

Ольшанський В. П.  
д.ф.-м.н., професор

Ольшанський С. В.  
к.ф.-м.н., доцент

*Харківський  
національний технічний  
університет сільського  
господарства  
імені Петра Василенка*

Olshansky V. P.

Olshansky S. V.

*Kharkiv Petro Vasilenko  
National Technical  
Univerciti of Agriculture*

УДК 534.1:539.3

## ПРО РУХ ОСЦИЛЯТОРА ЗІ СТЕПЕНЕВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ ПРУЖНОСТІ

*Розглянуто вільні коливання пружно-нелінійної системи з одним ступенем вільності, в припущенні, що відновлююча сила є степеневою функцією деформації пружини. З використанням періодичних Атеб-функцій одержано аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння руху при двох варіантах початкових умов. Запропоновано компактні апроксимації для наближеного обчислення значень задіяних спеціальних функцій. Виведено формули для розрахунку періодів коливань при наданні осцилятору або початкового відхилення від положення рівноваги або початкової швидкості (миттєвого імпульсу) в цьому положенні. Встановлена залежність періоду коливань від параметрів осцилятора та початкових умов. Розглянуто приклади розрахунків коливань осциляторів з м'якою та жорсткою характеристиками пружності. Проведено порівняння числових результатів, одержаних з використанням складених таблиць періодичних Атеб-функцій та з використанням їх апроксимацій.*

*Ключові слова: нелінійний осцилятор, вільні коливання, м'яка та жорстка характеристики пружності, період коливань, періодичні Атеб-функції.*

**Вступ.** Нелінійні механічні коливання з великими амплітудами можуть спричинити передчасне руйнування елементів конструкцій, внаслідок порушення втомної міцності або скоротити ресурс працездатності конструкції. Тому дослідження закономірностей нелінійних коливань і розробка способів боротьби з ними, відносяться до актуальних науково-прикладних задач. Незважаючи на порівняно давню історію [1], цей розділ теорії коливань успішно розвивається і в наш час, про що свідчать монографічні видання [2-5], в яких є відповідні списки літературних джерел і їх аналітичний огляд. Заслужує також уваги окремий огляд [6], де надана інформація про нелінійні коливання систем змінної маси.

Метою даної статті є математичне моделювання вільних нелінійних коливань осцилятора зі степеневою характеристикою пружності з використанням періодичних Атеб-функцій.

**Викладання основного матеріалу.** Рух осцилятора на координатній вісі  $ox$  описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^v \operatorname{sign}(x) = 0, \quad (1)$$

де  $m$  – маса рухомої матеріальної точки;  $c > 0$  – характеризує жорсткість нелінійної пружини;  $v > 0$  – показник степеня, що належить неперервній множині додатніх чисел; крапка означає похідну за часом  $t$ .

Зазначимо, що в роботах [3, 7, 8] та інших публікаціях, незбурений рух осцилятора зі степеневою характеристикою пружності описували рівнянням:

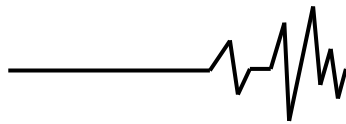
$$m\ddot{x} + c x^v = 0. \quad (2)$$

Тоді показник  $v$  належить дискретній множині чисел, що визначають по формулі:

$$v = \frac{2p+1}{2q+1} \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots).$$

Тому рівняння (1) більш загальне, ніж (2).

1. Розглянемо далі коливання осцилятора, спричинені початковим відхиленням  $x = a$  у стані спокою від положення рівноваги  $x = 0$ . У цьому випадку,



на проміжку  $x \in [0; a]$  повинні виконуватись умови:

$$x(0) = a; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad \dot{x}(t) \leq 0, \quad (3)$$

бо рух відбувається проти вісі  $ox$ .

Переходом до нових змінних:  $\dot{x} = v$ ,  
 $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$  рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} x^v, \quad (4)$$

враховуючи, що  $x \geq 0$ .

