



## II. МАШИНОБУДУВАННЯ ТА МАТЕРІАЛООБРОБКА

Виноградов Б. В.

д.т.н., професор

Федин Д. А.

к.т.н., доцент

**Государственное  
высшее учебное  
заведение «Украинский  
государственный  
химико-  
технологический  
университет»**

УДК 621.833

## О РЕЗОНАНСНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ПРИВОДЕ БАРАБАННОЙ МЕЛЬНИЦЫ

*Проанализированы экспериментальные данные касательно колебательных процессов в механической системе привода барабанной мельницы. Разработана математическая модель динамики механической системы привода барабанной мельницы. На основе разработанной модели определено, что при наличии в системе привода собственной частоты, совпадающей с удвоенной частотой вращения шестерни, возникают резонансные колебания крутящего момента в валопроводе и, следовательно, повышенные динамические нагрузки.*

**Ключевые слова:** барабанная мельница, зубчатая передача, колебания, резонанс.

**Введение.** Барабанные мельницы находят широкое применение в промышленности при измельчении рудных материалов, угля и цементного сырья. В большинстве случаев привод мельниц оснащен открытой зубчатой передачей. Мировая тенденция увеличения единичной мощности машин привела к необходимости создания мельниц со все более мощным приводом. Однако, увеличение единичной мощности приводит к увеличению статических и динамических нагрузок на зубчатую передачу и привод в целом. Попытки увеличения прочности и надежности зубчатых передач традиционными методами (увеличение твердости рабочей поверхности зубьев, увеличение ширины зуба и т.д.) не приводят к желаемому результату, так как для

ограничения нагрузок необходимо обеспечить рациональные динамические параметры механической системы привода в целом. Отсутствие научно-обоснованных методов расчета, учитывающих особенности конструкции и режимов работы механических систем привода барабанных мельниц сдерживает создание машин большой единичной мощности.

### **Аналитический обзор исследований.**

Большинство крупных барабанных мельниц имеют частоту вращения приводной шестерни 75 и 150 об/мин. В табл. 1 приведены основные параметры открытых зубчатых передач крупных барабанных мельниц, функционирующих на отечественных горно-обогатительных комбинатах [1].

Таблица 1

### **Основные параметры открытых зубчатых передач крупных барабанных мельниц [1]**

Тип мельницы	Мощность двигателя, N, кВт	Модуль зуба, $m_n$ , мм	Число зубьев		Угол наклона Зубьев $\beta$ , °	Частота вращения шестерни, n, об/мин	Ширина зуба венца, b, мм
МРГ 5500x7500	3150	25	25	252	6	150	900
МШЩ 4500x8200	4000	25	25	252	6	150	1000
МШРГУ 5500x6000	2500	25	35	316	6	150	800
МШЩ 5500x6500	4000	25	46	252	6	75	1000
МБ 7000x2300	1600	20	43	254	5,63	77	600
ММС 9000x3000	4000	28	42	284	6,43	75	1000



Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в приводах некоторых барабанных мельниц возникают динамические нагрузки, приводящие к снижению долговечности и надежности приводного узла открытой зубчатой передачи.

На рис. 1 приведены осциллограммы пуска и установившегося режима работы мельницы МРГ 5500х7500 с приводом, оснащенный синхронным двигателем СДМЗ 2-21-64-40 УЧ мощностью 3150 кВт и частотой вращения шестерни 150 об/мин (см. табл. 1) [2].

