**Шатохин В. М.***Харьковский  
национальный  
университет  
строительства и  
архитектуры***Shatokhin V. M.***Kharkov National  
University of Construction  
and Architecture***УДК 621.432****ГЛОБАЛЬНО СХОДЯЩИЙСЯ  
АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ  
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
УСТАНОВИВШИХСЯ  
ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В  
НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ  
МАШИННЫХ АГРЕГАТОВ**

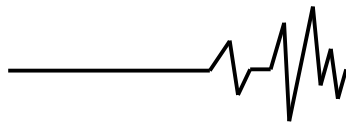
*Предложен глобально сходящийся алгоритм решения интегральных уравнений установившихся динамических процессов в нелинейных моделях машинных агрегатов. Их число степеней свободы в большинстве случаев превосходит число нелинейных соединений. Интегральные уравнения движения записаны с помощью импульсно-частотных характеристик (ИЧХ) линеаризованных моделей; число уравнений равно числу нелинейностей. Трудоемкость решения задачи в этом случае практически не зависит от числа степеней свободы модели. Алгоритм обеспечивает сходимость к некоторому решению системы нелинейных интегральных уравнений почти из любого начального приближения. Основная его идея состоит в комбинировании стратегии глобальной сходимости со стратегией высокой локальной сходимости метода Ньютона-Канторовича (МНК) решения интегральных уравнений. При численной реализации формул МНК использованы координатные (базисные) функции для представления решений.*

*Приведены результаты расчетно-экспериментальных исследований по снижению динамических нагрузок в машинном агрегате двухвального транспортного двигателя; установлены причины возникновения субгармонических колебаний.*

**Ключевые слова:** *установившийся динамический процесс, машинный агрегат, нелинейное интегральное уравнение, импульсно-частотная характеристика, глобальная сходимость, двигатель внутреннего сгорания, субгармонические колебания.*

**Постановка проблемы.** Увеличение мощности и быстроходности современных машин неизбежно ведет к возрастанию динамических нагрузок, когда все в большей степени проявляются упругие свойства их деталей и узлов. Анализ и устранение опасных колебаний требуют с одной стороны учета технологических нелинейностей при построении моделей, а с другой – введения упругих муфт и демпфирующих устройств, характеристики которых чаще всего также являются нелинейными. Указанные факторы являются главной причиной многообразия и

сложности динамических процессов: смещения резонансов, деформирования резонансных кривых, многозначности колебаний, возникновения субгармонических режимов, что существенно осложняет решение задач анализа и тем более синтеза для многомерных моделей машинных агрегатов. Универсальные, эффективные и при решении задач синтеза методы расчета установившихся движений в многомерных нелинейных моделях машинных агрегатов, несмотря на значительный прогресс в развитии численных и аналитических методов исследования нелинейных колебаний,



разработаны недостаточно. Используемые методы не соответствуют современному состоянию теории, уровню развития вычислительной техники, плохо приспособлены к применению более сложных и точных моделей, а потому не удовлетворяют в полной мере инженерную практику. Сказанное свидетельствует о том, что потребности разработки современных форсированных, надежных и долговечных машинных агрегатов, в частности с двигателями внутреннего сгорания (ДВС), удешевление их конструирования и доводки требуют безусловной разработки таких методов. Этому способствует также возможность применения современных компьютеров, мощное математическое обеспечение и интенсивное развитие в функциональном анализе общих методов решения операторных уравнений.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Расчет вынужденных колебаний многомерных нелинейных систем при произвольном возбуждении представляет собой сложную математическую проблему [1, 2, 9]. В большинстве случаев для исследования установившихся режимов применяются приближенные методы. В работе [3] для этих целей использован метод Галеркина. Наиболее широкое распространение в динамике машин получил метод гармонической линеаризации [4], являющийся основным инструментом инженерного анализа нелинейных колебаний. Средства исследования вынужденных нелинейных колебаний при полигармоническом возбуждении обладают более скромными возможностями [5]. Значительное число работ посвящено различным методам линеаризации [6]. Среди приближенных аналитических методов важное место принадлежит асимптотическим методам [7]. Достаточно широкое распространение получили численно-аналитические методы, позволяющие аналитически представить периодическое решение при использовании численных схем определения некоторых его параметров [8]. Отличительной особенностью нелинейных систем является возможность возникновения в них субгармонических колебаний, период которых кратен периоду возбуждения, а также супергармонических резонансов с частотой кратной частоте возбуждения [4].

**Цель исследований.** Разработка **глобально сходящегося** метода, который должен обеспечивать сходимость к **некоторому** решению системы нелинейных интегральных уравнений периодических колебаний **почти из любого начального приближения**. Необходимо численному

алгоритму реализации формул метода Ньютона-Канторовича (МНК) с использованием координатных (базисных) функций для представления решений придать такую форму, чтобы он естественным образом включался в процедуру глобально сходящегося алгоритма. Комбинирование стратегии глобальной сходимости со стратегией высокой локальной сходимости МНК обеспечит существенное расширение возможностей создаваемого метода.

В статье приведены результаты расчетно-экспериментальных исследований по снижению динамических нагрузок в машинном агрегате двухвального транспортного двигателя; установлены причины возникновения субгармонических колебаний.

