

Цуркан О. В.

*Вінницький  
національний аграрний  
університет*

Величко Л. Д.

*Національна академія  
сухопутних військ  
імені гетьмана Петра  
Сагайдачного*

Присяжнюк Д. В.

*Ладизинський коледж  
Вінницького НАУ*

Tsurkan O. V.

*Vinnitsia National  
Agrarian University*

Velychko L. D.

*Hetman Petro  
Sahaidachnyi National  
Army Academy*

Prisyazhnyuk D. V.

*Ladyzhyn College of  
Vinnitsia NAU*

УДК 621.9.048

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІБРАЦІЙНОЇ СУШАРКИ З МАЯТНИКОВИМИ МЕХАНІЗМАМИ ВІЛЬНОГО ХОДУ

*В статті описана конструкція, принцип роботи розробленої вібраційної сушарки з подвійним маятниковим механізмом вільного ходу для приводу лопатей-перемішувачів в обертний рух. Представлена розрахункова схема і закони руху даної системи у вигляді рівнянь Лагранжа другого роду.*

*Ключові слова: зерно, післязбиральна обробка, сушіння, вібраційна сушарка, енерговитрати, маятниковий механізм вільного ходу, розрахункова модель, математична модель, рівняння Лагранжа другого роду.*

**Вступ.** Сушіння є одним з найважливіших етапів підготовки зерна до зберігання в сільськогосподарському виробництві. В даний час досить широкого поширення для виконання даного технологічного процесу знайшов конвективний метод сушіння. Але поряд зі своїми перевагами даний метод має і ряд вагомих недоліків, одним з істотних яких є значна енергоємність. У зв'язку з цим досить інтенсивно здійснюється науковий пошук по розробці шляхів і методів зниження енергоємності конвективного способу обробки [1].

Швидкими темпами відбувається впровадження ефектів вібраційного впливу на сировину в різних галузях промисловості.

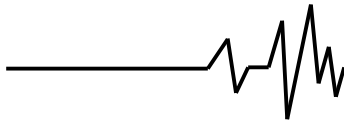
Використання вібротехнологій при сушінні інтенсифікує процес обробки зернової сировини за рахунок швидкого оновлення її поверхні, яка контактує з сушильним агентом.

**Викладення основного матеріалу.** Враховуючи переваги використання

вібротехнологій під час сушіння зернової сировини, у лабораторії кафедри процесів, машин та обладнання переробних і харчових виробництв імені професора

П.С. Берника Вінницького національного аграрного університету розроблена конструкція вібраційної зерносушарки, в якій за рахунок приводу лопатей-перемішувачів, що розміщені в сушильній камері, в обертний рух від маятникового механізму вільного ходу можна отримати значне зниження енерговитрат при виконанні даного технологічного процесу [2].

Вібраційна сушарка (рис. 1) містить сушильну камеру 1 U-подібної форми з перфорованим днищем 2б, яка встановлена на пружинах 2 і оснащена вібратором 3 та газорозподільною решіткою, що виконана як пустотілий циліндр 4 з перфорованою боковою поверхнею, який розміщений по осі сушильної камери 1 і на якому розміщені чотири лопаті-перемішувачі 10–13 з еластичними скребками



14–17. При цьому перша і друга лопаті–перемішувачі 10, 11 зі скребками 14, 15 встановлені з можливістю рухомого контакту з поверхнею перфорованого днища 26 сушильної камери 1, а третя та четверта лопаті–перемішувачі 12, 13 зі скребками 16, 17 встановлені з можливістю рухомого контакту з перфорованою поверхнею пустотілого циліндра 4, який встановлений на опорах 18, 19 і з однієї сторони з'єднаний з системою подачі–відбору сушильного агента 20. Крім того, лопаті–перемішувачі 10–13 з еластичними скребками 14–17 нерухомо з'єднані з корпусами 6, 7 підшипників 8, 9, які з'єднані з втулкою 21, на якій розміщено механізм вільного ходу 22 з маятниками 23 і 24, які знаходяться зовні сушильної камери 1, які через пружини 25 з'єднуються між собою та камерою 1.

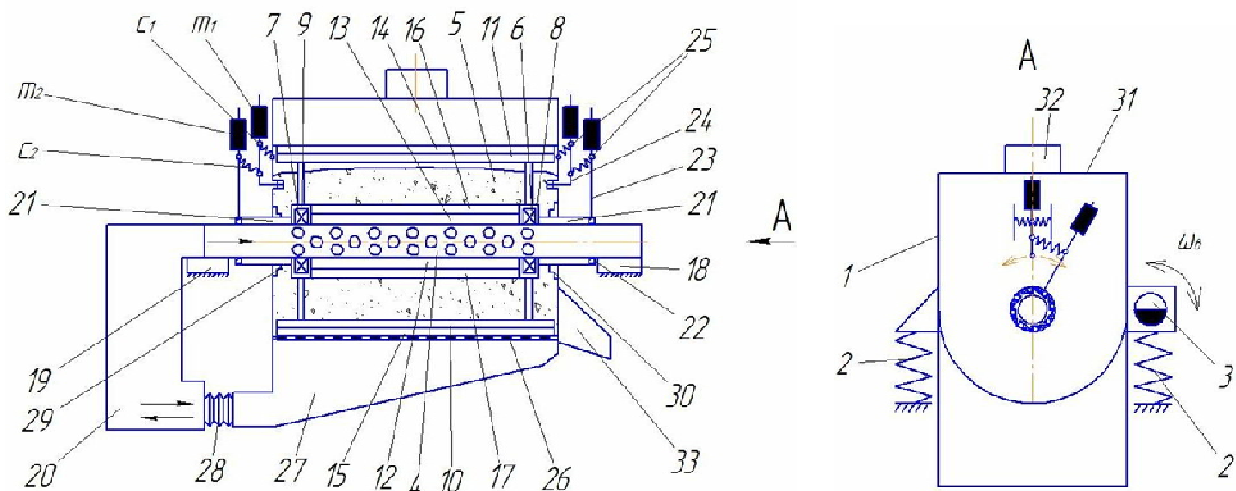
До нижньої частини сушильної камери встановлено всередині дифузор 27, який через пружне еластичне з'єднання 28 сполучений з системою подачі–відбору сушильного агента 20.