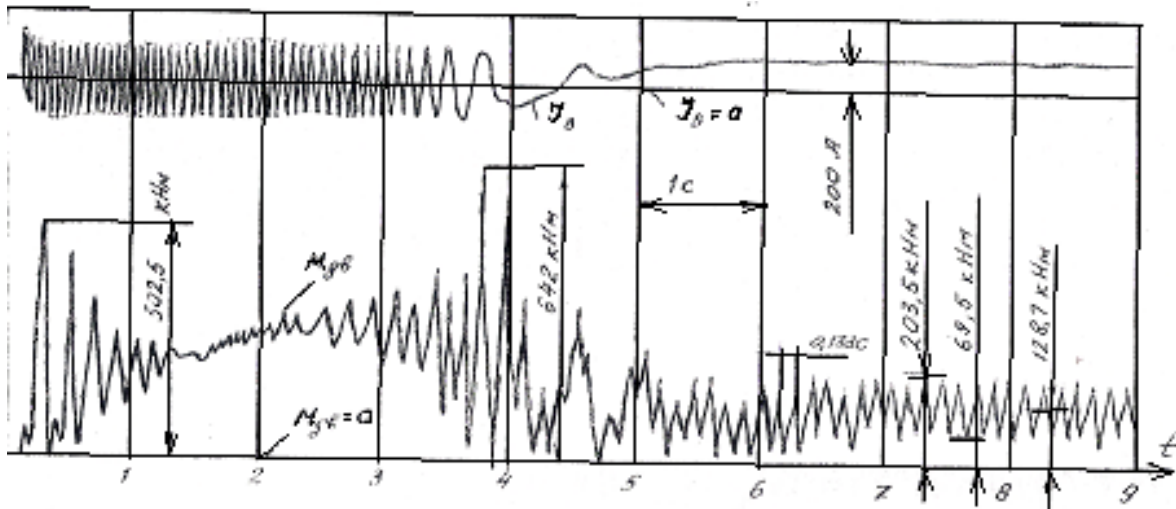


Рис. 1. Осциллограмма пуска мельницы МРГ 5500х7500 с приводом, содержащим упругую муфту:  $J_B$  – ток возбуждения,  $M_{об}$  – момент в валопроводе

Из рис. 1 видно, что после входа двигателя в синхронизм наблюдаются колебания крутящего момента с коэффициентом динамичности  $k_d=1,58$ . Частота колебаний близка к одной из низших собственных частот механической системы привода и составляет  $k=47,2 \text{ с}^{-1}$ , что в 3 раза больше частоты вращения приводной шестерни ( $k_{ш}=15,0 \text{ с}^{-1}$ ) и в 8,3 раз меньше зубчатой частоты, равной  $k_з=393 \text{ с}^{-1}$ . Незатухающий характер колебаний свидетельствует о том, что в механической системе возникает резонанс. Резонансные колебания становятся причиной повышенных

динамических нагрузок и, как следствие, преждевременного выхода из строя механизма привода.

Аналогичная картина наблюдается в большей или меньшей степени в приводах всех мельниц с частотой вращения приводной шестерни 150 об/мин (см. табл. 1) и одной из низших частот, примерно в три раза большей чем частота вращения шестерни.

На рис. 2 приведена осциллограмма пуска мельницы МШЦ 5500х6500 с приводом, оснащенный синхронным двигателем СДМЗ-24-59-80 У4 мощностью 4000 кВт и частотой вращения шестерни 75 об/мин.