**1. Уравнения движения.** В матричной форме нелинейные интегральные уравнения периодических колебаний записываются в виде [2, 9]

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^T \mathbf{\Psi}(t - \tau) \mathbf{f}(\mathbf{y}) d\tau + \mathbf{g}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_s(t)]^T$  – вектор углов закручивания нелинейных соединений ( $T$  – знак транспонирования);  $s$  – число нелинейностей;  $\mathbf{\Psi}(t - \tau) = [\varphi_{i,j}(t - \tau)]$

$(i, j = \overline{1, s})$  – матрица ИЧХ;

$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = [f_1(y_1), f_2(y_2), \dots, f_s(y_s)]^T$  – нелинейная вектор-функция, причем  $f_j(y_j) = c_j y_j - F_j(y_j)$ ;  $F_j(y_j)$  – нелинейная характеристика  $j$ -го нелинейного

соединения;  $c_j$  и  $c_j y_j$  – соответственно коэффициент жесткости и упругий момент в линеаризованном соединении;

$\mathbf{g}(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_s(t)]^T$  – вектор-функция реакций линеаризованных нелинейных соединений на внешнее возбуждение, причем

$$g_j(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^T \psi_{j,i}(t - \tau) M_i(\tau) d\tau; \quad M_i(\tau)$$

$(i = \overline{1, k})$  – возмущающие моменты;

$\psi_{j,i}(t - \tau)$  – соответствующие ИЧХ;  $k$  –

число возмущающих моментов;  $T$  – период колебаний.



**2. Локально сходящийся алгоритм решения интегральных уравнений.**

В работах [2, 9] получены формулы МНК для уравнения (1) и предложен численный алгоритм их реализации с использованием базисных функций для представления решений. Укажем другой способ его построения, при котором он естественным образом включается в процедуру глобально сходящегося алгоритма. Для компактности изложения рассмотрим модель с одной нелинейностью, так как введением блочных матриц результаты без труда затем обобщаются на случай произвольного числа нелинейностей [9].

Пусть решение уравнения (1) с достаточной точностью может быть представлено в виде тригонометрического ряда

$$\tilde{y}(t) = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_{r_j} \cos r_j \omega t + b_{r_j} \sin r_j \omega t), \quad (2)$$

где  $a_0, a_{r_j}, b_{r_j}$  ( $j = \overline{1, m}$ ) – неизвестные коэффициенты, причем  $r_1 = 1, \omega = 2\pi/T$ .

Теперь задача, по существу, сводится к определению вектора

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{2m+1}]^T = [a_0, a_{r_1}, b_{r_1}, \dots, a_{r_m}, b_{r_m}]^T. \quad (3)$$

Так как ИЧХ  $\varphi(t)$  является периодической функцией времени [3, 4], то ее можно представить рядом Фурье

$$\varphi(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \cos i\omega t + \beta_i \sin i\omega t).$$

Тогда для  $\varphi(t - \tau)$  имеем

$$\varphi(t - \tau) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\alpha}_i \cos i\omega t + \tilde{\beta}_i \sin i\omega t), \quad (4)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_{2m}, f_{2m+1}]^T = [2\gamma_0, \gamma_{r_1}, \delta_{r_1}, \dots, \gamma_{r_m}, \delta_{r_m}]^T \quad (9)$$

и блочную диагональную матрицу

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{r_1} & -\beta_{r_1} & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{r_1} & \alpha_{r_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_{r_m} & -\beta_{r_m} \\ & & & \beta_{r_m} & \alpha_{r_m} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где  $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i \cos i\omega\tau - \beta_i \sin i\omega\tau,$

$$\tilde{\beta}_i = \alpha_i \sin i\omega\tau + \beta_i \cos i\omega\tau.$$

Ядро интегрального уравнения (1) оказывается в этом случае вырожденным.

Представим функцию  $f(\tilde{y}(\tau))$  рядом Фурье

$$f(\tilde{y}(\tau)) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i \cos i\omega\tau + \delta_i \sin i\omega\tau), \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0(\mathbf{u}) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\tilde{y}(\tau)) d\tau, \\ \gamma_j(\mathbf{u}) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\tilde{y}(\tau)) \cos j\omega\tau d\tau, \\ \delta_j(\mathbf{u}) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\tilde{y}(\tau)) \sin j\omega\tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда для коэффициентов гармоник тех же порядков, что и в (2), функции

$$p(\mathbf{u}, t) = \int_0^T \varphi(t - \tau) f(\tilde{y}(\tau)) d\tau, \quad (7)$$

получим:

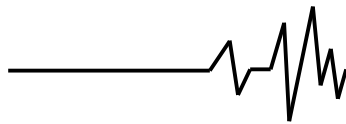
$$\left. \begin{aligned} p_1(\mathbf{u}) &= T\alpha_0\gamma_0, \\ p_{2j}(\mathbf{u}) &= \frac{T}{2} (\alpha_{r_j}\gamma_{r_j} - \beta_{r_j}\delta_{r_j}), \\ p_{2j+1}(\mathbf{u}) &= \frac{T}{2} (\alpha_{r_j}\delta_{r_j} + \beta_{r_j}\gamma_{r_j}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если ввести в рассмотрение вектор

то вектор  $\mathbf{p}(\mathbf{u}) = [p_1, p_2, \dots, p_{2m+1}]^T$ , составленный из указанных коэффициентов, можно представить следующим образом:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \frac{T}{2} \mathbf{Gf}(\mathbf{u}). \quad (11)$$

Слагаемые в выражении функции



$$g(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^T \psi_i(t - \tau) M_i(\tau) d\tau. \quad (12)$$

имеют структуру правой части формулы (7), поэтому вектор, составленный из коэффициентов соответствующих порядков этой функции, запишется аналогично (11) в виде

$$\mathbf{g} = \frac{T}{2} \sum_{i=1}^k \mathbf{Q}_i \mathbf{M}_i, \quad (13)$$

где  $\mathbf{Q}_i$  – матрица, имеющая структуру матрицы  $\mathbf{G}$ , но составленная из коэффициентов гармоник соответствующих порядков ИЧХ  $\psi_i(t)$ ;  $\mathbf{M}_i$  – вектор, аналогичный вектору  $\mathbf{f}$ , но составленный из коэффициентов гармоник соответствующих порядков функции  $M_i(t)$ .

