2 точки графиков, имеющие одинаковые абсциссы, и ординаты, равные максимальному и минимальному значениям угла Φ_1 закручивания нелинейного участка; отдельные ветви решений на обоих графиках обозначены одинаковыми буквами. Для отдельных точек АЧХ показано расположение мультипликаторов на комплексной плоскости, мультипликаторы, вышедшие из круга единичного радиуса, обозначены крестиком (x). Как видно из рис.4, в нескольких частотных интервалах отсутствуют T_1 – периодические устойчивые решения. Так потеря устойчивости T_1 – периодического решения на ветви C при $\Omega \in [5.03; 5.06]$

сопровождается появлением устойчивого $2T_1$ – периодического решения. Дальнейшее уменьшение частоты приводит к серии бифуркаций удвоения периода, при которых возникают устойчивые решения периода $4T_1$, $8T_1$, ..., $2^k T_1$. Закономерностью этого процесса является убывание в геометрической прогрессии интервалов изменения параметра ω , внутри которых система имеет устойчивые решения периода $2^k T_1$ [8], что приводит к образованию "странного аттрактора". "Странный аттрактор" представляет собой область фазового пространства, внутри которой колебания системы носят хаотический характер. Такой аттрактор был обнаружен при $\Omega = 4.9$, на рис. 5 он изображен на стробоскопической фазовой плоскости с помощью отображения сдвига по траектории U_{T_1} , рассматриваемый временной интервал равен $500 T_1$.

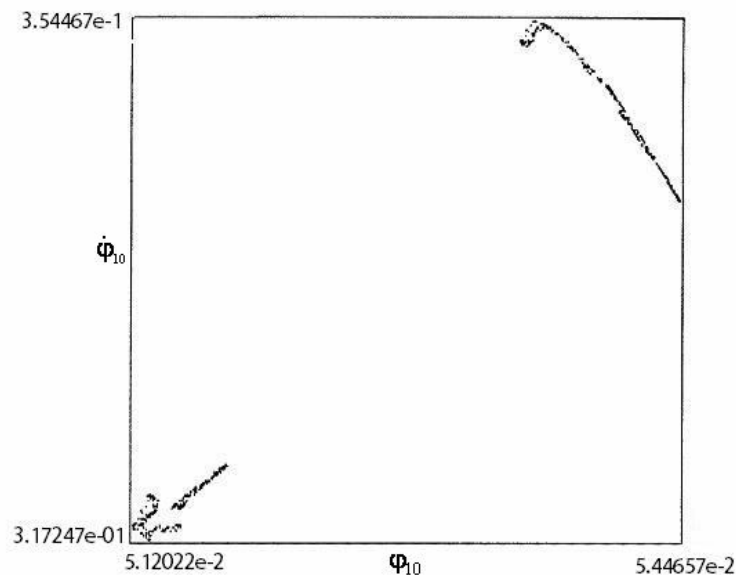
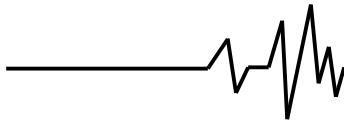


Рис. 5. Стробоскопическая фазовая плоскость

Обнаруженный "странный аттрактор" имеет достаточно большую область притяжения, к нему приводят переходные процессы с нулевыми начальными условиями и начальными условиями, соответствующими неустойчивому решению на ветви C . В то же время переходный процесс с начальными условиями, соответствующими ветви B ,

приводит к устойчивому T_1 – периодическому решению на ветви A . Потеря устойчивости T_1 – периодического решения на ветви E при $\Omega \in [5.79; 5.8]$ сопровождается появлением пары комплексно сопряженных мультипликаторов, больших единицы по



модулю. Возникаючому при этом почти периодическому режиму на стробоскопической фазовой плоскости соответствует предельный цикл. На рис.6 показан переходный процесс,

начинающийся из точки, соответствующей неустойчивому периодическому решению (в центре рисунка), и сходящийся к предельному циклу.