Сушильна камера 1, що ущільнена пружними вставками 29, 30, у верхній кришці 31 має завантажувальну горловину 32, а на рівні днища розташований розвантажувальний лоток 33.

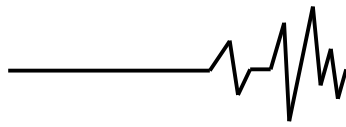
Вібраційна сушарка працює наступним чином. Від вібратора 3, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega_b$ , кругові коливання передаються в вертикальній площині U–

подібній камері 1, в торцях якої встановлені підпружинені маятники 24. Гармонійні коливання, що генеруються приводом, кінематично збуджують крутильні коливання маятників 24. Власні частоти коливань маятників із вантажами необхідно вибрати приблизно рівними частоті коливань камери, але вони не повинні дорівнювати одна одній, для створення їх протифазних коливань. Через пружини, які з'єднують маятники, крутильні коливання передаються від маятників 24 до маятників 23. Останні через механізми вільного ходу приводять в обертний рух втулки 21, виконані у вигляді внутрішніх обойм механізмів вільного ходу, які в свою чергу нерухомо з'єднані з корпусами 6, 7 підшипників 8, 9, які нерухомо з'єднані з лопатями–перемішувачами.

Крутильні коливання 23 перетворюються в обертний рух лопатей–перемішувачів. Завдяки пружним вставкам 29 між втулкою та камерою високочастотні коливання камери на пустотілий циліндр не передаються. Варіюючи величинами мас вантажів  $m_1$  і  $m_2$  та жорсткостями  $c_1$  і  $c_2$  у широких межах здійснюється регулювання величин крутного моменту і кутової швидкості обертання лопатей–перемішувачів. Крім того, через з'єднувальну пружину із жорсткістю  $c_2$  не передається вібрація, а тільки пружні деформації.



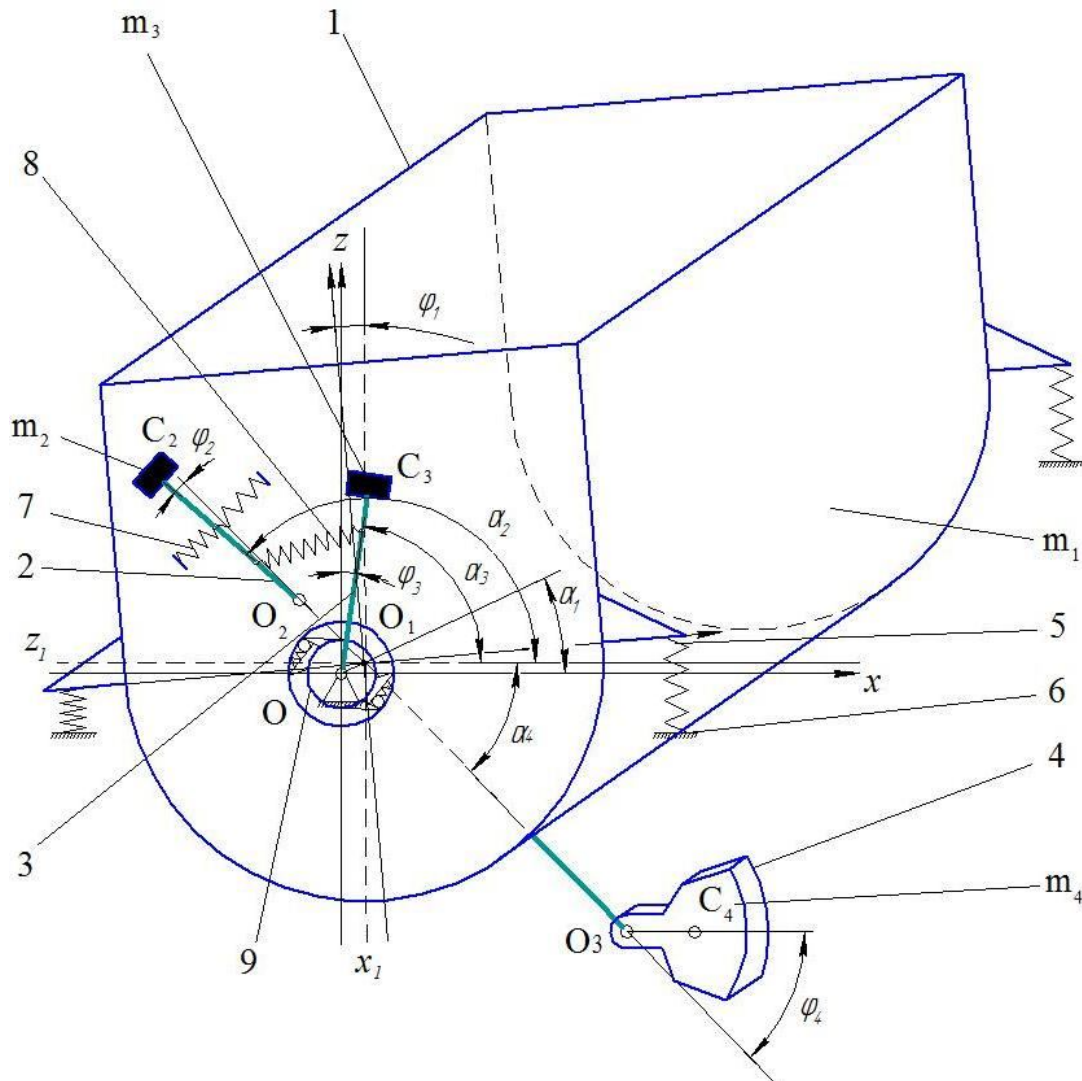
**Рис. 1. Вібраційна сушарка з маятниковим механізмом вільного ходу: 1 – камера U-подібної форми; 2 – пружини; 3 – віброзбудувач; 4 – пустотілий циліндр; 5 – зернова сировина; 6, 7 – корпуси підшипників; 8, 9 – підшипники; 10–13 – лопаті–перемішувачі; 14–17 – еластичні скребки; 18, 19 – опори; 20 – система подачі–відбору сушильного агента; 21 – втулка; 22 – механізм вільного ходу; 23, 24 – маятники; 25 – пружини; 26 – перфороване днище; 27 – дифузор; 28 – еластичне з'єднання; 29, 30 – пружні вставки; 31 – верхня кришка; 32 – завантажувальний отвір; 33 – розвантажувальний лоток**



