

Надутьий В. П.

Елисеєв В. И.

Луценко В. И.

*Институт  
геотехнической  
механики  
им. Н. С. Полякова  
НАН Украины*

Nadutyi V. P.

Yeliseyev V. I.

Lutsenko V. I.

*M. S. Polyakov Institute of  
Geotechnical Mechanics  
under the NAS of Ukraine*

УДК 53.04:534.1

## ВЛИЯНИЕ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПРИ КОЛЕБАНИИ ЧАСТИЦЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

*Дана оценка сил, действующих на частицу при ее колебании на пленке жидкости. Под действием колебаний частицы по поверхности пленки распространяются волны, которые, в свою очередь, оказывают силовое воздействие на частицу. Показано, что силы, возникающие в результате волнового движения пленки меньше вязких сил, действующих на частицу при выдавливании и всасывании жидкости в область между стенкой и частицей. Однако, соотношения рассмотренных сил указывают на то, что в механизме подъема влажных частиц по поверхности вибрирующей стенки волновые процессы в пленке могут играть заметную роль.*

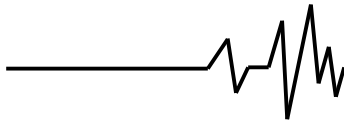
*Ключевые слова:* частица, пленка, поверхность, волны, частота, капиллярные силы.

**Введение.** В [1] было описан новый механический эффект, обнаруженный в результате экспериментальных работ при воздействии вибрации на влажный слой дисперсного материала. Эффект заключается в том, что влажные частицы в определенном диапазоне частот отделяются от слоя и начинают подниматься по вертикально расположенной стенке. В работе [2] была выдвинута гипотеза о резонансном механизме подъема частиц, в котором жидкость своими капиллярными силами удерживает частицу у стенки, а стенка подбивает частицу так, что в случае определенной кратности времен колебаний стенки и частицы возникает явление резонанса и частица начинает двигаться вертикально вверх. В следующей работе [3] роль жидкости была расширена за счет влияния вязких сил, проявляющихся при колебании частицы на пленке. Было показано, что влияние этих сил довольно значительное. Оно проявляется не только в вязком взаимодействии, но также и в гидродинамической нестационарности, что приводит к еще одному эффекту, связанному с резонансным движением частицы около стенки. Механизм этого эффекта заключается в том, что в зависимости от расстояния частицы от стенки изменяется сопротивление, т.е.

воздействие жидкости на частицу. Т.к. при близком расстоянии воздействие сильнее, то возможен другой дополнительный механизм, также требующий кратности периодов колебаний стенки и частицы. Найденная в этой работе силовая характеристика оказывает существенное влияние на движение частицы. Однако, помимо вязких и инерциальных сил, связанных с вытеснением и всасыванием жидкости при колебании частицы, имеется еще один важный механизм, который чрезвычайно сложно определить в данной задаче. Таким дополнительным фактором являются капиллярные волны на поверхности пленки, которая окружает частицу.

Целью данной работы является определение приближенной картины движения капиллярных волн при колебании частицы и их влияние на силовые динамические параметры процесса.

**Постановка задачи. Основные уравнения.** Рассмотрим динамику тонкой пленки вязкой жидкости, расположенной для простоты на горизонтальной стенке. Колебания пленок и возникающие при этом капиллярные волны хорошо изучены в настоящее время. Этим процессам посвящено значительное количество литературы, например, [4, 5]. При выводе уравнений принимается, что



$(h_0/L)^2 \ll 1$ , тогда уравнение для пленки примет вид:

$$h^{IV} - \text{Bo} \frac{L^2}{h_0^2} h'' + a \text{Bo} \frac{L^2}{h_0^2} h'' + b \text{Bo} \frac{L^2}{h_0^2} h' = 0, \quad (1)$$

где точка – производная по времени; штрих – производная по  $\zeta$  ( $\zeta = x/L$ ),  $x$  – продольная координата;  $L$  – линейный масштаб;  $h_0$  –

масштаб толщины пленки;  $\text{Bo} = \frac{\rho g h_0^2}{\sigma}$  – число

Бонда;  $a = \frac{h_0 L^2}{g h_0^2}$ ;  $b = 3 \frac{\nu}{g h_0} \frac{L^2}{h_0^2}$ ;  $\rho$  –

плотность жидкости;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения;  $g$  – ускорение свободно падающего тела. Примем теперь, что поверхность пленки колеблется по закону

$$h/h_0 = H \sum_k \exp(-c_k \zeta) \left\{ \begin{aligned} & \left[ A_k^S \sin(d_k \zeta) + B_k^S \cos(d_k \zeta) \right] \sin \omega t + \\ & \left[ A_k^C \sin(d_k \zeta) + B_k^C \cos(d_k \zeta) \right] \cos \omega t \end{aligned} \right\}, k=1, 2, \quad (2)$$

где  $H$  – безразмерная амплитуда.