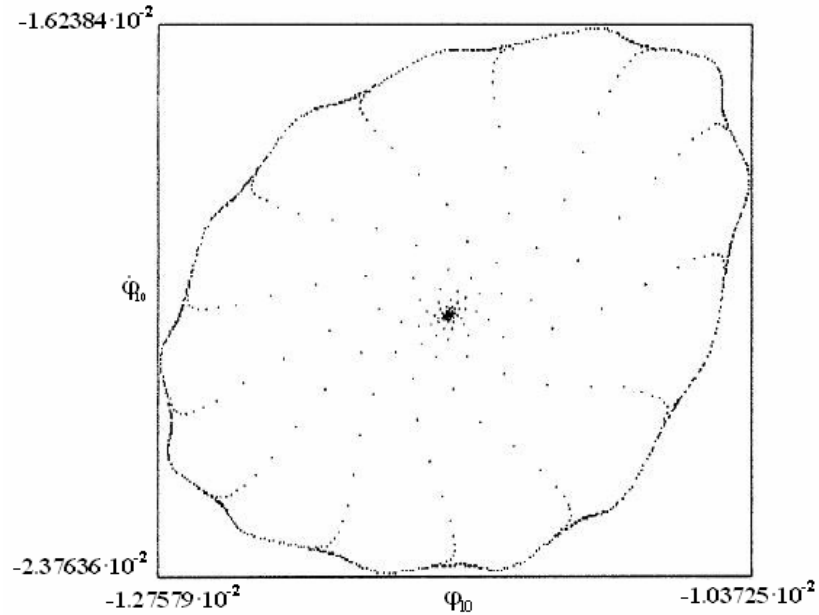


Рис. 6. Стробоскопическая фазовая плоскость

При дальнейшем уменьшении частоты ω предельный цикл разрушается с образованием устойчивых субгармонических решений высокого порядка, обнаруженных при $\omega = 5.75$ ($T = 7T_1$) и $\omega = 5.7$ ($T = 19T_1$), и

хаотических колебаний, стробоскопический портрет которых показан на рис. 7 для $\omega = 5.5$. Размахи этих колебаний показаны на рис. 4 ветвями P .

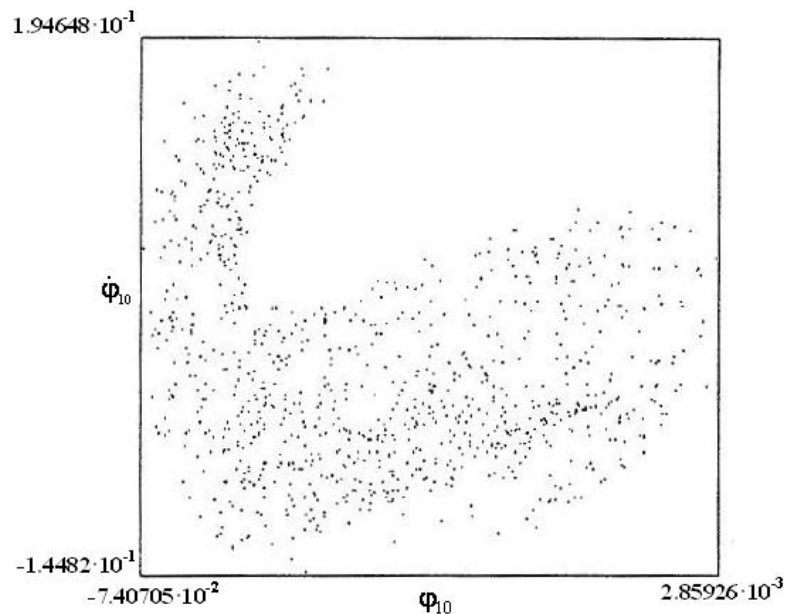
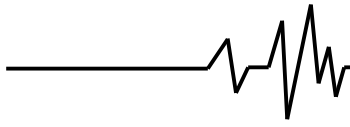
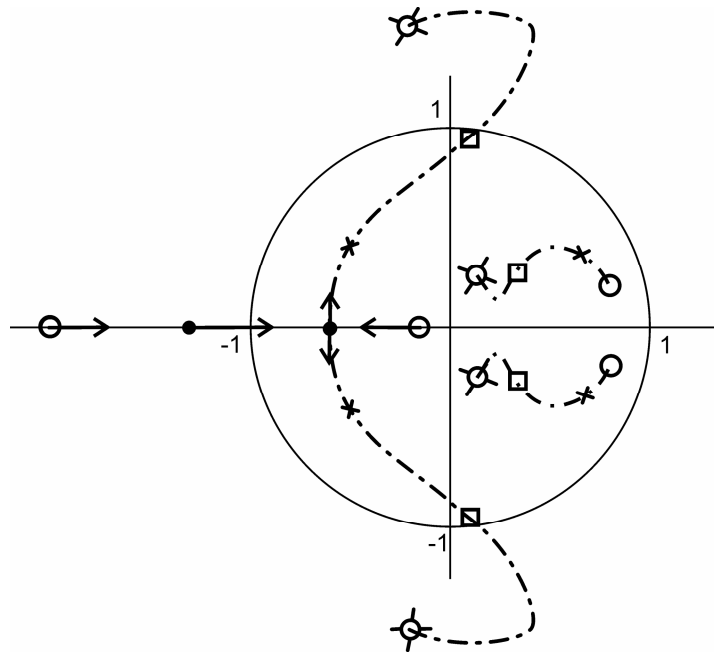