Для математичного аналізу силових та кінематичних параметрів роботи пристрою складемо математичну модель [3] та розрахункову схему даної машини (рис. 2).

Робочий орган сушарки – камера 1, встановлена на рамі 6 через пружні опори 5. Коливний рух камери в вертикальній площині забезпечує дебаланс 4, який прикріплений до її зовнішньої стінки. На боковій стінці камери

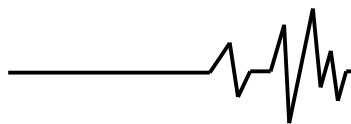
закріплений маятник 2 із вантажем масою  $m_2$ , положення якого у просторі забезпечується пружинами 7, які з'єднані із камерою 1. На осі порожнього циліндра 9, через механізм вільного ходу встановлений маятник 3 із вантажем масою  $m_3$ . Для передачі коливного руху від маятника 2 до маятника 3 служить пружний елемент 8.



**Рис. 2. Розрахункова схема вібраційної сушарки з маятниковими механізмами вільного ходу: 1 – камера; 2 – маятник з коливною точкою підвісу; 3 – маятник з неколивною точкою підвісу (механізмом вільного ходу); 4 – дебаланс; 5 – пружні опори; 6 – рама; 7, 8 – пружини; 9 – порожній циліндр**

Робочий орган сушарки – камера 1, встановлена на рамі 6 через пружні опори 5. Коливний рух камери в вертикальній площині забезпечує дебаланс 4, який прикріплений до її зовнішньої стінки. На боковій стінці камери закріплений маятник 2 із вантажем масою  $m_2$ , положення якого у просторі забезпечується

пружинами 7, які з'єднані із камерою 1. На осі порожнього циліндра 9, через механізм вільного ходу встановлений маятник 3 із вантажем масою  $m_3$ . Для передачі коливного руху від маятника 2 до маятника 3 служить пружний елемент 8.



Вводимо позначення [4]:

$m_1$  – маса камери 1;  $m_2$  – маса маятника 2;  $m_3$  – маса маятника 3;  $m_4$  – маса дебаланса 4;  $\varphi_1$  – кут обертання камери 1 (відраховується від рівноважного положення камери);  $\varphi_2$  – кут обертання маятника 2 (відраховується від рівноважного положення маятника);  $\varphi_3$  – кут обертання маятника 3 (відраховується від рівноважного положення маятника);  $\varphi_4$  – кут обертання дебаланса 4 (відраховується від рівноважного положення дебаланса);  $O$  – точка підвісу маятника 3 (центр нерухомої системи координат  $xOz$ );  $O_1$  – центр мас камери 1;  $C_2$  – центр мас маятника 2;  $C_3$  – центр мас маятника 3;  $C_4$  – центр мас дебаланса 4;  $x_1, z_1$  – координати центра мас  $O_1$  камери 1 відносно нерухомої системи координат  $xOz$ ;  $O_2$  – точка підвісу маятника 2;  $O_3$  – точка підвісу дебаланса 4;  $l_1 = O_2O_1$  – відстань від точки підвісу  $O_2$  маятника 2 до точки  $O_1$  центра мас камери 1;  $l_2 = C_2O_2$  – відстань від центра мас  $C_2$  маятника 2 до його точки підвісу  $O_2$ ;  $l_3 = C_3O$  – відстань від центра мас  $C_3$  маятника 3 до його точки підвісу  $O$ ;  $l_4 = C_4O_3$  – відстань від центра мас  $C_4$  дебаланса 4 до точки його підвісу  $O_3$ ;  $l_5 = O_3O_1$  – відстань від точки підвісу  $O_3$  дебаланса 4 до центра мас  $O_1$  камери 1;  $\alpha_1$  – кут, що визначає положення центра мас  $O_1$  камери 1 відносно горизонтальної осі  $x$ ;  $\alpha_2$  – кут нахилу маятника 2 до горизонтальної осі  $z_1$ ;  $\alpha_3$  – кут нахилу маятника 3 до горизонтальної осі  $z_1$ ;  $\alpha_4$  – кут нахилу точки підвісу  $O_3$  дебаланса 4 до горизонтальної осі  $z_1$ ;  $\vec{V}_1 = \dot{x}_1\vec{i} + \dot{z}_1\vec{k}$  – швидкість центра мас  $O_1$  камери 1;  $V_2$  – швидкість центра мас  $C_2$  маятника 2;  $V_4$  – швидкість центра мас  $C_4$  дебаланса 4;  $\vec{i}, \vec{k}$  – одиничні орти скеровані по осях  $Ox$  і  $Oz$  відповідно;  $I_1$  – момент інерції камери 1 відносно його центра мас  $O_1$ ;  $I_2$  –