Таким образом интегральному уравнению (1) соответствует система нелинейных уравнений

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \mathbf{g} - \mathbf{u} \quad (15)$$

и представим эту систему уравнений в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0. \quad (16)$$

Итерационный процесс ее решения методом Ньютона осуществляется с помощью выражения [10]

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - [\mathbf{F}'(\mathbf{u}_n)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{u}_n),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{2}{T} \int_0^T f'_y(\tilde{y}_n(\tau)) d\tau, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u_{2m}} = \frac{\partial f_{2m}}{\partial u_1} = \frac{2}{T} \int_0^T f'_y(\tilde{y}_n(\tau)) \cos r_m \omega \tau d\tau,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_{2m+1}} = \frac{\partial f_{2m+1}}{\partial u_1} = \frac{2}{T} \int_0^T f'_y(\tilde{y}_n(\tau)) \sin r_m \omega \tau d\tau,$$

$$\frac{\partial f_{2m}}{\partial u_{2m}} = \frac{2}{T} \int_0^T f'_y(\tilde{y}_n(\tau)) \cos r_m \omega \tau \cos r_m \omega \tau d\tau,$$

$$\frac{\partial f_{2m}}{\partial u_{2m+1}} = \frac{\partial f_{2m+1}}{\partial u_{2m}} = \frac{2}{T} \int_0^T f'_y(\tilde{y}_n(\tau)) \cos r_m \omega \tau \sin r_m \omega \tau d\tau,$$

$$\frac{\partial f_{2m+1}}{\partial u_{2m+1}} = \frac{2}{T} \int_0^T f'_y(\tilde{y}_n(\tau)) \sin r_m \omega \tau \sin r_m \omega \tau d\tau,$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots), \quad (17)$$

из которого вытекает, что на  $n$ -й итерации необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}_n) \mathbf{v}_n = -\mathbf{F}(\mathbf{u}_n), \quad (18)$$

где  $\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}'(\mathbf{u})$  – матрица Якоби функции  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ .

Тогда  $n + 1$  приближение определится по формуле

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (19)$$

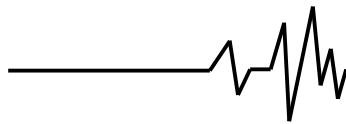
Из формулы (15) с учетом выражений (11) и (13) следует, что

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \mathbf{G} \mathbf{S}_n - \mathbf{E}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица, а матрица  $\mathbf{S}_n$  имеет следующую структуру:

$$\mathbf{S}_n = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_{2m}} & \frac{\partial f_1}{\partial u_{2m+1}} \\ \frac{\partial f_{2m}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{2m}}{\partial u_{2m}} & \frac{\partial f_{2m}}{\partial u_{2m+1}} \\ \frac{\partial f_{2m+1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_{2m+1}}{\partial u_{2m}} & \frac{\partial f_{2m+1}}{\partial u_{2m+1}} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Выражения для ее элементов получим с учетом правила дифференцирования под интегралом [11] соответствующих выражений из (6), определяя производную как от сложной функции:



т.е. матрица оказывается симметричной. Непосредственное использование этих формул связано со значительными вычислительными затратами. Вычисление элементов матрицы существенно упрощается, если производную  $f'_y(\tilde{y}_n(\tau))$  предварительно представить рядом Фурье

$$f'_y(\tilde{y}_n(\tau)) = h_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (h_i \cos i\omega\tau + q_i \sin i\omega\tau), \quad (22)$$

и произведения косинусов, синусов, косинусов и синусов преобразовать к суммам. В результате матрица  $S_n$  приобретает следующий вид:

$$S_n = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 2h_0 & h_{r_1} & q_{r_1} & \dots & h_{r_m} & q_{r_m} \\ h_{r_1} & h_0 + \frac{h_{r_1+r_1}}{2} & \frac{q_{r_1+r_1}}{2} & \dots & \frac{h_{r_m-r_1} + h_{r_m+r_1}}{2} & \frac{q_{r_m-r_1} + q_{r_m+r_1}}{2} \\ q_{r_1} & \frac{q_{r_1+r_1}}{2} & h_0 - \frac{h_{r_1+r_1}}{2} & \dots & \frac{-q_{r_m-r_1} + q_{r_m+r_1}}{2} & \frac{h_{r_m-r_1} - h_{r_m+r_1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{r_m} & \frac{h_{r_m-r_1} + h_{r_m+r_1}}{2} & \frac{-q_{r_m-r_1} + q_{r_m+r_1}}{2} & \dots & h_0 + \frac{h_{r_m+r_m}}{2} & \frac{q_{r_m+r_m}}{2} \\ q_{r_m} & \frac{q_{r_m-r_1} + q_{r_m+r_1}}{2} & \frac{h_{r_m-r_1} - h_{r_m+r_1}}{2} & \dots & \frac{q_{r_m+r_m}}{2} & h_0 - \frac{h_{r_m+r_m}}{2} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Окончательно формула (18) запишется так:

$$(GS_n - E)v_n = w_n, \quad (24)$$

где

$$w_n = -F(u_n) = u_n - p_n - g, \quad (25)$$

причем  $p_n = p(u_n)$ .