Проінтегрувавши (4), з урахуванням (3), одержуємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2c}{m(v+1)}} \sqrt{a^{v+1} - x^{v+1}}.$$

Звідки випливає, що:

$$\sqrt{\frac{2c}{m(v+1)}} t = -\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{a^{v+1} - x^{v+1}}},$$

або після заміни:  $x = au$ ;  $dx = a du$ :

$$\tau = a^{\frac{v-1}{2}} \sqrt{\frac{2c}{m(v+1)}} t = \int_{x/a}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{v+1}}}. \quad (5)$$

Цей вираз дає можливість обчислити період коливань осцилятора  $T$ . Поклавши в (5)  $t = T/4$ ,  $x = 0$ , отримуємо:

$$\frac{T}{4} a^{\frac{v-1}{2}} \sqrt{\frac{2c}{m(v+1)}} = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{v+1}}}. \quad (6)$$

Інтеграл в (6) виражається через гамма-функцію  $\Gamma(z)$ . Згідно, з довідником [9, с. 295]:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{v+1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2v+2}\right)}. \quad (7)$$

Тому:

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{v-1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2v+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{c(v+1)}}. \quad (8)$$

Якщо позначити жорсткість пружини лінійного осцилятора символом  $c_\Lambda$  і врахувати,

що  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ;  $\Gamma(1) = 1$ , то, при  $c = c_\Lambda$ ,  $v = 1$ , із (8) одержимо відому формулу періода коливань лінійного осцилятора масою  $m$ :

$$T_\Lambda = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_\Lambda}}. \quad (9)$$

Використовуючи вирази (8) і (9) та рівності мас, при  $c = c_\Lambda$ , можна знайти значення амплітуди коливань  $a$ , коли  $T = T_\Lambda$ , тобто періоди коливань лінійного і нелінійного осциляторів будуть однакові.

Із формули (5) випливає, що [3, 8]:

$$\frac{x}{a} = Ca\left(v, 1, \frac{v+1}{2} \tau\right). \quad (10)$$

Тут  $Ca\left(v, 1, \frac{v+1}{2} \tau\right)$  – Атеб-косинус,

який описує переміщення осцилятора у часі.

Значимо, що при  $v = 1$ ,  $Ca(1, 1, \tau) = \cos \tau$  і формула (10) переходить у відомий вираз переміщень лінійного осцилятора, спричинених початковим відхиленням від положення рівноваги.

2. Далі з'ясуємо якими будуть коливання нелінійного осцилятора при наданні йому в положенні рівноваги початкової швидкості  $v_0$ , спрямованої по вісі  $ox$ . Для цього знайдемо розв'язок рівняння (1) при початкових умовах:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

коли рух відбувається за віссю  $ox$  і  $\dot{x}(t) \geq 0$ .

Для цих умов інтеграл рівняння (4) має вигляд:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2c}{m(v+1)}} \sqrt{a_*^{v+1} - x^{v+1}}, \quad (11)$$

$$\text{де } a_* = \left(\frac{mv_0^2(v+1)}{2c}\right)^{\frac{1}{v+1}}.$$

Подальше інтегрування виразу (11) дає:

$$\tau_* = a_*^{\frac{v-1}{2}} \sqrt{\frac{2c}{m(v+1)}} t = \int_0^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{v+1}}}. \quad (12)$$

Із (12), при  $t = T/4$ ,  $x = a_*$ , випливає наступна формула для обчислення періода коливань осцилятора:



$$T = \frac{2\sqrt{2\pi}}{a_*^{\frac{v-1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2v+2}\right)} \sqrt{\frac{m}{c(v+1)}} = \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{2v+1}{v+1}}}{(v+1)^{\frac{v}{v+1}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{v+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2v+2}\right)} v_0^{\frac{1-v}{1+v}} \left(\frac{m}{c}\right)^{\frac{1}{v+1}}. \quad (13)$$

При  $v=1$ ,  $c=c_\Lambda$  формула (13) переходить в (9).

Одержані вирази для  $T$  (8) і (13) призводять до висновку, що у випадку м'якої характеристики пружності, коли  $v < 1$ , збільшення  $a$  і  $v_0$  супроводжується зростанням періода коливань осцилятора, а у випадку жорсткої характеристики пружності, коли  $v > 1$ , маємо супротивну тенденцію.