Из анализа этого решения и уравнения (1) следует, что

$$\begin{aligned} c_1 &= 2^{-1/2} \sqrt{[(\text{Bo}_L/2 + c_N)^2 + d_N^2]^{1/2} + (\text{Bo}_L/2 + c_N)}, \\ d_1 &= 2^{-1/2} \sqrt{[(\text{Bo}_L/2 + c_N)^2 + d_N^2]^{1/2} - (\text{Bo}_L/2 + c_N)}, \\ c_2 &= 2^{-1/2} \sqrt{[(\text{Bo}_L/2 - c_N)^2 + d_N^2]^{1/2} + (\text{Bo}_L/2 - c_N)}, \\ d_2 &= 2^{-1/2} \sqrt{[(\text{Bo}_L/2 - c_N)^2 + d_N^2]^{1/2} - (\text{Bo}_L/2 - c_N)}, \end{aligned} \quad (3)$$

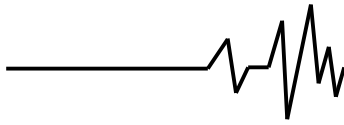
$$c_N = 2^{-1/2} \sqrt{[(c_{NN}^2 + d_{NN}^2)^{1/2} + c_{NN}^2]^{1/2}},$$

$$d_N = 2^{-1/2} \sqrt{[(c_{NN}^2 + d_{NN}^2)^{1/2} - c_{NN}^2]^{1/2}}, \text{Bo}_L = \text{Bo}(L/h_0)^2,$$

$$c_{NN} = a \text{Bo}_L \omega^2 + \text{Bo}_L^2/4, d_{NN} = b \text{Bo}_L \omega,$$

при этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} b \text{Bo}_L \omega A_k^C &= c_k d_k \left[ 4(c_k^2 - d_k^2) - 2 \text{Bo}_L \right] B_k^S - \\ & - \left\{ a \text{Bo}_L \omega^2 + \text{Bo}_L (c_k^2 - d_k^2) + \left[ 4c_k^2 d_k^2 - (c_k^2 - d_k^2)^2 \right] \right\} A_k^S, \\ b \text{Bo}_L \omega B_k^C &= -c_k d_k \left[ 4(c_k^2 - d_k^2) - 2 \text{Bo}_L \right] A_k^S - \\ & - \left\{ a \text{Bo}_L \omega^2 + \text{Bo}_L (c_k^2 - d_k^2) + \left[ 4c_k^2 d_k^2 - (c_k^2 - d_k^2)^2 \right] \right\} B_k^S. \end{aligned} \quad (4)$$



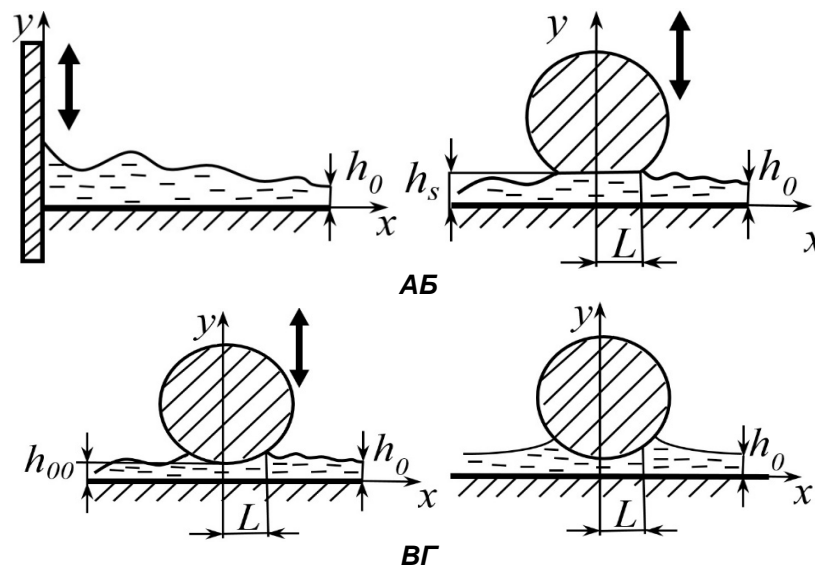
Из кинематического условия на пленке можно получить среднюю скорость в пленке

$$\bar{u} = \omega HL \sum_k \left\{ \exp(-c_k \zeta) \left[ M_k^S \cdot \sin d_k \zeta + N_k^S \cdot \cos d_k \zeta \right] \sin \omega t + \right. \\ \left. + \exp(-c_k \zeta) \left[ M_k^C \cdot \sin d_k \zeta + N_k^C \cdot \cos d_k \zeta \right] \cos \omega t \right\}, \quad (5)$$