Отметим, что формулы итерационного процесса (19), (24) и (25) полностью совпадают с формулами численной реализации МНК для нелинейных интегральных уравнений [9].

**2. Глобально сходящийся алгоритм решения интегральных уравнений.** При удачном выборе начального приближения предложенный алгоритм локально квадратично сходится. Если же текущее приближение  $u_k$  не находится вблизи от какого-либо решения  $u_*$  задачи (16), то значение  $u_{k+1}$ , найденное по формуле (17), будем брать в качестве следующего приближения только тогда, когда для евклидовой ( $l_2$ ) нормы функции  $F(u)$

выполнится условие  $\|F(u_{k+1})\|_2 < \|F(u_k)\|_2$ .

Так как для квадрата нормы справедливо выражение  $\|F(u)\|_2^2 = F(u)^T F(u)$ , то шаг, приводящий к уменьшению  $\|F(u)\|_2$ , приведет очевидно к уменьшению и функции

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{2} F(u)^T F(u), \quad (26)$$

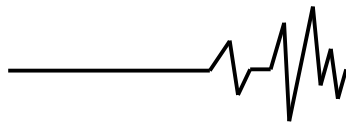
где коэффициент  $1/2$  введен для удобства выкладок. Таким образом в качестве подходящего шага может быть взят очередной шаг алгоритма, который минимизирует функцию (26).

Направлением убывания функции (26) служит произвольное направление  $d$ , для которого

$$\nabla \tilde{f}(u_k)^T d < 0. \quad (27)$$

Для градиента функции  $\nabla \tilde{f}(u_k)^T$  имеем

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{f}(u_k) &= \left[ \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u_{2m+1}} \right]^T = \frac{d}{du} \sum_{i=1}^{2m+1} \frac{1}{2} (F_i(u_k))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{2m+1} \nabla F_i(u_k) \cdot F_i(u_k) = J(u_k)^T \cdot F(u_k). \end{aligned}$$



Следовательно, направление наискорейшего спуска для функции (26) будет направлено вдоль антиградиента  $-\mathbf{J}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_k)$ . Чрезвычайно важным является то, что ньютоновское направление (см. формулу (17)) вдоль  $\mathbf{v}_k = -\mathbf{J}(\mathbf{u}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{u}_k)$  также является направлением спуска. Действительно, в этом случае условие (27)

$$\begin{aligned} m_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \mathbf{M}_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{v})^T \mathbf{M}_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_k) + \left( \mathbf{J}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_k) \right)^T \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \left( \mathbf{J}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{u}_k) \right) \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (28)$$

так как  $m_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{v}) \geq 0$  для всех  $\mathbf{v}$  и  $m_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k) = 0$ . Это означает, что  $\mathbf{v}_k$  представляет собой направление спуска для  $m_k$ , и поскольку  $\nabla m(\mathbf{u}_k) = \nabla \tilde{f}(\mathbf{u}_k)$ , т.е. градиенты функций  $m_k$  и  $\tilde{f}$  совпадают в точке  $\mathbf{u}_k$ , то оно также является направлением спуска для  $\tilde{f}$ . Так как для функции  $m_k$  матрица Гессе  $\nabla^2 m(\mathbf{u}_k) = \mathbf{J}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{u}_k)$ , то рассматриваемая модель положительно определена всякий раз, когда  $\mathbf{J}(\mathbf{u}_k)$  не вырождено.

Будем пользоваться следующим простым положением включения метода Ньютона в глобально сходящийся алгоритм. На каждой итерации применяем сначала метода Ньютона и, если шаг окажется приемлемым, т.е.  $\tilde{f}$  уменьшается, то используем именно его. Если же – нет, то обращаемся к шагу, который предписывает глобальный метод. Такая стратегия будет всегда заканчиваться использованием вблизи от решения метода Ньютона, и поэтому будет сохранять высокую скорость его локальной сходимости.

Естественной стратегией для продвижения из приближенного решения, находящегося вне области сходимости метода Ньютона, будет метод линейного поиска. Выбираем направление  $\mathbf{v}_k$  из текущей точки  $\mathbf{u}_k$ , вдоль которого  $\tilde{f}$  начинает уменьшаться,

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{f}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{v}_k &= -\mathbf{F}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{J}(\mathbf{u}_k) \mathbf{J}(\mathbf{u}_k)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{u}_k) = \\ &= -\mathbf{F}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_k) < 0 \end{aligned}$$

выполняется всякий раз, когда  $\mathbf{F}(\mathbf{u}_k) \neq 0$ . Это связано с тем, что ньютоновский шаг не только дает корень для локальной аффинной модели [10]

$$\mathbf{M}_k(\mathbf{u}_k + \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{u}_k) \mathbf{v},$$

но также приводит в точку минимума квадратичной функции

и новую точку  $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \lambda_k \mathbf{v}_k$  ( $\lambda_k > 0$ ) в этом направлении такую, что

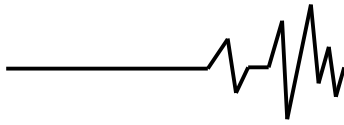
$$\tilde{f}(\mathbf{u}_{k+1}) < \tilde{f}(\mathbf{u}_k) + \alpha \lambda_k \nabla \tilde{f}(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{v}_k, \quad (29)$$

где  $\alpha$  – постоянный коэффициент.