Якщо скористатися функцією Атеб-синус [3, 7, 8], то із (12) одержимо наступну формулу переміщень осцилятора:

$$\frac{x}{a_*} = Sa\left(v, 1, \frac{v+1}{2} \tau_*\right). \quad (14)$$

Аналітичні розв'язки диференціального рівняння (1) будуть мати переваги над комп'ютерними числовими розв'язками лише при наявності зручних формул для обчислення значень задіяних в (10) і (14) Атеб-функцій. Тому далі побудуємо потрібні апроксимації.

3. Виходимо з того, що:

$$Sa(\eta) \approx f_{n+1} = \frac{\eta}{1 + \frac{f_n^{v+1}}{2v+4} + \frac{3 f_n^{2v+2}}{8 2v+3} + \frac{5 f_n^{3v+3}}{16 3v+4} + \dots}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

За нульове наближення доцільно приймати  $f_0 = \eta$ .

Далі розглянемо варіант наближеного обчислення значення  $Sa$ , коли воно близьке до одиниці. Замінімо в (15) змінну інтегрування  $u$  на  $1 - \varepsilon$ . Тоді:

$$\eta = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{v+1}}} - \int_{Sa}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{v+1}}} = I - \int_0^{1-Sa} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^{v+1}}}, \quad (18)$$

де  $I$ , як і раніше, подається виразом (7).

Враховуючи мале значення  $\varepsilon$ , використаємо наближення:

$$(1-\varepsilon)^{v+1} = 1 - (v+1)\varepsilon + \frac{(v+1) \cdot v}{2} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

$$\int_0^{Sa} \frac{du}{\sqrt{1-u^{v+1}}} = \eta. \quad (15)$$

Тут для компактності запису позначено:

$$Sa = Sa\left(v, 1, \frac{v+1}{2} \eta\right).$$

Розглянемо випадок порівняно невеликих значень Атеб-синуса, коли  $Sa \leq 0,5$ . Для них, розгорнувши підінтегральний вираз в (15) у степеневий ряд, отримуємо:

$$Sa = \frac{\eta}{1 + \frac{Sa^{v+1}}{2v+4} + \frac{3 Sa^{2v+2}}{8 2v+3} + \frac{5 Sa^{3v+3}}{16 3v+4} + \dots}. \quad (16)$$

Отже, при  $\eta > 0$ ,  $Sa$  задовольняє нерівності  $Sa = Sa(\eta) < \eta$ .

Із (16) випливає формула наближеного обчислення  $Sa(\eta)$ , при малих  $\eta$ , методом ітерацій:

Для нього:

$$\int_0^{1-Sa} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^{v+1}}} \approx \int_0^{1-Sa} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{(1+v)\varepsilon - \frac{v(v+1)}{2} \varepsilon^2}} = \frac{2}{\sqrt{v+1}} \int_0^{\sqrt{1-Sa}} \frac{dy}{\sqrt{1-\frac{v}{2} y^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{v(v+1)}} \arcsin \frac{\sqrt{1-Sa}}{\sqrt{2/v}}. \quad (19)$$

Отже, згідно з (18) і (19):

$$\arcsin \frac{\sqrt{1-Sa}}{\sqrt{2/v}} = \frac{\sqrt{v(v+1)}}{2\sqrt{2}} (I - \eta).$$

Таким чином, коли  $Sa$  близьке до 1, то:



$$Sa(\eta) \approx 1 - \frac{2}{v} \sin^2 \left[ \frac{\sqrt{v(v+1)}}{2\sqrt{2}} (I - \eta) \right]. \quad (20)$$

Одержана апроксимація узагальнює відому тригонометричну залежність. Дійсно, коли  $v = 1$ , то  $I = \pi/2$ ,  $Sa(\eta) = \sin(\eta)$  і (20) набуває вигляд:

$$\sin \eta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \eta \right) = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi/2 - \eta}{2} \right).$$

Формула (20) дає досить точні значення  $Sa(\eta)$  на проміжку  $\eta \in [0,8; I]$ . Тому:

$$Sa(0,8) \approx 1 - \frac{2}{v} \sin^2 \left[ \frac{\sqrt{v(v+1)}}{2\sqrt{2}} (I - 0,8) \right]. \quad (21)$$

$$Sa \left( v, 1, \frac{v+1}{2} \eta \right) \approx \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta < 0,2 \\ Sa(\eta) & \text{при } 0,2 \leq \eta \leq 0,8 \\ 1 - \frac{2}{v} \sin^2 \left[ \frac{\sqrt{v(v+1)}}{2\sqrt{2}} (I - \eta) \right] & 0,8 < \eta \leq I. \end{cases} \quad (24)$$

У ній  $Sa(\eta)$  подається виразами (22), (23).