где  $M_k^S = E1_k B_k^C - E2_k A_k^C$ ;  $N_k^S = -(E1_k A_k^C + E2_k B_k^C)$ ;  $M_k^C = -(E1_k B_k^S - E2_k A_k^S)$ ;  
 $N_k^C = (E1_k A_k^S + E2_k B_k^S)$ ;  $E1_1 = \frac{d_1}{c_1^2 + d_1^2}$ ;  $E1_2 = \frac{d_2}{c_2^2 + d_2^2}$ ;  $E2_1 = \frac{c_1}{c_1^2 + d_1^2}$ ;  $E2_2 = \frac{c_2}{c_2^2 + d_2^2}$ .

**Примеры решений и оценка силовых характеристик.** Рассмотрим теперь некоторые примеры (рис. 1) распространения

капиллярных волн на пленке и их влияние на силовые характеристики.



**А – пластина, Б – частица с плоским срезом, В – цилиндрическая частица, Г – статический случай**

**Рис. 1. Схемы рассматриваемых задач**

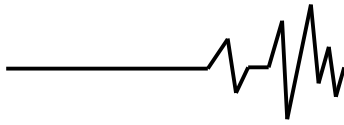
**Пластина** (рис. 1А). Примем согласно рис. 1А, что жидкая пленка закреплена в точке контакта мениска с поверхностью пластины и колеблется вместе с пластиной по гармоническому закону  $h/h_0 = H \sin(\omega t)$ . В этом случае граничными условиями для

нахождения выписанных коэффициентов являются (условие равенства высоты пленки в точке закрепления и условие равенства нулю  $\bar{u}$  на пластине, точку  $\zeta$  можно принять равной нулю):

$$B_1^S + B_2^S = 1, \quad B_1^C + B_2^C = 0, \\ E1_1 A_1^C + E2_1 B_1^C + E1_2 A_2^C + E2_2 B_2^C = 0, \quad (6) \\ E1_1 A_1^S + E2_1 B_1^S + E1_2 A_2^S + E2_2 B_2^S = 0.$$

Алгебраические уравнения (6) дают возможность определить силу (сила поверхностного натяжения), возникающую для рассматриваемого случая при возбуждении

колебаний поверхности пленки и действующую на пластину в точке зацепления. В этом случае проекция капиллярной силы на вертикальную ось можно записать в виде



$$F_n^{NK} = \sigma H \frac{h_0}{L} \left\{ \begin{aligned} & \left[ (d_1 A_1^S - c_1 B_1^S) + (d_2 A_2^S - c_2 B_2^S) \right] \sin(\omega t) + \\ & \left[ (d_1 A_1^C - c_1 B_1^C) + (d_2 A_2^C - c_2 B_2^C) \right] \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} = \sigma H \frac{h_0}{L} \cdot A_K \cdot \sin(\omega t + \delta_K),$$

где  $A_K$  – амплитуда,  $\delta_K$  – фазовое смещение.

Тело с плоским срезом (рис. 1Б). В этом случае между телом и частицей появляется канал шириной  $h_S = h_{S0} + h_{S1}$ , ( $h_{S0} = h_0, h_{S1} = h_0 H \sin(\omega t)$ ), вследствие чего колебания тела будут то выдавливать

жидкость из канала, то всасывать ее в канал. В результате этого появляется дополнительное давление жидкости, которое будет действовать на тело. Из решения уравнения движения в этой зоне можно получить формулы для скорости жидкости и средней скорости в канале:

$$u = \frac{1}{2} \frac{h^2}{\nu} Sk1(n^2 - n) - \frac{1}{24L} \frac{h^2}{\nu} Sk2(n^4 - n), \tag{7}$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{12} \frac{h_0^2}{\nu} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\rho L \partial \zeta} \right),$$

при этом давление будет определяться из выражения:

$$p = 6\mu \frac{L^2}{h_0^2} H \omega \left[ \cos(\omega t) - \frac{1}{12} \frac{h_0^2}{\nu} \omega \cdot \sin(\omega t) \right] (\zeta^2 - 1) + p_a + P_L, \tag{8}$$