В качестве  $\mathbf{v}_k$  следует взять квазиньютоновское направление  $-\mathbf{H}_k^{-1} \nabla \tilde{f}(\mathbf{u}_k)$ , где  $\mathbf{H}_k$  есть либо матрица Гессе  $\nabla^2 \tilde{f}(\mathbf{u}_k)$ , либо ее аппроксимация.

Условие  $\tilde{f}(\mathbf{u}_{k+1}) < \tilde{f}(\mathbf{u}_k)$ , несмотря на его простоту, использовать практически нецелесообразно, так как оно не гарантирует сходимости к точке минимума функции. В настоящее время установлено [10], что сначала следует сделать полный квазиньютоновский шаг, и если  $\lambda_k = 1$  не удовлетворяет используемому критерию, то дробить методично длину шага вдоль квазиньютоновского направления. Нарушение этого правила приводит к потере того преимущества, которое имеет метод Ньютона вблизи от решения. Дробление шага необходимо осуществлять до тех пор, пока не выполнится условие (29). Заметим, что брать в качестве  $\mathbf{v}_k$  направление наискорейшего спуска  $-\nabla \tilde{f}(\mathbf{u}_k)$  нерационально, так как сходимость в этом случае будет линейной, а иногда очень медленной линейной [10].

При численной реализации коэффициент  $\alpha$  выбирается из соображений того, чтобы средняя скорость убывания функции  $\tilde{f}(\mathbf{u})$  в направлении спуска составляла заданную



долю от первоначальной скорости убывания в этом направлении. На практике целесообразно применять  $\alpha = 10^{-4}$  [10].

Выбор  $\lambda_k$  основан на использовании одномерного сечения функции  $\tilde{f}$ , проходящего через точку  $\mathbf{u}_k$  в направлении  $\mathbf{v}_k$ .

При почти вырожденной матрице  $\mathbf{J}_k$  в текущей точке невозможно аккуратное вычисление ньютоновского направления  $\mathbf{v}_k = -\mathbf{J}(\mathbf{u}_k)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}_k)$ , поэтому в матрицу вводится соответствующее возмущение.

Алгоритм решения системы нелинейных уравнений реализован с использованием диагональной матрицы для масштабирования  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  [10].

Процедура глобальной минимизации может сойтись к точке локального минимума функции (26), которая не является корнем уравнения (16). В этом случае необходимо

сделать попытку начать счет заново вблизи корня  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ .

**3. Исследование субгармонических колебаний в приводе турбонаддува транспортного ДВС.** Программная реализация глобально сходящегося алгоритма применена для расчетов субгармонических колебаний в приводе к турбине и нагнетателю транспортного дизеля, которые первоначально были обнаружены при его доводке. Указанные колебания носят ярко выраженный многозначный характер. Использование разных начальных условий позволило без труда построить все ветви кривых вынужденных субгармонических колебаний, что и подтверждает эффективность предложенного метода. Причиной колебаний является первая гармоника в возмущающем моменте двигателя, возникающая из-за его разрегулировки, которая при наличии нелинейного упругого элемента и порождает опасные колебания на рабочих оборотах. На рис. 1. представлена крутильная схема дизеля, связанного с потребителями (гидротормоза) эластичными муфтами с упругими втулками.

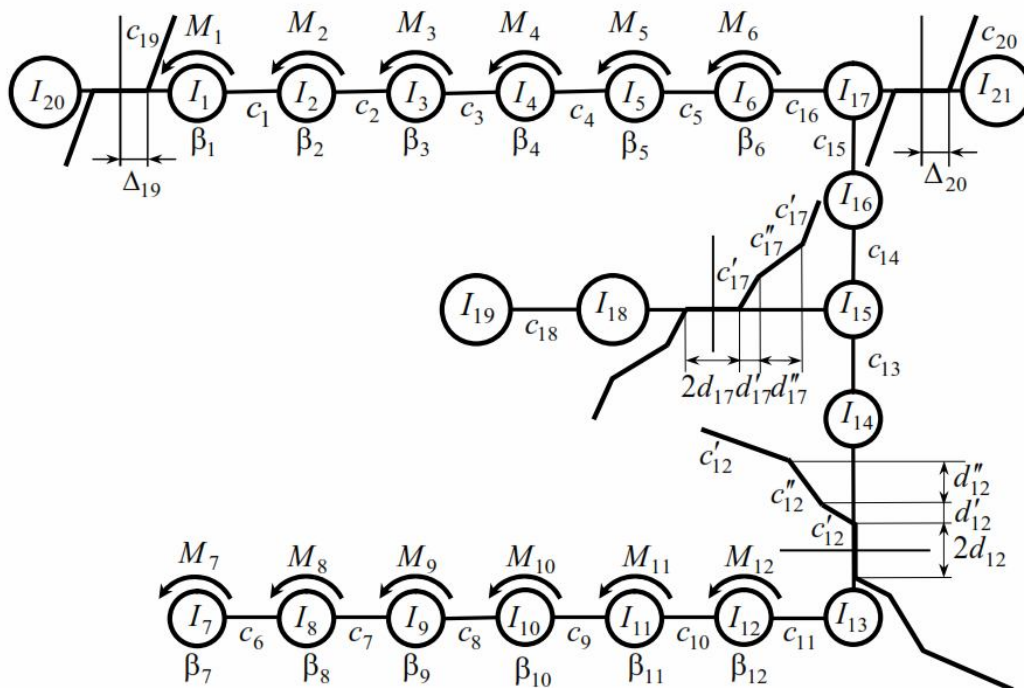
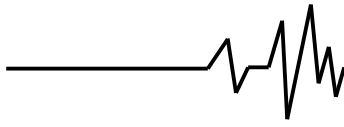