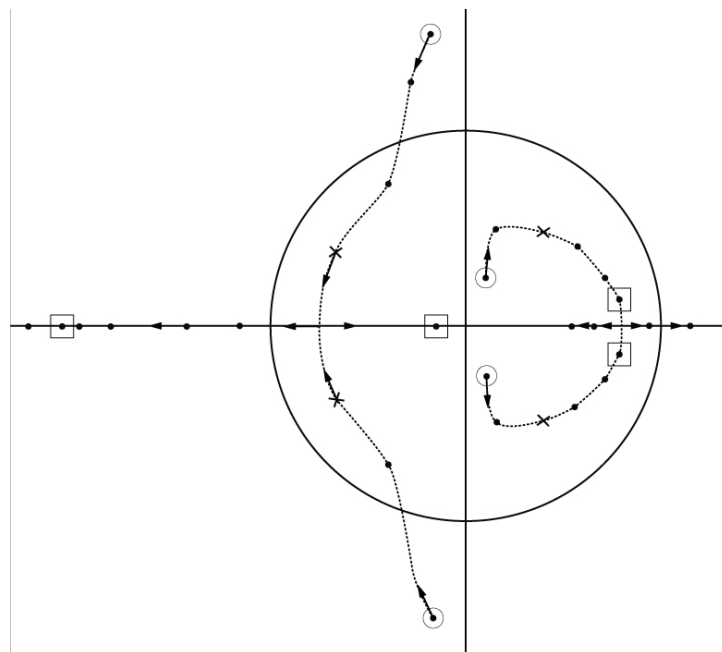
Рис. 7. Стробоскопическая фазовая плоскость



На рисунках 8, 9 и 10 приведены вариациях (9).
траектории мультипликаторов λ_i уравнения в



**Рис. 8. Траектории мультипликаторов. АЧХ, ветвь E,
частотный диапазон: $\omega \in [5.835; 5.35]$; $\circ - \omega = 5.835$; $\times - \omega = 5.815$;
 $\square - \omega = 5.795$; $\bowtie - \omega = 5.35$**



**Рис. 9. Траектории мультипликаторов. АЧХ, ветвь E,
частотный диапазон: $\omega \in [5.35; 5.3007]$; $\circ - \omega = 5.35$; $\times - \omega = 5.303$; $\square - \omega = 5.3008$**