где  $P_L$  – постоянная, определяемая при стыковке решений в канале и пленке. Для этой задачи коэффициенты определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} B_1^S + B_2^S &= 1, \quad B_1^C + B_2^C = 0, \\ E1_1 A_1^C + E2_1 B_1^C + E1_2 A_2^C + E2_2 B_2^C &= 0, \\ E1_1 A_1^S + E2_1 B_1^S + E1_2 A_2^S + E2_2 B_2^S &= -1, \end{aligned} \tag{9}$$

$$P_L = \sigma \frac{h_0}{L^2} H \left\langle \left\{ \left[ 2c_1 d_1 A_1^S - (c_1^2 - d_1^2) B_1^S \right] + \left[ 2c_2 d_2 A_2^S - (c_2^2 - d_2^2) B_2^S \right] \right\} \sin(\omega t) + \right. \\ \left. \left\{ \left[ 2c_1 d_1 A_1^C - (c_1^2 - d_1^2) B_1^C \right] + \left[ 2c_2 d_2 A_2^C - (c_2^2 - d_2^2) B_2^C \right] \right\} \cos(\omega t) \right\rangle.$$

Полная сила с учетом тянущей капиллярной может быть записана, как

$$F_n = F_n^{PT} + F_n^{NK} + F_n^{PK},$$

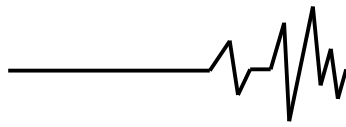
$$F_n^{PT} = \frac{2}{3} \rho L^3 H \omega^2 \left( \sin(\omega t) - 12 \frac{\nu}{\omega h_0^2} \cos(\omega t) \right) = -A_{PT} \cos(\omega t + \delta_{PT}), \tag{10}$$

$$F_n^{NK} = -A_{TK} \cos(\omega t - \delta_{NK}),$$

$$F_n^{PK} = 2P_L L = -A_{PK} \cos(\omega t + \delta_{PK}).$$

Цилиндрическая частица (рис. 1В). Представим щель между частицей и плоскостью в виде  $h_S = h_{S0} + h_{S1}$ ,

где  $h_{S0} = h_{00} + h_{02} \zeta^2$ ,  $h_{S1} = h_{00} H \sin(\omega t)$ . В этом случае из условия сохранения массы имеем



$$\frac{d(h_{S0}\bar{u})}{Ld\zeta} = -\frac{\partial h_1}{\partial t} = -h_{00}H\omega \cos(\omega t), \quad (11)$$

$$\bar{u} = -H\omega L \frac{\beta}{(\zeta^2 + \beta)} \zeta \cos(\omega t). \quad (12)$$

а тогда ( $\beta = h_{00} / h_{02}$ ) средняя скорость в канале (под частицей)

В этом случае давление в канале определяется следующим выражением

$$p = -3\mu\beta \frac{L^2}{h_{02}^2} H\omega \left[ \frac{1 + \zeta^2 + 2\beta}{(1 + \beta)^2 (\zeta^2 + \beta)^2} (1 - \zeta^2) \cdot \cos(\omega t) + \frac{1}{6} \frac{h_{02}^2}{\nu} \omega \cdot \ln \left[ \frac{\zeta^2 + \beta}{1 + \beta} \right] \cdot \sin(\omega t) \right] + p_a + P_L, \quad (13)$$

которое при  $h_{02} \rightarrow 0$  ( $\beta \rightarrow \infty$ ) переходит в (8). Из (13) получаем силу давления при выдавливании и втягивании жидкости

$$F_n^{PT} = -6\mu\beta \frac{L^3}{h_{02}^2} H\omega \left[ \left[ \frac{1}{2\beta(1 + \beta)} + \frac{1}{2\beta^{3/2}} \cdot \arctg(\beta^{-1/2}) - \frac{1}{(1 + \beta)^2} \right] \cdot \cos(\omega t) - \left[ -\frac{1}{3} \frac{h_{02}^2}{\nu} \omega [1 - \beta^{1/2} \cdot \arctg(\beta^{-1/2})] \right] \cdot \sin(\omega t) \right]. \quad (14)$$