момент інерції маятника 2 відносно його центра мас  $C_2$ ;  $I_3$  – момент інерції маятника 3 масою  $m_3$  відносно точки підвісу  $O$ ;  $I_4$  – момент інерції дебаланса 4 відносно центра мас  $C_4$ ;  $\dot{\varphi}_1(t) = \omega_1(t)$  – кутова швидкість камери 1;  $\omega_2(t) = \dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)$  – кутова швидкість маятника 2;  $\omega_3 = \dot{\varphi}_3$  – кутова швидкість обертання маятника 3;  $\omega_4 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4$  – кутова швидкість дебаланса 4;  $c_x$  – сумарна жорсткість пружин в напрямку осі  $Ox$ ;  $c_z$  – сумарна жорсткість пружин в напрямку осі  $Oz$ ;  $x_{10}$  – початкове положення координата центра мас  $O_1$  камери 1 відносно осі  $Ox$ ;  $z_{10}$  – початкове положення координата центра мас  $O_1$  камери 1 відносно осі  $Oz$ ;  $\delta_{cm}$  – статична деформація пружини у вертикальному напрямі;  $M_e(t)$  – момент, який створює електродвигун;  $M_{op}(t)$  – момент опору.

При складанні рівнянь робимо такі припущення:

- робоча камера є жорстким, твердим, недеформованим тілом;
- кутова швидкість обертання дебаланса стала.

Камера здійснює плоский рух, тому її кінетична енергія дорівнює:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2},$$

або

$$T_1 = \frac{m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2)}{2} + \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2}. \quad (1)$$

Маятник 2 здійснює плоский рух, тому його кінетична енергія дорівнює:

$$T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2}. \quad (2)$$

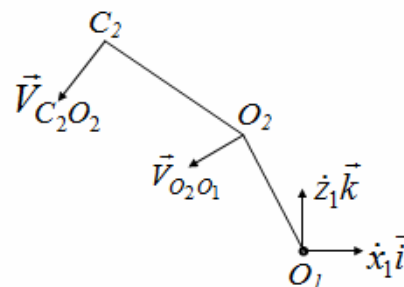
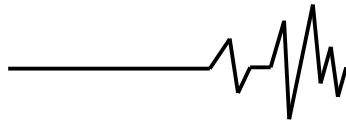


Рис. 3. План швидкостей для визначення швидкості точки  $C_2$



$$\vec{V}_{C_2} = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{O_2O_1} + \vec{V}_{C_2O_2}, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{V}_{O_1} &= \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{z}_1 \vec{k}, \quad V_{O_2O_1} = \dot{\varphi}_1 \cdot O_2O_1 = \dot{\varphi}_1 l_1, \\ V_{C_2O_2} &= (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot C_2O_2 = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Проектуючи рівняння (4) на осі координат отримаємо:

$$\begin{aligned} V_2^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 \cos^2(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2^2 \cos^2(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - \\ &- 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \\ &+ 2\dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \dot{z}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 \sin^2(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + \\ &+ (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2^2 \sin^2(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \\ &- 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \\ &+ 2\dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ). \end{aligned}$$

Здійснюючи математичні перетворення запишемо:

$$V_2^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2^2 - 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + 2\dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_1 l_2 \cos \varphi_2 + \dot{z}_1^2 - 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ).$$

Отже, кінетична енергія маятника з масою  $m_2$  дорівнює:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{m_2}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2^2 - 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \\ &- 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + 2\dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_1 l_2 \cos \varphi_2 + \dot{z}_1^2 - \\ &- 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \frac{I_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Маятник масою  $m_3$ , який здійснює коливальний рух, тому його кінетична енергія визначається з допомогою формули:

$$T_3 = \frac{I_3 \dot{\varphi}_3^2}{2}. \quad (6)$$

Дебаланс масою  $m_4$  здійснює плоский рух, тому його кінетична енергія:

$$T_4 = \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{I_4 \omega_4^2}{2}. \quad (7)$$

Швидкість точки  $C_4$  визначаємо використовуючи залежність:

$$\vec{V}_{C_4} = \vec{V}_{O_1} + \vec{V}_{O_3O_1} + \vec{V}_{C_4O_3}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \vec{V}_{O_1} &= \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{z}_1 \vec{k}, \quad V_{O_3O_1} = \dot{\varphi}_1 \cdot O_3O_1 = \dot{\varphi}_1 l_5, \\ V_{C_4O_3} &= (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) \cdot C_4O_3 = (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_4^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_5^2 \sin^2(\alpha_4 - \varphi_1) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4^2 \sin^2(\varphi_1 + \varphi_4) + 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - \\ &- 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) - 2\dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \end{aligned}$$