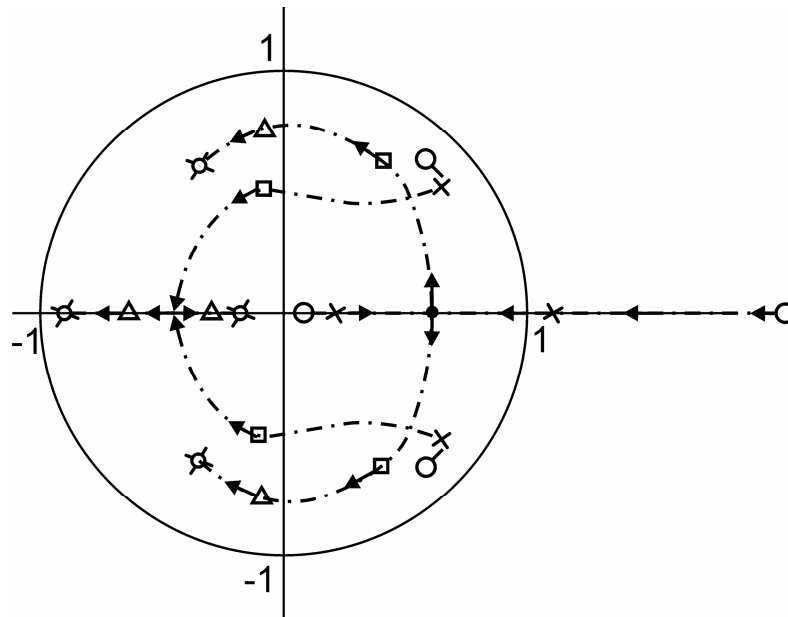
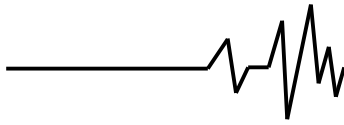


Рис. 10. Траектории мультипликаторов. АЧХ, ветвь В, частотный диапазон: $\omega \in [4.8; 4.9775]$; ветвь А, частотный диапазон: $\omega \in [4.98; 4.0]$; $\circ - \omega = 4.8$; $\times - \omega = 4.9775$; $\square - \omega = 4.6$; $\triangle - \omega = 4.2$; $\boxtimes - \omega = 4.0$

Следует отметить, что скорость перемещения мультипликаторов вдоль траекторий различна на разных ветвях АЧХ и зависит от многих факторов.

Выводы. Проведенные расчеты свидетельствуют о возможности эффективного использования обоих методов. Что касается оценки устойчивости периодических режимов и условий ветвления, то они хорошо вписываются в вычислительные схемы итерационных процессов и требует небольшого объема вычислений. Дополнительно проведенные расчеты системы, представленной на рис. 3, показывают, что последовательность бифуркаций удвоения, которая ведет к появлению решения бесконечного периода, является лишь необходимым условием появления "странного аттрактора". Достаточным условием будет отсутствие других устойчивых периодических или почти периодических решений.

Список использованных источников

1. Глухивский Л.И. Численный метод определения на ЦВМ периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений / Л.И. Глухивский // Теоретическая электротехника: Респ. межвед. научно-техн. сб. – Львов. – 1980. – Вып. 29. – С. 159-164.

2. Касти Дж. Методы погружения в прикладной математике / Дж. Касти, Р. Калаба // М.: Мир. – 1976. – 223 с.

3. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин / Дж. Ланс // М.: Ил. – 1962. – 208 с.

4. Монастырский П.И. К теории метода инвариантного погружения для граничных задач / П.И. Монастырский // Докл. АН БССР. – 1978. – Т. 22, №4. – С. 303–306.

5. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / Ц. На // М.: Мир. – 1982. – 294 с.

6. Фильц Р.В. Общий метод режимных расчетов нелинейных электромеханических устройств / Р.В. Фильц // Преобразовательные устройства в тиристорном электроприводе. – Кишинев: Штиинца. – 1977. – 99 с.

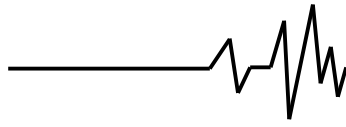
7. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ / В.Е. Шаманский // Ч. 2. – К.: Наукова Думка. – 1966. – 244 с.

8. Фегенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Фегенбаум // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141. – Вып. 2. – С. 243-374.

9. Анищенко В.С. Устойчивость, бифуркации, катастрофы / В.С. Анищенко // Соросовский общобразовательный журнал. – 2000. – Т. 6, № 6.

10. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение / Г. Шустер // М.: Мир. – 1988. – 234 с.

11. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса / Ю.Л. Климонтович // М.: Наука. – 1990. – 257 с.



12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания / Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда // М.: Наука.– 1987. – 243 с.