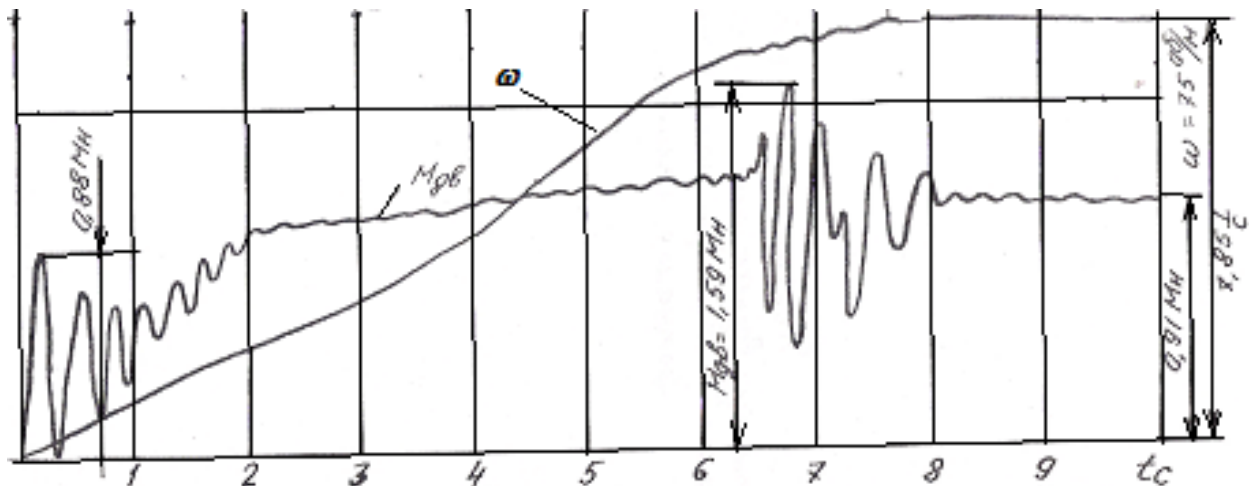


Рис. 2. Осциллограмма пуска мельницы МШЦ 5500х6500



Из рис. 2 видно, что после входа двигателя в синхронизм наблюдаются колебания крутящего момента, однако их амплитуда значительно меньше, чем у мельницы МРГ 5500x7500. Амплитуда динамической составляющей момента составляет не более 2% от номинального момента  $M_n$  (коэффициент динамичности  $K_d = 1,02$ ). Частота колебаний момента составляет  $k = 19,9 \text{ с}^{-1}$ , что в 2,5 раза больше частоты вращения приводной шестерни ( $k_{ш} = 8,0 \text{ с}^{-1}$ ) и в 10 раз меньше зубчатой частоты, равной  $k_3 = 201 \text{ с}^{-1}$ .

Анализ экспериментальных данных позволяет заключить, что в приводных узлах барабанных мельниц возникает возмущающий крутящий момент, действующий с частотой, равной утроенной частоте вращения приводной шестерни. При совпадении частоты

возмущающего момента с одной из низших частот механической системы привода возникают резонансные колебания упругого момента.

**Целью исследования является** экспериментальное и теоретическое обоснование причин возникновения повышенных динамических нагрузок в приводах барабанных мельниц.

**Дифференциальные уравнения динамики приводного узла.** Механическая система привода открытой зубчатой передачи барабанной мельницы представляет собой сложную систему пространственно-ориентированных инерционных, упругих и диссипативных элементов. Кинематическая схема привода мельницы может быть представлена как на рис. 3.

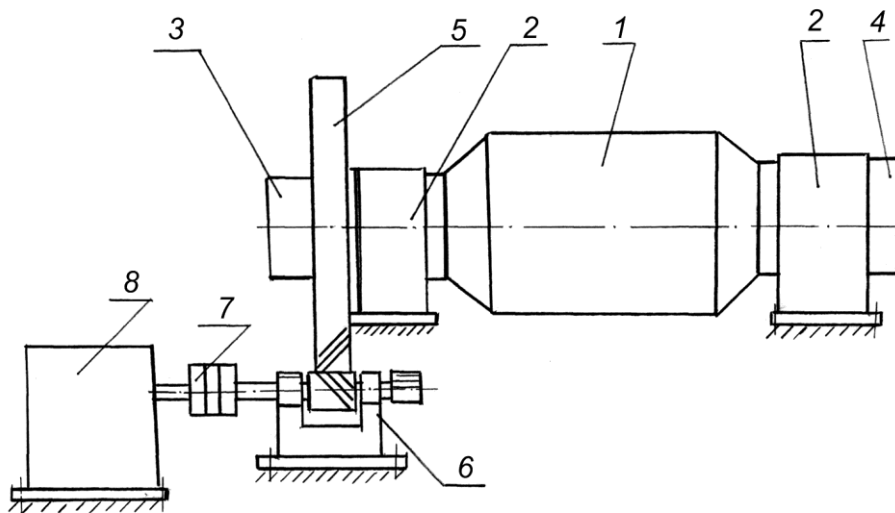


Рис. 3. Кинематическая схема механической системы привода барабанной мельницы: 1 – барабан; 2 – подшипники; 3 – разгрузочная цапфа; 4 – загрузочная цапфа; 5 – зубчатое колесо; 6 – приводной узел; 7 – упругая муфта; 8 – синхронный электродвигатель