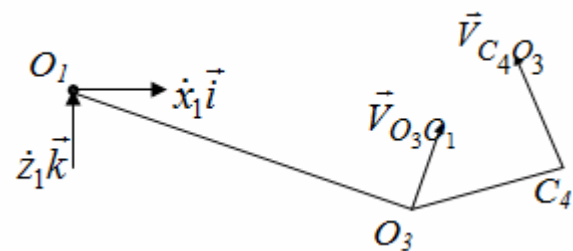
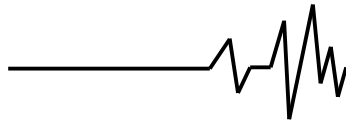


Рис. 4. План швидкостей для визначення швидкості точки  $C_4$

Проектуючи рівняння (8) на осі координат отримаємо:

$$\begin{aligned} V_{4x} &= \dot{x}_1 + \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4), \\ V_{4z} &= \dot{z}_1 + \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4). \end{aligned}$$

Тоді квадрат швидкості дорівнює:



$$+ \dot{z}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_5^2 \cos^2(\alpha_4 - \varphi_1) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4^2 \cos^2(\varphi_1 + \varphi_4) + 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + \\ + 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + 2\dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4).$$

Здійснюючи математичні перетворення запишемо:

$$V_4^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_5^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \\ + 2\dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4).$$

Отже, кінетична енергія дебаланса з масою  $m_4$  дорівнює:

$$T_4 = \frac{m_4}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_5^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \\ + 2\dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)) + \frac{I_4 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2}{2} \quad (10)$$

Враховуючи залежності (1), (5), (6) і (10) отримаємо, що сумарна кінетична енергія механічної системи дорівнює:

$$T = \frac{m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2)}{2} + \frac{I_1 \dot{\varphi}_1^2}{2} + \frac{I_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2}{2} + \frac{I_3 \dot{\varphi}_3^2}{2} + \frac{I_4 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2}{2} + \\ + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2^2 - 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \\ - 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + 2\dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_1 l_2 \cos \varphi_2 + \dot{z}_1^2 - \\ - 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ + \frac{m_4}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2 + \dot{\varphi}_1^2 l_5^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - 2\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \\ + 2\dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + 2\dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + 2\dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)). \quad (11)$$

Визначаємо ліві частини рівняння Лагранжа другого роду

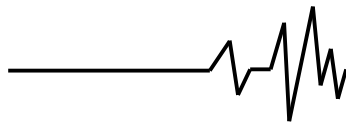
$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = m_2 (\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + \dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - \\ - \dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ + m_4 (-\dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) - \dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + \dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - \\ \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)), \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = m_2 (\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_1 l_2 \sin \varphi_2 - \\ - \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = m_4 (-\dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) - \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 l_5 \sin(\alpha_4 + \varphi_4) - \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{x}_1 - \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ + m_4 (\dot{x}_1 + \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)),$$

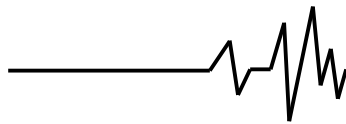
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} = m_1 \dot{z}_1 + m_2 (\dot{z}_1 - \dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ + m_4 (\dot{z}_1 + \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = I_3 \dot{\varphi}_3, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_1 \dot{\varphi}_1 + I_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + I_4 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) + m_2 (\dot{\varphi}_1 l_1^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2^2 -$$



$$\begin{aligned} & -\dot{x}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \dot{x}_1 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \\ & \quad - \dot{z}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \dot{z}_1 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \\ & \quad m_4 (\dot{\varphi}_1 l_5^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4^2 + \dot{x}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - \dot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \\ & \quad + (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \dot{z}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + \dot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)), \\ & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = I_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) + m_2 ((\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2^2 - \dot{x}_1 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \\ & \quad \dot{\varphi}_1 l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \dot{z}_1 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)), \\ & \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} = I_4 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) + m_4 ((\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4^2 - \dot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \dot{\varphi}_1 l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \dot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)), \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \\ & \quad + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ & + m_4 (\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) - \dot{\varphi}_1^2 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)), \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) = m_1 \ddot{z}_1 + m_2 (\ddot{z}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - \\ & \quad - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ & + m_4 (\ddot{z}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + \dot{\varphi}_1^2 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)), \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) = I_3 \ddot{\varphi}_3, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = I_1 \ddot{\varphi}_1 + I_2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + I_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) + m_2 (\ddot{\varphi}_1 l_1^2 + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2^2 - \\ & \quad - \ddot{x}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \ddot{x}_1 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \\ & \quad - \ddot{z}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \ddot{z}_1 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + \\ & \quad + \dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2 l_1 l_2 \sin \varphi_2 - \\ & \quad - \dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ & \quad + m_4 (\ddot{\varphi}_1 l_5^2 + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4^2 + \ddot{x}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - \ddot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \\ & \quad + (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \ddot{z}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + \ddot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) - \\ & \quad - \dot{x}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) - \dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) - (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) \dot{\varphi}_4 l_4 l_5 \sin(\alpha_4 + \varphi_4) + \\ & \quad + \dot{z}_1 \dot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)), \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = I_2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + m_2 ((\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2^2 - \ddot{x}_1 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \dot{\varphi}_1 l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \\ & \quad - \ddot{z}_1 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - \\ & \quad - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 l_1 l_2 \sin \varphi_2 - \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)), \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} \right) = I_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) + m_4 ((\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4^2 - \ddot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \dot{\varphi}_1 l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \\ & + \ddot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) - \dot{x}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) - \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 l_4 l_5 \sin(\alpha_4 + \varphi_4) - \dot{z}_1 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)), \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \ddot{\varphi}_2 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \end{aligned}$$