Коли прийняти до уваги, що:

$$Ca \left( v, 1, \frac{v+1}{2} \eta \right) = Sa \left( v, 1, \frac{v+1}{2} (I - \eta) \right), \quad (25)$$

то формулу (24) можна використовувати і для наближеного обчислення значень Атеб-косинуса.

Запропонована апроксимація придатна для інженерних розрахунків на проміжку  $0 \leq v \leq 5$ . Її похибка зростає при збільшенні  $v$ , тому обмежуємо його значення.

З метою ілюстрації можливостей викладеної теорії, проведемо розрахунки коливачів осциляторів з м'якою та жорсткою характеристиками пружності, що не описуються рівнянням (2).

**Приклад 1.** Випадок м'якої характеристики з  $v = 0,5$ . Для цього показника нелінійності, використовуючи значення Гама-

значення  $Sa(0,2)$  і  $Sa(0,5)$  не складно розрахувати методом ітерацій по формулі (17), внаслідок чого, для наближеного обчислення  $Sa(\eta)$  на проміжку  $\eta \in [0,2; 0,8]$ , можна скористатись квадратним трьохчленом:

$$Sa(\eta) = Sa(0,2) + b_1(\eta - 0,2) + b_2(\eta - 0,2)^2. \quad (22)$$

Тут:

$$b_1 = \frac{1}{0,6} [4 \cdot Sa(0,5) - Sa(0,8) - 3 \cdot Sa(0,2)]; \quad (23)$$

$$b_2 = \frac{1}{0,18} [Sa(0,8) + Sa(0,2) - 2 \cdot Sa(0,5)].$$

Таким чином, одержана апроксимація Атеб-синуса має вигляд:

функції з [10, с. 52]  $\Gamma(2/3) \approx 1,354118$ ;  $\Gamma(7/6) \approx 0,92772$ , по формулі (7) знаходимо, що  $I \approx 1,7247$ . Рух осцилятора, спричинений миттєвим імпульсом  $m v_0$ , описується виразом (14) який тепер набуває вигляд:

$$x/a_* = Sa \left( 0,5; 1; \frac{3}{4} \tau_* \right). \quad (26)$$

Орієнтуючись на використання апроксимації Атеб-синуса (24), методом ітерацій по формулі (17) знаходимо, що:  $Sa(0,2) \approx 0,196$ ;  $Sa(0,5) \approx 0,465$ . Далі по формулі (21) одержуємо  $Sa(0,8) \approx 0,688$ . Тоді, згідно з (22), (23), (24), наближені значення Атеб-синуса подаються виразом:

$$Sa \left( 0,5; 1; \frac{3}{4} \tau_* \right) \approx \begin{cases} \tau_* & 0 \leq \tau_* < 0,2 \\ 0,196 + 0,9733(\tau_* - 0,2) - 0,2556(\tau_* - 0,2)^2 & \text{при } 0,2 \leq \tau_* \leq 0,8 \\ 1 - 4 \sin^2 [0,3062 \cdot (I - \tau_*)] & 0,8 < \tau_* \leq I. \end{cases} \quad (27)$$



Про точність цієї апроксимації надана інформація в табл. 1, де, поряд з умовно точними значеннями (точність до  $10^{-3}$ ), в дужках указано апроксимовані значення Ateb-функції.

Маємо гарне узгодження результатів, одержаних різними способами. Лінійна інтерполяція цих табличних даних дає можливість оперативно обчислювати відносні переміщення осцилятора. Наприклад, при  $\tau_* = 0,32$  знаходимо, що  $Sa\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\tau_*\right) \approx 0,308$ .