Рис. 1. Модель машинного агрегата с двухвальным двигателем

Кроме нелинейной характеристики муфты, учитывающей технологические зазоры в шестернях главной передачи, показаны нелинейности к потребителям, обусловленные наличием зазоров в шлицевых соединениях, а также нелинейная характеристика муфты с

предварительным натягом в приводе турбины и компрессора (рис. 2) с учетом зазоров. Приняты следующие обозначения:  $I_1 \div I_6$ ,  $I_7 \div I_{12}$  – соответственно цилиндрические массы



выпускного и впускного валов;  $I_{13} \div I_{17}$  – шестерни главной передачи;  $I_{18}$  – компрессор;  $I_{19}$  – турбина;  $I_{20}, I_{21}$  – гидротормоза;  $C_1 \div C_{20}$  – коэффициенты жесткостей;  $\beta_1 \div \beta_{12}$  – коэффициенты вязкого сопротивления на цилиндрических массах;  $M_1 \div M_{12}$  – возмущающие моменты на цилиндрических

массах;  $c'_{17} = 2,08 \cdot 10^4$  Нм,  $c''_{17} = 1,16 \cdot 10^5$  Нм,  $d'_{17} = 0,03$  рад – параметры нелинейной характеристики;  $M_{cp} = 300$  Нм – средний момент, передаваемый нелинейным соединением в приводе турбины и компрессора.

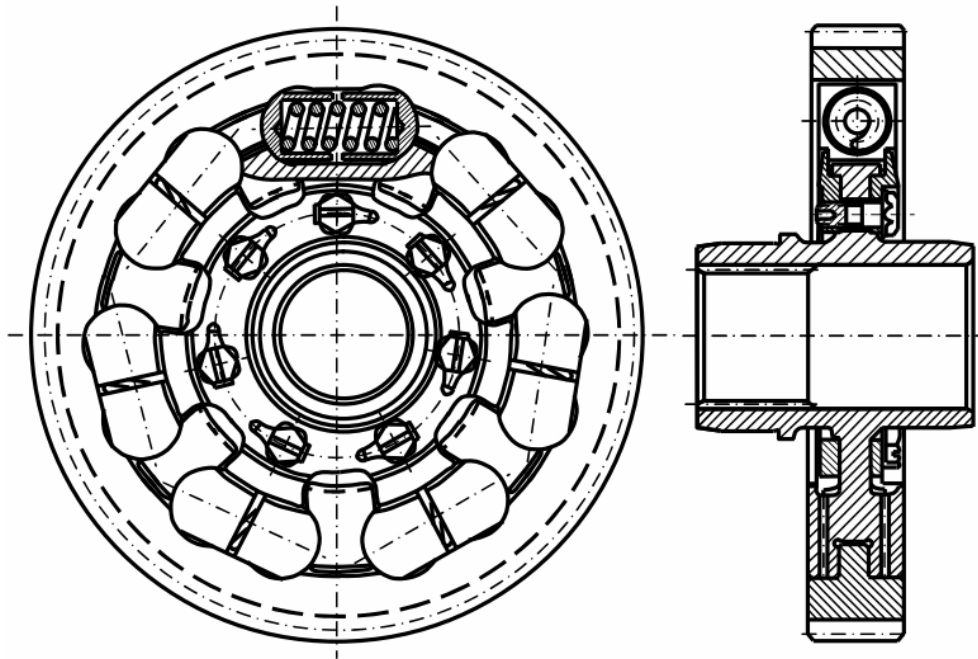


Рис. 2. Упругая муфта привода компрессора и турбины

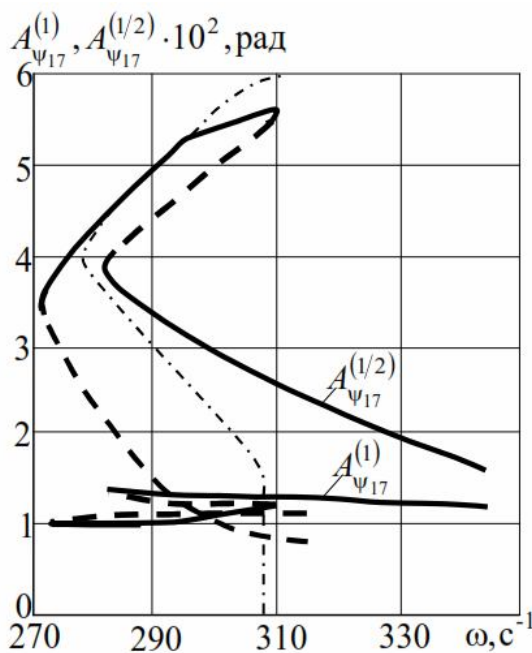


Рис. 3. Субгармонический резонанс

Субгармонические колебания второго порядка рассчитывались от основной – первой гармоники; возмущение на цилиндрических массах задавалось в виде

$$M_c^{(k)} \cos \omega t + M_s^{(k)} \sin \omega t \quad (k = 1, 2),$$

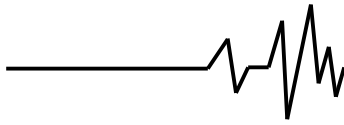
где  $M_c^{(k)}, M_s^{(k)}$  – амплитуды соответственно косинусных и синусных составляющих момента, полученные расчетно-экспериментальным способом:

$$M_c^{(1)} = -11,5 \text{ Нм}, \quad M_s^{(1)} = 8,54 \text{ Нм},$$

$$M_c^{(2)} = -7,06 \text{ Нм}, \quad M_s^{(2)} = 13,6 \text{ Нм}.$$

На рис. 3 показаны зависимости амплитуд основной гармоники  $A_{\Psi_{17}}^{(1)}$  и субгармоники второго порядка  $A_{\Psi_{17}}^{(1/2)}$  от частоты возбуждения (штриховые линии соответствуют неустойчивым колебаниям).