$$+ \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + m_4 (\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) - \dot{\varphi}_1^2 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)), (12)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial z_1} = m_1 \ddot{z}_1 + m_2 (\ddot{z}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \ddot{\varphi}_2 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + m_4 (\ddot{z}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + \dot{\varphi}_1^2 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)), (13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} = I_3 \ddot{\varphi}_3, (14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = I_1 \ddot{\varphi}_1 + I_2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + I_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) + m_2 (\dot{\varphi}_1 l_1^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2^2 - \ddot{x}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \ddot{x}_2 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \ddot{z}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \ddot{z}_2 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2 l_1 l_2 \sin \varphi_2) + m_4 (\dot{\varphi}_1 l_5^2 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4^2 + \ddot{x}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - \ddot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + (2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \ddot{z}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + \ddot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) - (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) \dot{\varphi}_4 l_4 l_5 \sin(\alpha_4 + \varphi_4)), (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = I_2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + m_2 ((\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_2^2 - \ddot{x}_2 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \ddot{\varphi}_1 l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \ddot{z}_1 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \dot{\varphi}_1^2 l_2 \sin(\varphi_2)), (16)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_4} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_4} = I_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) + m_4 ((\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4^2 - \ddot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \ddot{\varphi}_1 l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \ddot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + \dot{\varphi}_1^2 l_4 l_5 \sin(\alpha_4 + \varphi_4)). (17)$$

Визначення узагальнених сил.

Узагальнена сила за координатою  $x_1$  дорівнює:

$$Q_{x1} = -c_x (x_1 - x_{10}), (18)$$

В початковому положенні координати центра мас  $O_1$  камери 1 відносно осі  $Ox$  узагальнена сила  $Q_{x1}$  дорівнює нулеві.

Узагальнена сила за координатою  $z_1$  дорівнює:

$$Q_{z1} = -c_z (z_1 - z_{10} - \delta_{cm}) - m_1 g - m_2 g - m_4 g, (19)$$

У початковому положенні координати центра мас  $O_1$  камери 1 відносно осі  $Oz$  узагальнена сила  $Q_{z1}$  дорівнює нулеві, тобто:

$$c_z \delta_{cm} - m_1 g - m_2 g - m_4 g = 0. (20)$$

Отже, узагальнена сила за координатою  $z_1$  дорівнює

$$Q_{z1} = -c_z (z_1 - z_{10}). (21)$$

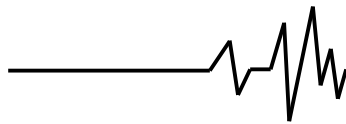
Для визначення узагальненої сили за координатою  $\varphi_3$  надамо їй можливе переміщення  $d\varphi_3$ , тоді елементарна робота всіх сил на цьому переміщенні дорівнює:

$$dA = -P_3 l_3 \cos(\alpha_3 + \varphi_3) d\varphi_3 + c_{23} (\delta_{cm23} + \varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_3 \sin \beta_{32} d\varphi_3. (22)$$

Отже, узагальнена сила за координатою  $\varphi_3$  дорівнює:

$$Q_{\varphi_3} = -P_3 l_3 \cos(\alpha_3 + \varphi_3) + c_{23} (\delta_{cm23} + \varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_3 \sin \beta_{32}. (23)$$





Враховуючи, що в початковий момент часу механічна система перебуває в стані спокою, тоді в рівноважному стані повинне виконуватись співвідношення:

$$-P_3 l_3 \cos \alpha_3 + c_{23} \delta_{cm23} d_3 \sin \beta_{32} = 0. \quad (24)$$

Внаслідок малості величини кута  $\varphi_3$  можна вважати, що:

$$\cos(\alpha_3 + \varphi_3) = \cos \alpha_3 - \varphi_3 \sin \alpha_3.$$

Тоді залежність (23) з врахуванням (24) набуде вигляду:

$$Q_{\varphi_3} = P_3 l_3 \varphi_3 \sin \alpha_3 + c_{23} (\varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_3 \sin \beta_{32}. \quad (25)$$

Для визначення узагальненої сили за координатою  $\varphi_1$  надамо їй можливе переміщення  $d\varphi_1$ , тоді елементарна робота всіх сил на цьому переміщенні дорівнює:

$$dA = -c_{\varphi_1} (\varphi_{cm1} + \varphi_1) d\varphi_1 + P_2 (l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + d_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) d\varphi_1 - \\ - c_{23} (\delta_{cm23} + \varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) (l_1 + d_2 \cos \varphi_2) \sin \beta_{32} d\varphi_1 - \\ - P_4 (l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)) d\varphi_1.$$