Отже, по формулі (26)  $x \approx 0,308a_*$ . Якщо використовувати апроксимацію (27), то одержимо  $x \approx 0,309a_*$ , що мало відрізняється від попереднього результату.

Таблицю 1, або апроксимацію (27), можна використовувати і для дослідження руху осцилятора, спричиненого початковим відхиленням, коли, у відповідності з (10):

$$x/a = Ca\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\tau\right). \quad (28)$$

Таблиця 1

Значення Ateb-синуса, одержані двома способами

$\tau_*$	$Sa\left(0,5; 1; \frac{3}{4}\tau_*\right)$	$\tau_*$	$Sa\left(0,5; 1; \frac{3}{4}\tau_*\right)$	$\tau_*$	$Sa\left(0,5; 1; \frac{3}{4}\tau_*\right)$
0,00	0,00(0,00)	0,60	5,45(5,44)	1,20	8,98(8,98)
0,05	0,50(0,50)	0,65	5,83(5,82)	1,25	9,16(9,16)
0,10	0,99(1,00)	0,70	6,20(6,19)	1,30	9,33(9,33)
0,15	1,48(1,50)	0,75	6,55(6,54)	1,35	9,48(9,48)
0,20	1,96(1,96)	0,80	6,88(6,88)	1,40	9,61(9,61)
0,25	2,44(2,44)	0,85	7,20(7,19)	1,45	9,72(9,72)
0,30	2,90(2,91)	0,90	7,50(7,50)	1,50	9,81(9,81)
0,35	3,36(3,36)	0,95	7,79(7,79)	1,55	9,89(9,89)
0,40	3,80(3,80)	1,00	8,06(8,06)	1,60	9,94(9,94)
0,45	4,23(4,23)	1,05	8,32(8,32)	1,65	9,98(9,98)
0,50	4,65(4,65)	1,10	8,55(8,55)	1,70	9,997(9,998)
0,55	5,06(5,05)	1,15	8,77(8,77)	1,7247	10,00(10,00)

При цьому слід враховувати залежність (25), тобто Ateb-косинус виразити через Ateb-синус. Задавши  $\tau = 0,9$ , обчислимо по формулі (28) відносне переміщення осцилятора. Для заданого  $\tau$  маємо  $\tau_* = I - \tau \approx 0,825$ . Провівши лінійну інтерполяцію в табл. 1, одержуємо

$$Ca\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\tau\right) = Sa\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\tau_*\right) \approx 0,704. \text{ Тому,}$$

згідно з (28)  $x/a \approx 0,704$ . Якщо проводити розрахунок з використанням (27), то теж одержимо цей результат.

**Приклад 2.** Розглянемо рух осцилятора з жорсткою характеристикою пружності, коли  $\nu = 1,5$ . Для вказаного  $\nu$ , за даними в [10, с.

55], маємо:  $\Gamma(0, 4) = \frac{1}{0,4} \Gamma(1, 4) \approx 2,21825$ ;

$$\Gamma(0, 9) = \frac{1}{0,9} \Gamma(1, 9) \approx 1,06867. \text{ Тоді за}$$

формулою (7) одержуємо  $I \approx 1,4716$ . Переміщення осцилятора, спричинені початковим імпульсом, описуються виразом (14), який набуває вигляд:

$$x/a_* = Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}\tau_*\right). \quad (29)$$

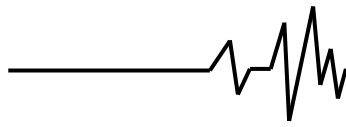
Методом ітерацій по формулі (17) знаходимо, що:  $Sa(0,2) \approx 0,199$ ;

$Sa(0,5) \approx 0,487$ . Далі, користуючись (21),

одержуємо  $Sa(0,8) \approx 0,737$ . Для цих значень Ateb-синуса формули (23) дають:

$b_1 \approx 1,0233$ ;  $b_2 \approx -0,2111$ . Тоді апроксимація (24) приймає форму:

$$Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}\tau_*\right) \approx \begin{cases} t_* & 0 \leq \tau_* < 0,2 \\ 0,199 + 1,0233(t_* - 0,2) - 0,2111(t_* - 0,2)^2 & \text{при } 0,2 \leq t_* \leq 0,8 \\ 1 - (4/3)\sin^2[0,6846 \cdot (I - \tau_*)] & 0,8 < \tau_* \leq I. \end{cases} \quad (30)$$



Про точність цієї апроксимації надана інформація в табл. 2, де, поряд з умовно точними (точність до  $10^{-3}$ ) значеннями

періодичної Ateb-функції вказано в дужках її значення, обчислені по (30).