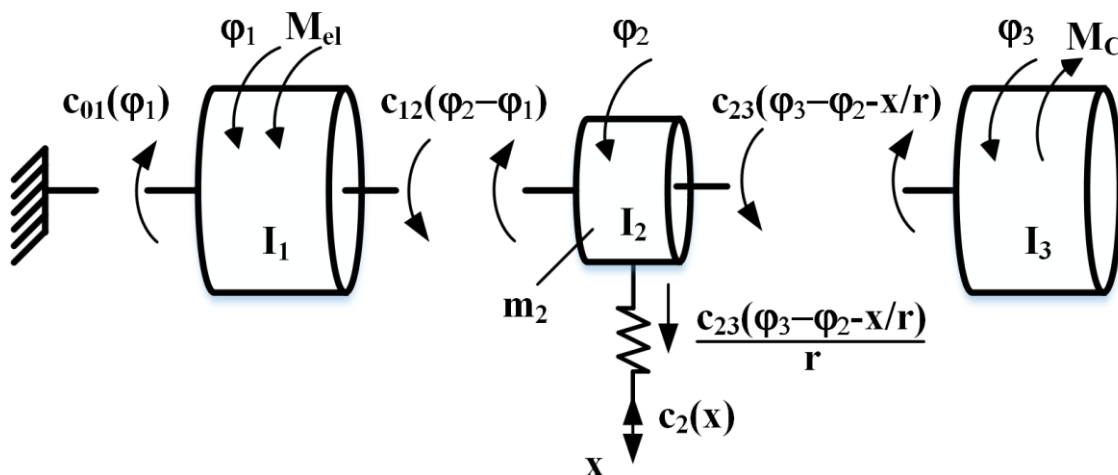
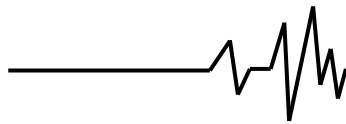


Рис. 4. Динамическая расчетная схема привода барабанной мельницы



Составим общую эквивалентную динамическую схему механической системы привода барабанной мельницы. Ротор двигателя 1 с моментом инерции  $I_1$  (массой  $m_1$ ) приводится во вращение электромагнитным полем, создающим электромагнитный момент  $M_{эм}$  (рис. 4). Ротор двигателя посредством упругого вала, оснащенного упругой муфтой, соединен с валом-шестерней 2 приведенной массой  $m$  и моментом инерции  $I_2$ . Вал-шестерня находится в зубчатом зацеплении с зубчатым венцом 3 барабана с моментом инерции  $I_3$ . Крутящий момент через шестерню передается зубчатому колесу посредством сил в зубчатом зацеплении, создающих поперечные силы и изгибающие моменты в валу-шестерне.

В результате вал-шестерня совершает совместные крутильные и поперечные колебания. Рассматривая поперечные колебания вала-шестерни только в вертикальном направлении получаем колебательную систему четырьмя степенями свободы  $\varphi_1, \varphi_2, x$  и  $\varphi_3$ . Ранее авторами показано [3], что в рабочем диапазоне нагрузок упругую характеристику синхронных двигателей можно аппроксимировать линейной зависимостью, характеризующейся постоянным коэффициентом жесткости  $c_{01}$  и представить двигатель как механический осциллятор. Тогда, сместив начало отсчета в положение статической деформации и не принимая во внимание затухание колебаний получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений уравнения описывающую

свободные колебания системы

$$\begin{aligned} I_1 \varphi_1'' &= -c_{01} \varphi_1 + c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1), \\ I_2 \varphi_2'' &= -c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + c_{23} r^2 \left( \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{x}{r} \right), \\ I_3 \varphi_3'' &= -c_{23} r \left( \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{x}{r} \right) r, \\ mx'' &= -c_2 x + c_{23} r \left( \varphi_3 - \varphi_2 - \frac{x}{r} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – приведенные моменты инерции ротора, вала-шестерни и барабана соответственно;  $m$  – приведенная масса вала-шестерни;  $c_{01}, c_{12}, c_{23}, c_2$  – крутильная жесткость двигателя, приводного вала, линейная жесткость зубчатого зацепления и приведенная жесткость опор и вала-шестерни соответственно;  $r$  – радиус шестерни.

Система уравнений (1) может быть использована для определения собственных частот механической системы приводного узла барабанной мельницы.

Будем искать решение системы уравнений (1) в виде

$$q_i = A_i \sin(kt + \alpha), \quad i=1, 2, 4; \quad (2)$$

где  $q_i$  –  $i$ -я координата;  $k$  – общая для всех координат частота;  $A_i$  – амплитуды колебаний;  $\alpha$  – сдвиг фаз. Подставляя выражение (2) в (1) получаем однородную относительно неизвестных амплитуд  $A_i$  систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -A_1 I_1 k^2 + A_1 (c_{01} + c_{12}) - A_2 c_{12} &= 0; \\ -A_1 c_{12} + A_2 c_{12} - A_2 c_{23} r^2 - A_2 I_2 k^2 + A_3 c_{23} r^2 + A_4 c_{23} r &= 0; \\ A_2 c_{23} r^2 - A_3 c_{23} r^2 - A_3 I_3 k^2 - A_4 c_{23} r &= 0; \\ A_2 c_{23} r - A_3 c_{23} r + A_4 (c_{23} + c_2) - A_4 m k^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При колебаниях все амплитуды  $A_i$  не могут равняться нулю. Следовательно, согласно общему свойству однородных систем