Отже, узагальнена сила за координатою  $\varphi_1$  дорівнює:

$$Q_{\varphi_1} = -c_{\varphi_1} (\varphi_{cm1} + \varphi_1) + P_2 (l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + d_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) - \\ - c_{23} (\delta_{cm23} + \varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) (l_1 + d_2 \cos \varphi_2) \sin \beta_{32} - \\ - P_4 (l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)). \quad (26)$$

Враховуючи, що в початковий момент часу механічна система перебуває в стані спокою, тоді повинне виконуватись співвідношення:

$$-c_{\varphi_1} \varphi_{cm1} + P_2 (l_1 \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + d_1 \sin(\alpha_2 - 90^\circ)) - c_{23} \delta_{cm23} (l_1 + d_2 \cos \varphi_2) \sin \beta_{32} - P_4 (l_5 \cos \alpha_4 + l_4) = 0.$$

Враховуючи цю залежність і (26) отримаємо, що узагальнена сила по координаті  $\varphi_1$  дорівнює:

$$Q_{\varphi_1} = -c_{\varphi_1} \varphi_1 + P_2 (l_1 \varphi_1 \cos(\alpha_2 - 90^\circ) + d_1 (\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) - \\ - c_{23} (\varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) (l_1 + d_2 \cos \varphi_2) \sin \beta_{32} - \\ - P_4 (l_5 \varphi_1 \sin \alpha_4 + l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)). \quad (27)$$

Запишемо суму робіт на можливому переміщенні  $d\varphi_2$ :

$$dA = P_2 d_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) d\varphi_2 - c_2 (\varphi_{cm2} + \varphi_2) d_4^2 d\varphi_2 - \\ - c_{23} (\delta_{cm23} + \varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_2 \sin \beta_{23} d\varphi_2. \quad (28)$$

Отже, узагальнена сила за координатою  $\varphi_2$  дорівнює:

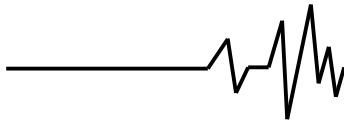
$$Q_{\varphi_2} = P_2 d_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - c_2 (\varphi_{cm2} + \varphi_2) d_4^2 - \\ - c_{23} (\delta_{cm23} + \varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_2 \sin \beta_{23}. \quad (29)$$

В початковий момент часу механічна система перебуває в стані спокою, тому в рівноважному стані повинне виконуватись співвідношення:

$$P_2 d_1 \sin(\alpha_2 - 90^\circ) - c_2 \varphi_{cm2} d_4^2 - c_{23} \delta_{cm23} d_2 \sin \beta_{23} = 0. \quad (30)$$

Враховуючи залежності (29) і (30) узагальнена сила запишеться у вигляді:

$$Q_{\varphi_2} = P_2 d_1 (\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\alpha_2 - 90^\circ) - c_2 \varphi_2 d_4^2 - \\ - c_{23} (\varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_2 \sin \beta_{23}. \quad (31)$$



Узагальнена сила за координатою  $\varphi_4$  дорівнює:

$$Q_{\varphi_4} = M_{\delta}(t) - M_{op}(t) - P_4 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_{cm1} + \varphi_4). \quad (32)$$

Отже, рівняння Лагранжа другого роду, які описують рух механічної системи, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \\ + \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ + m_4 (\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) - \\ - \dot{\varphi}_1^2 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)) = -c_x (x_1 - x_{10}), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + m_2 (\ddot{z}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - \\ - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ)) + \\ + m_4 (\ddot{z}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + \\ + \dot{\varphi}_1^2 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4)^2 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4)) = -c_z (z_1 - z_{10}), \end{aligned} \quad (34)$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 = -P_3 l_3 \varphi_3 \sin \alpha_3 + c_{23} (\varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_3 \sin \beta_{32}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + I_2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + I_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) + m_2 (\ddot{\varphi}_1 l_1^2 + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2^2 - \ddot{x}_1 l_1 \cos(\alpha_4 + \varphi_1 - 90^\circ) - \\ - \ddot{x}_1 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \ddot{z}_1 l_1 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 - 90^\circ) - \\ - \ddot{z}_1 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) - (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_2 l_1 l_2 \sin \varphi_2) + m_4 (\ddot{\varphi}_1 l_5^2 + (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4^2 + \ddot{x}_1 l_5 \sin(\alpha_4 - \varphi_1) - \\ - \ddot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \ddot{z}_1 l_5 \cos(\alpha_4 - \varphi_1) + \\ + \ddot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) - (2\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_4) \dot{\varphi}_4 l_4 l_5 \sin(\alpha_4 + \varphi_4)) = \\ - c_{\varphi_1} \varphi_1 + P_2 (l_1 \varphi_1 \cos(\alpha_2 - 90^\circ) + d_1 (\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) - \\ - c_{23} (\varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) (l_1 + d_2 \cos \varphi_2) \sin \beta_{32} - \\ - P_4 (l_5 \varphi_1 \sin \alpha_4 + l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4)). \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} I_2 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) + m_2 ((\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) l_2^2 - \ddot{x}_1 l_2 \cos(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \ddot{\varphi}_1 l_1 l_2 \cos \varphi_2 - \\ - \ddot{z}_1 l_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_1 + \varphi_2 - 90^\circ) + \dot{\varphi}_1^2 l_1 l_2 \sin \varphi_2) = P_2 d_1 (\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\alpha_2 - 90^\circ) - c_2 \varphi_2 d_4^2 - \\ - c_{23} (\varphi_1 (l_1 + d_2) \sin \beta_{23} + \varphi_2 d_2 \sin \beta_{23} - \varphi_3 d_3 \sin \beta_{32}) d_2 \sin \beta_{23}. \end{aligned} \quad (37)$$