Таблиця 2

Точні та наближені значення Ateb-синуса

$t_*$	$10Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}t_*\right)$	$t_*$	$10Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}t_*\right)$	$t_*$	$10Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}t_*\right)$
0,00	0,00(0,00)	0,55	5,33(5,31)	1,10	9,16(9,16)
0,05	0,50(0,50)	0,60	5,77(5,75)	1,15	9,36(9,36)
0,10	1,00(1,00)	0,65	6,19(6,17)	1,20	9,54(9,54)
0,15	1,50(1,50)	0,70	6,60(6,58)	1,25	9,70(9,70)
0,20	1,99(2,00)	0,75	6,99(6,98)	1,30	9,82(9,82)
0,25	2,49(2,50)	0,80	7,37(7,37)	1,35	9,91(9,91)
0,30	2,98(2,99)	0,85	7,72(7,73)	1,40	9,97(9,97)
0,35	3,46(3,48)	0,90	8,06(8,06)	1,45	9,997(9,997)
0,40	3,94(3,95)	0,95	8,37(8,37)	$I \approx 1,4716$	10,00(10,00)
0,45	4,41(4,42)	1,00	8,66(8,66)		
0,50	4,87(4,87)	1,05	8,92(8,92)		

Як бачимо, апроксимація (30) теж має високу точність.

Обчислимо двома способами відносно переміщення осцилятора  $x/a_*$ , коли  $\tau_* = 0,98$ . Провівши лінійну інтерполяцію в

табл. 2 одержуємо  $Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}\tau_*\right) \approx 0,853$ .

Отже, за формулою (29),  $x/a_* \approx 0,853$ . Якщо проводити розрахунок з використанням (30), то  $x/a_* \approx 0,855$ , що не суттєво відрізняється від попереднього результату.

Табл. 2, або апроксимація (30), дають можливість обчислювати і переміщення осцилятора, спричинені початковим відхиленням його від положення рівноваги, коли, згідно з (10):

$$x/a = Ca\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}\tau\right). \quad (31)$$

Враховуючи (25), знайдемо  $x/a$  при  $\tau = 1,22$ . У цей момент часу  $\tau_* = I - \tau \approx 0,252$ . Для нього в табл. 2

$Sa\left(\frac{3}{2}; 1; \tau_*\right) = Ca\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{5}{4}\tau\right) \approx 0,251$  і за

формулою (31)  $x/a \approx 0,251$ . Якщо, замість табл. 2, використавши (30), то одержимо  $x/a \approx 0,252$ , що близьке до попередньої відповіді.

**Висновки.** Викладена теорія описує незбурений рух цілого класу осциляторів зі

степеневу характеристикою пружності. Використовуючи запропоновані апроксимації періодичних Ateb-функції, досить просто обчислювати переміщення осциляторів у їх коливальному русі. Розрахунки підтвердили вірогідність одержаних теоретичних результатів.

**Список використаних джерел**

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А. А. Ларин. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин // Том 1: Модели, методы, явления. – М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Пукач. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
4. Кузнецов А. П. Нелинейные колебания / А. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. – М. : Физматлит, 2002. – 292 с.
5. Ольшанський В. П. Динаміка дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тіщенко. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.
6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system / L. Cveticanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – Pp. 56-74.
7. Возний А. М. Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь / А. М. Возний // Доповіді АН УССР. – Київ, 1970. – № 9. – С. 971-974. – Серія А.



8. Грицик В. В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій / В. В. Грицик, М. А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37-42.

9. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев // Элементарные функции. – М. : Наука, 1981. – 800 с.

10. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М. : Наука, 1977. – 344 с.