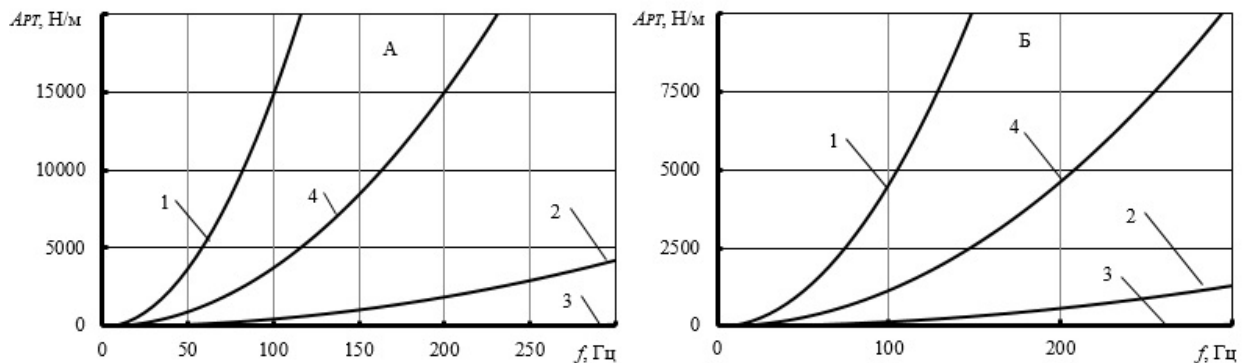
Если теперь в качестве невозмущенной толщины пленки считать величину  $h_0 = h_{00} + h_{02}$ , то для коэффициентов,

определяющих динамику пленки в выражении (2) будем иметь

$$\begin{aligned} B_1^S + B_2^S &= 1, \quad B_1^C + B_2^C = 0, \\ E1_1 A_1^C + E2_1 B_1^C + E1_2 A_2^C + E2_2 B_2^C &= 0, \\ E1_1 A_1^S + E2_1 B_1^S + E1_2 A_2^S + E2_2 B_2^S &= -\frac{\beta}{(1 + \beta)}, \end{aligned} \quad (15)$$

Результаты расчетов. На рис. 2-5 приведены результаты расчетов сил,

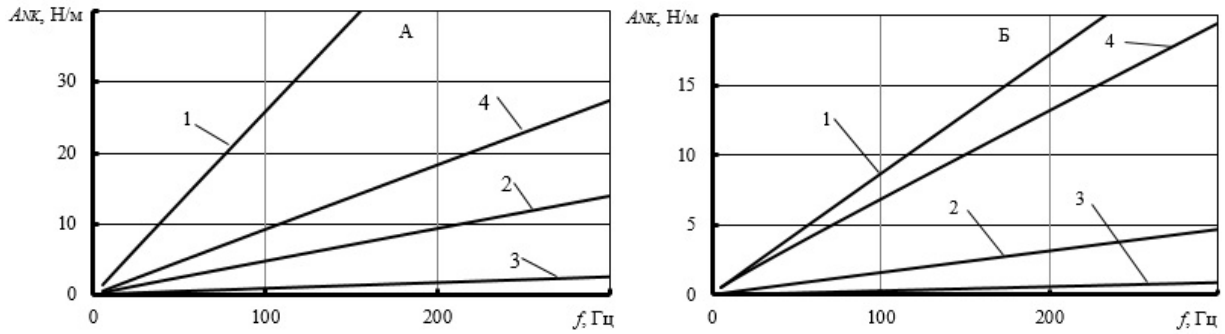
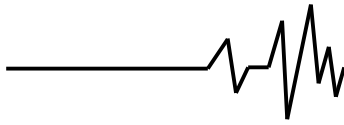
действующих при колебании частицы с учетом волновых процессов на поверхности пленки.



А – частица со срезом; Б – цилиндрическая частица с  $h_{02} / h_{00} = 2$ .

Кривая 1 –  $Vo = 2$  ( $h_0 = 3,83$  мм),  $L / h_0 = 10$ ; кривая 2 –  $Vo = 0,2$  ( $h_0 = 1,21$  мм),  $L / h_0 = 10$ ; кривая 3 –  $Vo = 0,02$  ( $h_0 = 0,038$  мм),  $L / h_0 = 10$ ; кривая 4 –  $Vo = 0,2$  ( $h_0 = 1,21$  м),  $L / h_0 = 20$ .

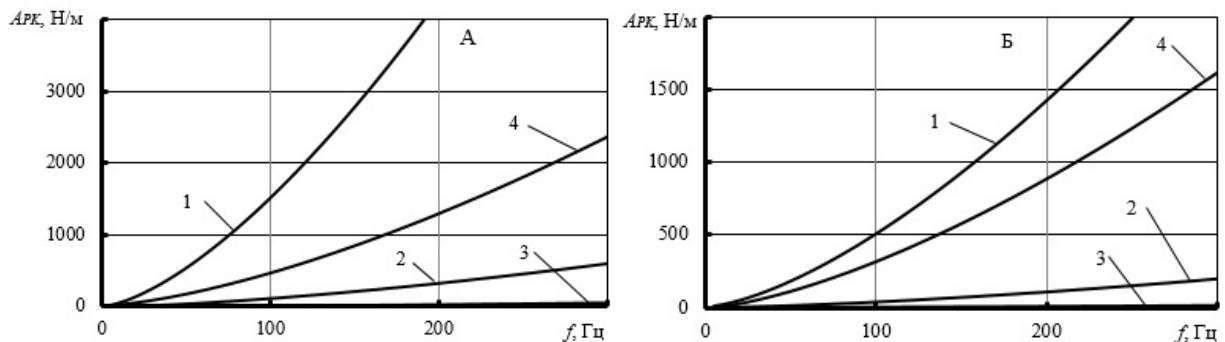
Рис. 2. Изменение амплитуд  $A_{PT}$  от частоты колебаний и толщин пленок