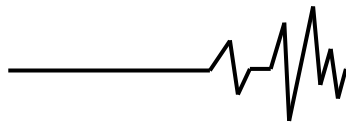
уравнений, должен равняться нулю определитель, составленный из коэффициентов системы (3)

$$\begin{vmatrix} (c_{01} + c_{12}) - I_1 k^2 & -c_{12} & 0 & 0 \\ -c_{12} & c_{12} - c_{23} r^2 - I_2 k^2 & c_{23} r^2 & c_{23} r \\ 0 & c_{23} r^2 & -c_{23} r^2 - I_3 k^2 & -c_{23} r \\ 0 & c_{23} r & -c_{23} r & (c_{23} + c_2) - m k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Раскрывая определитель, получаем частотное уравнение

$$Ak^8 + Bk^6 + Ck^4 + Dk^2 + E = 0, \quad (5)$$

где  $A = I_1 I_2 I_3 m$ ;



$$\begin{aligned}
 B &= -I_2 I_3 m c_{01} - (I_1 + I_2) I_3 m c_{12} + (I_2 m r^2 - I_2 I_3 + I_3 m r^2) I_1 c_{23} - I_1 I_2 I_3 c_2; \\
 C &= (I_3 m c_{12} + (I_2 I_3 - I_2 m r^2 - I_3 m r^2) c_{23} + I_2 I_3 c_2) c_{01} + \\
 &\quad + ((I_1 I_3 + I_2 I_3 - (I_1 + I_2 + I_3) m r^2) c_{23} + (I_1 I_3 + I_2 I_3) c_2) c_{12} -; \\
 &\quad - 2(I_2 + I_3) I_1 r^2 c_{23}^2 - (I_2 + I_3) I_1 r^2 c_2 c_{23} \\
 D &= (((m r^2 - I_3) c_{23} - I_3 c_2) c_{12} + (I_2 + I_3) (2c_{23} + c_2) r^2 c_{23}) c_{01} +; \\
 &\quad + ((2c_{23} + c_2) (I_1 + I_2 + I_3) r^2 c_{23}) c_{12} \\
 E &= (2r c_{23} + c_2) r^2 c_{12} c_{01} c_{23}.
 \end{aligned}$$

В табл. 2 приведены основные динамические параметры механических систем приводов мельниц МРГ 5500x7500 и МШЦ 5500x6500. Подставляя данные табл. 2 в частотное уравнение (5) и решая его любым из приведенных в [5] методов, получаем собственные частоты системы  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  (табл. 3).

Таблица 2

Основные динамические параметры зубчатой передачи барабанных мельниц МРГ 5500x7500 и МШЦ 5500x6500

Параметр	Обозначение	Значение	
		МРГ 5500x7500	МШЦ 5500x6500
Зубчатая частота	$k_3, c^{-1}$	392,7	196,3
Частота вращения шестерни	$k_{ш}, c^{-1}$	15,0	8,0
Приведенный момент инерции ротора двигателя	$I_1, кг \cdot м^2$	$19,3 \cdot 10^3$	$250,0 \cdot 10^3$
Приведенный момент инерции приводной шестерни	$I_2, кг \cdot м^2$	372,4	377,0
Приведенная масса вала-шестерни	$m_2, кг$	$9,0 \cdot 10^3$	$9,0 \cdot 10^3$
Приведенный момент инерции барабана	$I_3, кг \cdot м^2$	19325,0	$250,0 \cdot 10^3$
Крутильная жесткость электромагнитного поля двигателя [3]	$C_{01}, Н \cdot м$	$2,0 \cdot 10^7$	$13,5 \cdot 10^7$
Крутильная жесткость валопровода	$C_{12}, Н \cdot м$	$2,2 \cdot 10^7$	$1,8 \cdot 10^7$
Жесткость зубчатой передачи [4]	$C_{23}, Н \cdot м$	$6,2 \cdot 10^8$	$6,2 \cdot 10^8$
Линейная жесткость вала-шестерни и опор	$C_2, Н/м$	$35,0 \cdot 10^9$	$35,0 \cdot 10^9$