#### Список джерел у транслітерації

1. Larin A. A. Ocherki istorii razvitiya teorii mehanicheskikh kolebaniy / A. A. Larin. – Sevastopol : Veber, 2013. – 403 s.

2. Avramov K. V. Nelineynaya dinamika uprugih sistem / K. V. Avramov, Yu. V. Mihlin // Tom 1: Modeli, metodyi, yavleniya. – M.- Izhevsk : Institut kompyuternykh issledovaniy, 2010. – 704 s.

3. Pukach P. Ya. Yakisni metodi doslidzhennya nellinynih kolivalnih sistem / P. Ya. Pukach. – Lviv : Lvivska politehnika, 2014. – 288 s.

4. Kuznetsov A. P. Nelineynnye kolebaniya / A. P. Kuznetsov, N. M. Ryiskin. – M. : Fizmatlit, 2002. – 292 s.

5. Olshanskiy V. P. Dinamika disipativnih ostsilyatoriv / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy, L. M. Tischenko. – Harkiv : Miskdruk, 2016. – 264 s.

6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system / L. Cveticanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – Rr. 56-74.

7. Vozniy A. M. Zastosuvannya Ateb-funktsiy dlya pobudovi rozv'yazku odnogo klasu Istotno neliniynih diferentsialnih rivnyan / A. M. Vozniy // Dopovidi AN USSR. – Kiyiv, 1970. – № 9. – S. 971-974. – Serlya A.

8. Gritsik V. V. Matematichni modeli algoritmiv i realizatsiya Ateb-funktsiy / V. V. Gritsik, M. A. Nazarkevich // Dopovidi Natsionalnoyi akademiyi nauk Ukrayini. – Kiyiv, 2007. – № 12. – S. 37-42.

9. Prudnikov A. P. Integraly i ryady / A. P. Prudnikov, Yu. A. Bryichkov, O. I. Marichev // Elementarnyye funktsii. – M. : Nauka, 1981. – 800 s.

10. Yanke E. Spetsialnyie funktsii / E. Yanke, F. Emde, F. Lyosh. – M. : Nauka, 1977. – 344 s.

#### О ДВИЖЕНИИ ОСЦИЛЛЯТОРА СО СТЕПЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГОСТИ

**Аннотация.** Рассмотрены свободные колебания упруго-нелинейной системы с

одной степенью свободы, в предположении, что восстанавливающая сила является степенной функцией деформации пружины. С использованием периодических Атеб-функций получено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения движения при двух вариантах начальных условий. Предложено компактные аппроксимации для приближенного вычисления значений задействованных специальных функций. Выведены формулы для расчета периодов колебаний при сообщении осциллятору или начального отклонения от положения равновесия или начальной скорости (мгновенного импульса) в этом положении. Установлена зависимость периода колебаний от параметров осциллятора и начальных условий. Рассмотрены примеры расчетов колебаний осцилляторов с мягкой и жесткой характеристиками упругости. Проведено сравнение числовых результатов, полученных с использованием составленных таблиц периодических Атеб-функций и с применением их аппроксимаций.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, свободные колебания, мягкая и жесткая характеристики упругости, период колебаний, периодические Атеб-функции.

#### ABOUT THE MOTION OF THE OSCILLATOR WITH THE DEGREE OF CHARACTERISTIC OF ELASTICITY

**Annotation.** Free vibrations of an elastic-nonlinear system with one degree of freedom are considered under the assumption that the restoring force is a power function of the spring deformation. Using periodic Ateb-functions, an analytical solution of the non-linear differential equation of motion is obtained for two variants of the initial conditions. Compact approximations are proposed for approximate calculation of the values of the special functions involved. Formulas are derived for calculating the periods of oscillations when the oscillator is communicated or the initial deviation from the equilibrium position or the initial velocity (instantaneous pulse) in this position. The dependence of the oscillation period on the parameters of the oscillator and the initial conditions is established. Examples of oscillations of oscillators with soft and rigid elastic characteristics are considered. Comparison of numerical results obtained using the compiled tables of periodic Ateb-functions and using their approximations is made.

**Key words:** nonlinear oscillator, free oscillations, soft and hard elasticity characteristics, oscillation period, periodic Ateb-functions.