Штрихпунктирная линия представляет собой соответствующую скелетную кривую, перестроенную для удвоенных значений частот. Из анализа графиков следует, что субгармонические колебания формируются вблизи скелетной кривой [4], носят многозначный характер и достигают значительного уровня.

На рис. 4 приведен характерный образец осциллограммы, записанной при

субгармоническом ( $\omega = 298 \text{ с}^{-1}$ ) резонансе при максимальной разрегулировке.

В результате расчетно-экспериментальных исследований из нескольких типов нелинейных соединений выбрана конструкция, для которой уровень субгармонических колебаний существенно ниже, а при ликвидации технологических зазоров они исчезают вовсе.

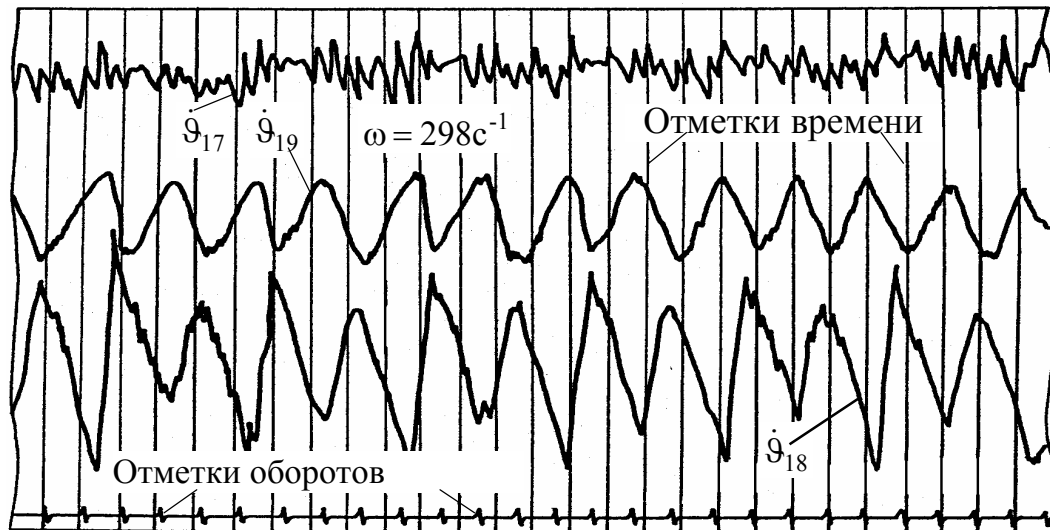


Рис. 4. Осциллограммы угловых скоростей при субгармоническом резонансе

### Выводы

1. Разработан глобально сходящийся метод, обеспечивающий сходимость к некоторому решению системы интегральных уравнений установившихся динамических процессов в нелинейных моделях машинных агрегатов почти из любого начального приближения; уравнения записываются с помощью ИЧХ линеаризованных моделей.

2. Разработан численный алгоритм реализации формул метода Ньютона-Канторовича с использованием координатных (базисных) функций, позволивший решениям придать такую форму, чтобы он естественным образом включался в процедуру глобально сходящегося алгоритма.

3. Приведены результаты расчетно-экспериментальных исследований по снижению динамических нагрузок в машинном агрегате двухвального транспортного двигателя; установлены причины возникновения субгармонических колебаний.

4. Предложенные математические модели установившихся динамических процессов в силовых передачах машинных

агрегатов, методы их исследования имеют широкие перспективы для моделей, в которых число нелинейных элементов меньше числа степеней свободы.

### Список использованных источников

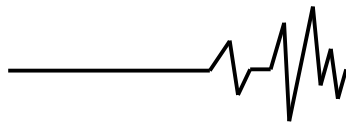
1. Вибрации в технике: В 6-ти т. / Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова.– М.: Машиностроение, 1980.– т.3.– 544 с.

2. Шатохин В.М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин: Монография / В.М. Шатохин.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.

3. Терских В.П. Крутильные колебания валопровода силовых установок. Исследования и методы расчета / В.П. Терских.– Л.: Судостроение, 1970.– т.3.– 272 с.

4. Вульфсон И.И. Нелинейные задачи динамики машин / И.И. Вульфсон, М.З. Коловский.– Л.: Машиностроение, 1968.– 284 с.

5. Рогачев В.М. О линеаризации нелинейных систем с многочастотным режимом колебаний / В.М. Рогачев //



Прикладная механика.– 1974.– т. X.–вып. 1.– С. 130-134.

6. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М.З. Коловский.– М.: Наука, 1966.– 317 с.

7. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев.– М.: Наука, 1981.– 400 с.

8. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы исследования периодических колебаний / А.М. Самойленко.– Киев: Вища школа, 1976.– 180 с.

9. Шатохин В.М. Исследование установившихся динамических процессов в нелинейных моделях машинных агрегатов с использованием интегральных уравнений движения / В.М. Шатохин, Н.В. Шатохина // Вібрації в техніці та технологіях.– 2015.– № 4 (80).– С. 96-104.

10. Дэннис Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель.– М.: Мир, 1988.– 440 с.