Таблица 3  
Собственные частоты механических систем приводов барабанных мельниц МРГ 5500x7500 и МШЦ 5500x6500

Собственная частота, $c^{-1}$	Мельница	
	МРГ 5500x7500	МШЦ 5500x6500
$k_1$	16	50,7
$k_2$	49,8	135,3
$k_3$	$1,1 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^3$
$k_4$	$2,2 \cdot 10^3$	$2,2 \cdot 10^3$

Из табл. 3 видно, что одна из низших собственных частот ( $k_2$ ) двигателя мельницы МРГ 5500x7500 практически совпадает с частотой возмущающего момента, равной тройной частоте вращения шестерни. Это приводит к возникновению резонансных

колебаний в системе. Ни одна из низших собственных частот привода мельницы МШЦ 5500x6500 не совпадает с частотой возмущающего момента, равной тройной частоте вращения шестерни, поэтому резонанс не возникает.

Таким образом проведенные теоретические исследования дают научное обоснование причинам, вызывающим повышенные динамические нагрузки в приводах барабанных мельниц, наблюдаемым экспериментально.

Самым практичным способом уменьшения динамических нагрузок представляется снижение жесткости валопровода, например, установкой упругой муфты. Снижение крутильной жесткости валопровода неизбежно приведет к



уменьшению низших собственных частот механической системы и вводу системы в дорезонансную область.

Для расчета установившихся вынужденных колебаний дополним уравнения системы (1) членом уравнения, отвечающим за

кинематическое возбуждение колебаний, и членом уравнения, отвечающим за рассеивание энергии колебаний. Система уравнений, описывающих вынужденные колебания механической системы привода барабанной мельницы, принимают вид

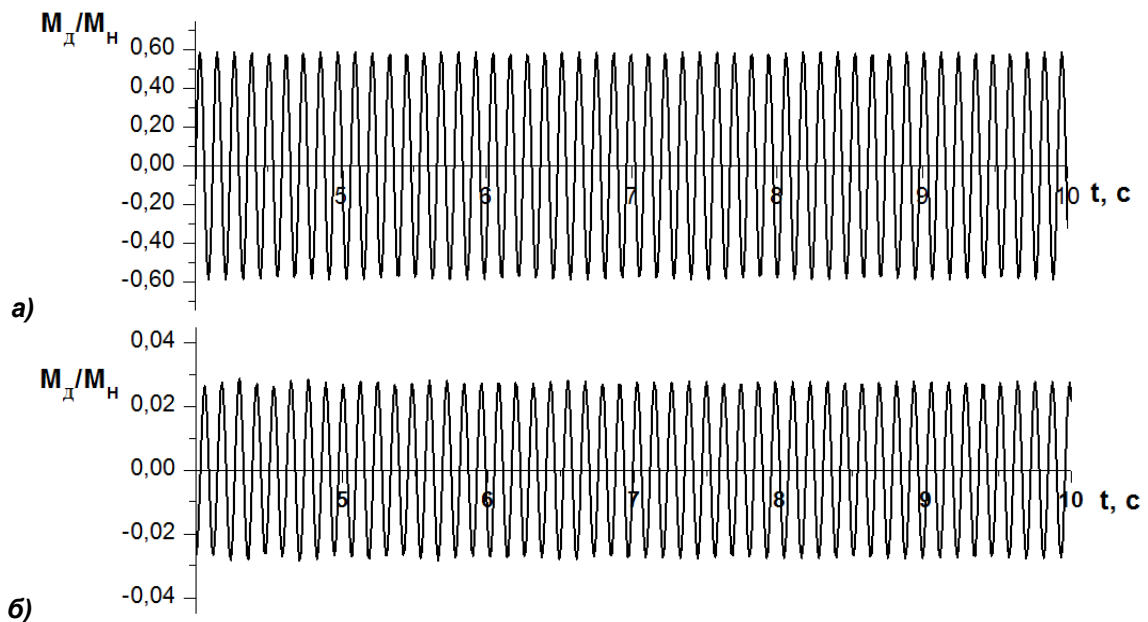
$$\begin{aligned}
 I_1 \varphi_1'' &= -c_{01} \varphi_1 + c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) - \mu \varphi_1', \\
 I_2 \varphi_2'' &= -c_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) + c_{23} r^2 \left( \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{x}{r} \right) + c_{23} r \Delta \cos(kt) - \mu \varphi_2', \\
 I_3 \varphi_3'' &= -c_{23} r \left( \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{x}{r} \right) r - c_{23} r \Delta \cos(kt) - \mu \varphi_3', \\
 m x'' &= -c_2 x + c_{23} r \left( \varphi_3 - \varphi_2 - \frac{x}{r} \right) - c_{23} \Delta \cos(kt) - \mu x',
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\Delta$  – амплитуда кинематической погрешности;  $\mu$  – эквивалентный коэффициент силы вязкого сопротивления, рассчитываемый по формуле