А – частица со срезом; Б – цилиндрическая частица с  $h_{02} / h_{00} = 2$ .

Кривая 1 –  $Bo = 2$  ( $h_0 = 3,83$  мм),  $L / h_0 = 10$ ; кривая 2 –  $Bo = 0,2$  ( $h_0 = 1,21$  мм),  $L / h_0 = 10$ ;  
кривая 3 –  $Bo = 0,02$  ( $h_0 = 0,038$  мм),  $L / h_0 = 10$ ; кривая 4 –  $Bo = 0,2$  ( $h_0 = 1,21$  мм),  $L / h_0 = 20$ .

Рис. 3. Изменение амплитуд  $A_{NK}$  от частоты колебаний и толщин пленок



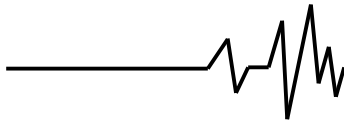
А – частица со срезом; Б – цилиндрическая частица с  $h_{02} / h_{00} = 2$ .

Кривая 1 –  $Bo = 2$  ( $h_0 = 3,833$  мм),  $L / h_0 = 10$ ; кривая 2 –  $Bo = 0,2$  ( $h_0 = 1,21$  мм),  $L / h_0 = 10$ ;  
кривая 3 –  $Bo = 0,02$  ( $h_0 = 0,038$  мм),  $L / h_0 = 10$ ; кривая 4 –  $Bo = 0,2$  ( $h_0 = 1,21$  мм),  $L / h_0 = 20$ .

Рис. 4. Изменение амплитуд  $A_{PK}$  от частоты колебаний и толщин пленок

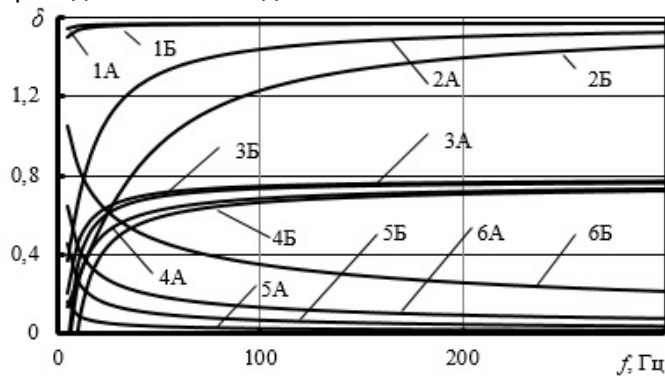
Из этих рисунков следует, что наибольшая сила возникает в канале между частицей и стенкой при вытеснении и всасывании жидкости ( $A_{PT}$ ). Эта сила непосредственно связана с вязкостью жидкости и зависит от скорости выдавливания или всасывания, что следует из рис. 2, где показано, что кривая растет с ростом частоты колебания частицы. При этом, чем меньше толщина пленки, тем меньше сила при постоянном отношении  $L/h_0$  (кривые 1–3), однако с увеличением отношения сила возрастает (кривая 4). Из сравнения рис. А и Б видно, что для частицы со срезом сила вязкого взаимодействия с жидкостью больше, чем для цилиндрической частицы (на графиках это примерно в два раза). Это естественно, т.к. для цилиндрической частицы масса жидкости, приводимая в движение непосредственно под частицей, меньше, чем под частицей со срезом. Из рис. 3 видно, что сила, непосредственно

связанная с поверхностным натяжением ( $A_{NK}$ ), мала по сравнению с силой вязкого взаимодействия, однако в исследуемом эффекте [2] эта сила является наиболее важной, т.к. именно она удерживает частицу от падения. В данной рассматриваемой задаче эта сила неполная, т.к. в невозмущенном состоянии нет искривления поверхности жидкости за счет смачивания, поэтому  $A_{NK}$  можно рассматривать, как добавку к силе натяжения за счет колебательного процесса. На следующем рисунке (рис. 4) представлены кривые, описывающие силы давления  $A_{PK}$ , вызванные колебанием поверхности пленки и реакцией жидкости в самой пленке на вытеснение и всасывание. Из этого рисунка видно, что расположение кривых примерно такое же, как и на рис. 2, однако величины этих сил для толстой пленки ( $h_0 = 3,83$  мм)