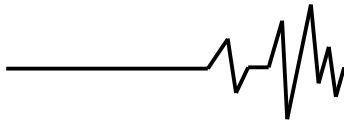
$$\begin{aligned} I_4 (\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) + m_4 ((\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_4) l_4^2 - \ddot{x}_1 l_4 \sin(\varphi_1 + \varphi_4) + \ddot{\varphi}_1 l_4 l_5 \cos(\alpha_4 + \varphi_4) + \\ + \ddot{z}_1 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_4) + \dot{\varphi}_1^2 l_4 l_5 \sin(\alpha_4 + \varphi_4)) = M_{\delta}(t) - M_{op}(t) - P_4 l_4 \cos(\varphi_1 + \varphi_{cm1} + \varphi_4) \end{aligned} \quad (38)$$

**Висновки.** Попередні експериментальні дослідження показали, що нові технічні рішення, реалізовані в цій розробці, дозволили приводити в обертання лопаті-перемішувачі без використання додаткового приводного механізму, що знизить енергетичні витрати на виконання технологічної дії та додатково інтенсифікує процес сушіння.

Аналітичний та чисельний розв'язок складених рівнянь надасть можливість перевірити адекватність розробленої математичної моделі отриманим експериментальним даним та вибрати раціональні робочі параметри вібраційної сушарки для виконання операції сушіння зерна у процесі його післязбиральної обробки.

#### Список використаних джерел

1. Цуркан О.В., Присяжнюк Д.В., Герасимов А.А., Коломиєць А.С. 2016. Особенности процесса и оборудования для сушки зернового сырья с использованием озона // MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Vol. 18. No.4. 37–44.
2. Паламарчук І.П., Цуркан О.В., Присяжнюк Д.В., Полевода Ю.А. Обґрунтування схеми віброозонуючої сушарки для післязбиральної обробки зерна // Наукові праці Національного університету харчових технологій.–2016. Том 22. № 6.–Київ, НУХТ.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию



механических колебаний / Я.Г. Пановко // – М.: Наука, 1971. – 192 с.

4. Берник П.С. Математична модель вібраційного змішувача із неколивним лопатевим валом та подвійним маятниковим віброімпульсним приводом / П.С. Берник, О.В. Цуркан, Л.Д. Величко // Всеукраїнський науково-технічний журнал „Вібрації в техніці і технологіях”. – 2003. – №6(32). – С.18–22.

5. Сердюк Л.И. Математическая модель управляемого вибросмесителя / Л.И. Сердюк, Л.М. Осина // Вибрации в технике и технологиях. – 1999. №2(11). – С.13 – 16 .

#### Список джерел в транслітерації

1. Tsurkan O.V., Prisyazhnyuk D.V., Gerasimov O.O., Kolomiyets O.S. 2016. Osobennosti protsessa i oborudovaniia dlia sushki zernovogo syr'ia s ispolzovaniem ozona // MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Vol. 18. No.4. 37–44.

2. Palamarchuk I.P., Tsurkan O.V., Prisyazhnyuk D.V., Polevoda Yu.A. Obgruntuvannya shemi vibroozonuyuchoyi susharki dlya pisyazbiralnoyi obrobki zerna // Naukovi pratsi Natsionalnogo universitetu harchovih tehnologiy. – 2016. Tom 22. № 6. – Kyiv, NUHT.

3. Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mehanicheskikh kolebaniy / Ya.G. Panovko // М.: Наука, 1971. – 192 с.

4. Бернак П.С. Математична модель вібраційного змішувача із неколивним лопатевим валом та подвійним маятниковим віброімпульсним приводом / П.С. Бернак, О.В. Цуркан, Л.Д. Вельченко // Всеукраїнський науково-технічний журнал „Вібрації в техніці і технологіях”. – 2003. – №6(32). – С. 18–22.

5. Serdyuk L.I. Matematicheskaya model upravlyаемого vibrosmesitelya / L.I. Serdyuk,

L.M. Osina // Vibratsii v tehnikе i tehnologiyah. – 1999. № 2(11). – S.13 – 16 .

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРАЦИОННОЙ СУШИЛКИ С МАЯТНИКОВЫМИ МЕХАНИЗМАМИ СВОБОДНОГО ХОДА

**Аннотация.** В статье описана конструкция, принцип работы разработанной вибрационной сушилки с двойным маятниковым механизмом свободного хода для привода лопастей-перемешивателей во вращательное движение. Представлена расчетная схема и законы движения данной системы в виде уравнений Лагранжа второго рода.

**Ключевые слова:** зерно, послеуборочная обработка, сушка, вибрационная сушилка, энергозатраты, маятниковый механизм свободного хода, расчетная модель, математическая модель, уравнения Лагранжа второго рода.

#### MATHEMATICAL MODEL OF VIBRATION DRYER WITH THE PENDULUM MECHANISMS OF FREE FLOW

**Annotation.** The article describes the design, operation principle of the developed vibrating dryer with a double pendulum free-wheeling mechanism for driving the blades-mixers into rotary motion. A computational scheme and the laws of motion of this system in the form of Lagrange equations of the second kind are presented.

**Key words:** grain, post-harvest treatment, drying, vibration drier, power inputs, free-wheel pendulum mechanism, calculation model, mathematical model, Lagrange equations of the second kind.