11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т. 2 / Г.М. Фихтенгольц.– М.: Физматгиз, 1960.– 464 с.

#### Список источников в транслитерации

1. Vibratsii v tekhnike: V 6-ti t. / Pod red. F.M. Dimentberga i K.S. Kolesnikova.– М.: Mashinostroenie, 1980.– т.3. – 544 с.

2. Shatokhin V.M. Analiz i parametriceskogo sintez nelineynykh silovykh peredach mashin: Monografiya / V.N. Shatokhin. – Khar'kov: NTU "KHP", 2008. – 456 с.

3. Terskikh V.P. Krutilnye kolebaniya valoprovoda silovykh ustanovok. Issledovaniya i metody rascheta / V.P. Terskikh.– L.: Sudostroenie, 1970.– т.3.– 272 с.

4. Vulfson I.I. Nelineinye zadachi dinamiki mashin / I.I. Vulfson, M.Z. Kolovskiy.– L.: Mashinostroenie, 1968.– 284 с.

5. Rogachev V.M. O linearizatsii nelineynykh sistem s mnogochastotnym rezhimom kolebaniy / V.M. Rogachev // Prikladnaya mekhanika.– 1974.– т. X.–вып. 1.– С. 130-134.

6. Kolovskiy M.Z. Nelineynaya teoriya vibrozashitnykh sistem / M.Z. Kolovskiy.– М.: Наука, 1966.– 317 с.

7. Moiseev N.N. Asimptoticheskie metody nelineynoy mekhaniki / N.N. Moiseev.– М.: Nauka, 1981.– 400 с.

8. Samoilenko A.M. Chislennno-analiticheskie metody issledovaniya periodicheskikh kolebaniy / A.M. Samoilenko.– Киев: Vischa shkola, 1976.– 180 с.

9. Shatokhin V.M. Issledovanie ustanovivshisya dinamicheskikh protsessov v nelineynykh modelyakh mashinnykh agregatov s ispolzovanie integralnykh uravneniy dvizheniya / V.M. Shatokhin, N.V. Shatohina // Vibratsiyi v tehniksi ta tehnologiyah.– 2015.– № 4 (80).– С. 96-104.

10. Dennis Dzh. Chislennyie metody bezuslovnoy optimizatsii i resheniya nelineynykh uravneniy / Dzh. Dennis, R. Shnabel.– М.: Mir, 1988.– 440 с.

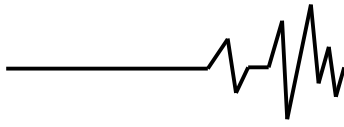
11. Fihntengolts G.M. Osnovy matematicheskogo analiza, т. 2 / G.M. Fihntengolts.– М.: Fizmatgiz, 1960.– 464 с.

#### ГЛОБАЛЬНО ЗБІЖНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ СТАЛИХ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ МОДЕЛЯХ МАШИНИХ АГРЕГАТИВ

**Анотація.** Запропоновано глобально збіжний алгоритм розв'язання інтегральних рівнянь сталих динамічних процесів у нелінійних моделях машинних агрегатів. Їхня кількість степенів вільності у більшості випадків перевершує кількість нелінійних з'єднань. Інтегральні рівняння руху записані за допомогою імпульсно-частотних характеристик (ІЧХ) лінеаризованих моделей; кількість рівнянь дорівнює кількості нелінійностей. Трудомісткість розв'язання задачі в цьому випадку практично не залежить від кількості степенів вільності моделі. Алгоритм забезпечує збіжність до деякого розв'язання системи нелінійних інтегральних рівнянь майже з будь-якого початкового наближення. Основна його ідея складається в комбінуванні стратегії глобальної збіжності зі стратегією високої локальної збіжності методу Ньютона-Канторовича (МНК) розв'язання інтегральних рівнянь. При числовій реалізації формул МНК використані координатні (базисні) функції для подання розв'язків.

Наведено результати розрахунково-експериментальних досліджень по зниженню динамічних навантажень у машинному агрегаті двохвального транспортного двигуна; встановлені причини виникнення субгармонічних коливань.

**Ключеві слова:** сталий динамічний процес, машинний агрегат, нелінійне інтегральне рівняння, імпульсно-частотна характеристика, глобальна збіжність, двигун внутрішнього згорання, субгармонічні коливання.



**GLOBALLY CONVERGENT ALGORITHM FOR  
SOLVING OF INTEGRAL EQUATIONS OF  
STABLE STEADY PROCESSES IN NONLINEAR  
MODELS OF MACHINE AGGREGATES**

**Annotation.** A globally convergent algorithm for solving of integral equations of stable steady processes in nonlinear models of machine aggregates is proposed. In most cases the number of degrees of freedom exceeds the number of nonlinear connections. Integral equations are written down using pulse-frequency characteristics of linearized models; the number of equations is equal to the number of nonlinearities. The laboriousness of task solving in this case almost does not depend on the model's number of degrees of freedom. The algorithm provides a convergence to the solution of some system of

nonlinear equations almost without any initial approximation. Its basic idea is in combination of the global convergence with a strategic of high local convergence of Newton-Kantorovich least-squares procedure (LSP) for solving of nonlinear equations. During the numerical implementation of LSP formula coordinate (basis) functions for representation of the solution were used. The results of computation-experimental research for decrease of dynamic loadings in the machine aggregate of the two-shaft transport engine are given; the reasons of subharmonic fluctuations appearance are established.

**Key words:** stable dynamic process, machine aggregate, nonlinear integral equation, pulse-frequency characteristic, global convergence, explosion engine aggregate, subharmonic oscillations.