примерно в пять раз меньше сил  $A_{PT}$ , а для тонкой пленки ( $h_0=0,38$  мм) отношение  $A_{PT} / A_{PK}$  уже ближе к единице (в работе [3] это не учитывалось). Это показывает, что капиллярные силы оказывают заметное влияние на движение частицы по влажной стенке, при этом это влияние, по крайней мере, двоякое, т.е. за счет силы натяжения и за счет возникающего дополнительного давления, также зависящего от капиллярной составляющей. Приведенные здесь

характеристики указывают на то, что в исследуемом эффекте подъема влажных частиц соотношение действующих сил довольно сложное и на данный момент, практически не определяемое. Динамическую картину усложняет то обстоятельство, что воздействие рассмотренных сил сдвинуто по фазе, как относительно колебания частицы, так и относительно друг друга. Это можно увидеть на рис. 5, где представлены кривые изменения фазового угла сдвига в зависимости от частоты колебания и толщин пленок.



А – частица со срезом; Б – цилиндрическая частица с  $h_{02} / h_{00} = 2$ .

Кривые 1 –  $\delta_{PT}$  ( $Bo = 2$ ); 2 –  $\delta_{PT}$  ( $Bo = 0,02$ ); кривые 3, 4 –  $\delta_{PK}$ ; 5, 6 –  $\delta_{NK}$  соответственно

**Рис. 5. Зависимость фазового угла сдвига от частоты колебания и толщины пленки**

Из рис. 5 видно, что при сравнительно малых частотах  $\delta_{PT}$  и  $\delta_{PK}$  имеют небольшие значения, но с ростом частоты  $\delta_{PT}$  поднимается к  $\pi/2$ , а  $\delta_{PK}$  к 0,8. Фазовый угол  $\delta_{NK}$  ведет себя, наоборот – при малых значениях частоты эта величина большая, т.е. натяжение изменяется в соответствии с подъемом и опусканием точки закрепления, а с ростом частоты начинает отслеживать скорость изменения высоты.

Сравним теперь полученные величины со значениями сил давления и натяжения для статического случая (рис. 1Г). Отбрасывая в уравнении (1) нестационарные члены, получим простое уравнение

$$h^{IV} - Bo \frac{L^2}{h_0^2} h'' = 0, \quad (16)$$

откуда следует, что

$$h = h_0 [1 + H \exp(-\chi \zeta)], \quad (17)$$

$$\chi = Bo^{1/2} (L / h_0),$$

где  $H$  – безразмерная высота точки зацепления над поверхностью пленки на бесконечности, тогда

$$F_{NK} = -2 \frac{h_0}{L} \chi H \sigma = -2 Bo^{1/2} H \sigma,$$

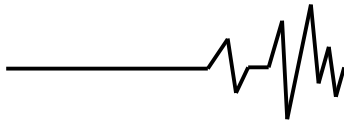
$$F_{PK} = -2 \frac{h_0}{L^2} L \chi^2 H \sigma = -2 Bo H \frac{L}{h_0} \sigma. \quad (18)$$

Несложно убедиться, что при одинаковых величинах  $H$  значения сил из выражений (18) на порядок или два порядка меньше вычисленных для колеблющейся частицы. Однако, принимая во внимание, что в равновесном состоянии именно они определяют положение частицы у стенки, эти силы должны быть учтены в уравнениях, описывающих динамику частиц, в обнаруженном эффекте.

В заключение следует отметить, что, как показывают решения рассмотренной здесь задачи, капиллярные явления проявляются в широком диапазоне значений действующих сил. Это указывает на необходимость как можно более полного их описания, однако это представляет значительные трудности, как физического, так и математического характера.

**Список использованных источников**

1. Елисеев В.И. Вибрационные эффекты во влажном сыпучем слое / В.И. Елисеев, В.И. Луценко, С.Г. Кравчина,



А.В. Кривокорытов // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2012. – Вып. 107. – С. 250-256.

2. Надутый В.П. Эффект подъема влажных частиц в вертикальной вибрирующей трубке / В.П. Надутый, В.И. Елисеев, В.И. Луценко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2013. – № 1(69). – С. 31-36.

3. Надутый В.П. Математическая модель подъема частицы из влажного дисперсного слоя по вертикальной стенке вибрирующей трубки / В.П. Надутый, В.И. Елисеев, В.И. Луценко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 4 (76). – С. 135-144.

4. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 816 с.