13. Вибрации в технике, Справочник в 6 тт., т. 2. – М.:Машиностроение.– 1979.

Список источников в транслитерации

1. Glukhivskiy L.I. Chislennyy metod opredeleniya na TSVM periodicheskikh resheniy nelineynykh differentsial'nykh uravneniy / L.I. Glukhivskiy // Teoreticheskaya elektrotehnika: Resp. mezhd. nauchno-tekhn. sb. – Lvov. – 1980. – Вып. 29. – С. 159-164.

2. Kasty Dzh Metody pogruzheniya v prikladnoy matematike / Dzh. Kasty, R. Kalaba // М.: Mir. – 1976. – 223 s.

3. Lans Dzh. Chislennyye metody dlya bystrodeystvuyushchimi vychislitel'nykh mashin / Dzh. Lans // М.: Ил. – 1962 – 208 s.

4. Monastyrnyy P.I. K teorii metoda invariantno pogruzheniya dlya granichnykh zadach / P.I. Monastyrnyy // Dokl. AN BSSR. – 1978. – Т. 22, №4. – С. 303 – 306.

5. Na TS. Vychislitel'nyye metody resheniya prikladnykh granichnykh zadach / ts Na // М.: Mir. – 1982. – 294 s.

6. Filts R. Obshchiy metod rezhimnykh raschetov nelineynykh elektromekhanicheskoy ustroystv / R.V. Filts // Preobrazovatel'nyye ustroystva v tiristornogo elektroprivoda. – Kishinev: Shtiintsa. – 1977. – 99 s.

7. Shamanskiy V.Ye. Metody chislennogo resheniya krayevykh zadach na ETSVM / V.Ye. Shamanskiy // CH. 2. – М.: Nauchnaya mysl. – 1966. – 244 s.

8. Fegenbaum M. Universal'nost v povedenii nelineynykh sistem / M. Fegenbaum // Uspekhi fizicheskikh nauchno-1983.- Т.141.- Вып.2.- С.243-374.

9. Anishchenko V.S. Ustoychivost, bifurkatsii, katastrofy / V.S. Anishchenko // Sorosovskiy Obshcheobrazovatel'nyye zhurnal'chik. – 2000. – Т.6, № 6.

10. Shuster G. determinirovanny khaos. Vvedeniye / G. Shuster // М.: mir. –1988. – 234 s.

11. Klimontovich YU.L. Turbulentnoy dvizheniye i struktura khaosa / Yu.L. Klimontovich // М.: Nauka. – 1990. – 257 s.

12. Neymark Yu.I., Landa P.S. Stokhasticheskiye i khaoticheskiye kolebaniya / Yu.I. Neymark, P.S. Landa // М.: Nauka. – 1987. – 243 s.

13. Vibratsii v tekhnike, Spravochnik v 6 tt., Т. 2. – М.: Mashinostroyeniye. – 1979.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Анотація. У статті представлені два методи розрахунку коливань нелінійних систем, один з яких дозволяє «проходити» особливі точки частотних кривих, використовуючи прийом інвертирования диференціальних рівнянь, а інший дозволяє паралельно з отриманням рішень неавтономного векторно-матричного диференціального рівняння, оцінювати їх стійкість по Ляпунову, а також проводити аналіз біфуркацій, обчислюючи мультиплікатори рівняння в варіаціях. Розглянуті в статті методи можуть бути корисні при вирішенні прикладних задач з різних областей техніки.

Ключові слова: нелінійні системи, чисельні методи, точки біфуркації, мультиплікатори, стійкість по Ляпунову.

INVESTIGATION OF VIBRATIONS NONLINEAR SYSTEMS

Annotation. The article presents two methods of calculating nonlinear systems oscillations, one of which allows you to "extend" special terms of frequency curves, using the technique of inverting differential equations, and the other allows parallel with finding solutions of non-autonomous vector-matrix differential equation, evaluate their Lyapunov stability, as well as produce bifurcation analysis are estimated multipliers of the variational equations. Methods discussed in the article may be helpful in solving practical problems in various areas of technology.

Key words: nonlinear systems, numerical methods, bifurcation points, multipliers, Lyapunov stability.