5. Накоряков В.Е. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред / В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев, И.Р. Шрейбер. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 248 с.

6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 840 с.

7. Носков Б.А. Капиллярные волны на межфазной границе растворов поверхностно-активных веществ / Б.А. Носков, Н.Н. Кочурова // Вопросы термодинамики гетерогенных систем и теории поверхностных явлений. – Л.: Изд-во ленингр. ун-та, 1985. – Вып. 7. – С. 178-212.

8. Гордеева В.Ю. Влияние термокапиллярного эффекта на динамику и устойчивость движения испаряющейся тонкой пленки / В.Ю. Гордеева, А.В. Люшнин // Журн. Техн. Физики. – 2013. – Т. 83. – Вып. 3. – С. 41-47.

#### Список источников в транслитерации

1. Yeliseyev, V. I. Vibratsionnye efekty vo vlazhnom supuchem sloe / V. I. Yeliseyev, V. I. Lutsenko, S. G. Kravchina, A. V. Krivokorytov // Geotekhnicheskaya mekhanika: Mezhd. sb. nauch. tr. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2012. – Вып. 107. – С. 250-256.

2. Naduty, V. P. Effekt podyema vlazhnykh chastits v vertikalnoy vibriruyushchey tube / V. P. Naduty, V. I. Yeliseyev, V. I. Lutsenko // Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. – 2013. – N 1 (69). – С. 31-36.

3. Naduty, V. P. Matematicheskaya model podyema chastitsy iz vlazhnogo dispersnogo sloya po vertikalnoy stenke vibriruyushchey trubki / V. P. Naduty, V. I. Yeliseyev, V. I. Lutsenko // Vibratsii v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. – 2014. – N 4(76). – С. 135-144.

4. Sretenskiy L.N. Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti / L.N. Sretenskiy. – М.: Наука, 1977. – 816 с.

5. Nakoryakov V.E. Volnovaya dinamika gazo- i parozhidkostnykh sred / V.E. Nakoryakov,

B.G. Pokusaev, I.R. Shreyber. – М.: Energoatomizdat, 1990. – 248 s.

6. Loytsyanskiy, L. G. Mekhanika zhidkosti i gaza / L. G. Loytsyanskiy. – М.: Nauka, 1978. – 840 s.

7. Noskov B.A. Kochurova N.N. Kapillyarnye volny na mezhfaznoy granitse rastvorov poverkhnostno-aktivnykh veshchestv / B.A. Noskov, N.N. Kochurova // Voprosy termodinamiki geterogennykh system i terii poverkhnostnykh yavleniy. – Л.: Izd. Leningr. unta, 1985. – Вып. 7. – С. 178-212.

8. Gordeeva V.YU. Vliyanie termokapillyarnogo effekta na dinamiku i ustoychivost dvizheniya isparayushchey tonkoy plienki / V.YU. Gordeeva, A.V. Lyushnin // Tekhnicheskaya fizika. – 2013. – Т. 83. – Вып. 3. – С. 41-47.

#### ВПЛИВ КАПІЛЯРНИХ ХВИЛЬ НА ДИНАМІЧНІ ПАРАМЕТРИ ПРИ КОЛИВАННІ ЧАСТОК НА ПОВЕРХНІ РІДКОЇ ПЛІВКИ

*Анотація.* Дана оцінка сил, що діють на частку при її коливанні на плівці рідини. Під дією коливань частки по поверхні плівки поширюються хвилі, які, в свою чергу, надають силовий вплив на частку. Показано, що сили, що виникають в результаті хвильового руху плівки менше в'язких сил, що діють на частку при видавлюванні і всмоктуванні рідини в область між стінкою і часткою. Однак, співвідношення розглянутих сил вказують на те, що в механізмі підйому вологих часток по поверхні віброуючого стінки хвильові процеси в плівці можуть відігравати помітну роль.

**Ключові слова:** частка, плівка, поверхня, хвилі, частота, капілярні сили.

#### THE EFFECT OF CAPILLARY WAVES ON THE DYNAMIC PARAMETERS IN CASE THE PARTICLE OSCILLATIONS ON THE LIQUID FILM SURFACE

*Annotation.* The approximate estimates of the forces acting on the particle when it vibrates in the liquid film are shown. The waves propagate along the surface of the film under the influence of particle vibration. These waves exert a force action on the particle. It is shown that the forces, which result from the wave motion of the film, is less than the viscous forces acting on the particle during pressing-out and suction of fluid in the region between the wall and particle. However, the results suggest that in the mechanism of the lifting of wet particles over the surface of a vibrating wall the wave processes in the film may play an important role.

**Key words:** particle, film, surface wave, frequency, capillary forces.