$$\mu_1 = \frac{c_{23} \Psi}{2\pi k_1}, \tag{7}$$

где  $\Psi$  – коэффициент затухания, принятый равным 0,8.

На рис. 5 приведены результаты расчета установившихся вынужденных колебаний упругого момента в валопроводе привода мельницы МРГ 5500x7500.



**Рис. 5. Динамика упругого момента в валопроводе привода мельницы МРГ 5500x7500 при: а –  $c_{12}=2,2 \cdot 10^4$  кН·м; б –  $c_{12}=7,3 \cdot 10^3$  кН·м**

Из рис. 5 видно, что при жесткости валопровода, обеспечивающей совпадение одной из низших частот с утроенной частотой вращения шестерни, происходят колебания упругого момента с коэффициентом динамичности 1,58 (рис. 5, а). Уменьшение жесткости в 3 раза за счет применения более мягкой упругой муфты (рис. 5, б) привело к снижению коэффициента динамичности до значения 1,03. Таким образом, регулировкой

жесткости упругой муфты можно достичь снижения интенсивности колебаний упругого момента в валопроводе и, следовательно, динамических нагрузок на зубчатую передачу.

**Выводы.**

1. В настоящей работе теоретически обоснованы причины возникновения повышенных динамических нагрузок в механической системе привода барабанных мельниц и способ их уменьшения.



2. Разработана эквивалентная динамическая расчетная схема и математическая модель механической системы привода барабанной мельницы, позволяющая выбирать рациональные динамические параметры привода и исключить резонансные режимы работы.

#### Список использованных источников

1. Виноградов Б.В. Відкриті зубчасті передачі барабанних млинів. Зношування та навантаження: монографія / Б.В. Виноградов. // Дніпропетровськ: УДХТУ, 2004. – 141 с.

2. Виноградов Б.В. Статика і динаміка барабанних млинів / Б.В. Виноградов // Дніпропетровськ: УДХТУ, 2016.– 202 с.

3. Виноградов Б.В., Федін Д. А. Механический аналог синхронного двигателя // Науковий вісник НГУ, 2012, № 1 – С. 78-82.

4. Виноградов Б.В. The stiffness of the open gearing of tumbling mill [Текст] / Б.В. Виноградов, Д. А. Федін // Науковий вісник НГУ, 2016, № 2 – С. 24-29.

5. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер // под ред. Э. И. Григолюк. – М.: Машиностроение. – 1985. – 472 с.

#### Список источников в транслитерации

1. Vinogradov B.V. Vidkriti zubchasti peredachi barabannih mliniv. Znoshuvannya ta navantazhennya: monografiya / B.V. Vinogradov. // Dnipropetrovsk: UDHTU, 2004. – 141 s.

2. Vinogradov B.V. Statika i dinamika barabannih mliniv / B.V. Vinogradov // Dnipropetrovsk: UDHTU, 2016.– 202 s.

3. Vinogradov B.V., Fedin D. A. Mehanicheskii analog sinhronnogo dvigatelya // Naukoviy visnik NGU, 2012, №1 – S. 78-82.

4. Vinogradov B.V. The stiffness of the open gearing of tumbling mill [Текст] / B.V. Vinogradov, D. A. Fedin // Naukoviy visnik NGU, 2016, №2 – S. 24-29.

5. Kolebaniya v inzhenernom dele / S. P. Timoshenko, D.X. Yang, U. Uiver // pod red. E. I. Grigolyuk. – M.: Mashinostroenie. – 1985. – 472 s.

#### ПРО РЕЗОНАНСНІ КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ У ПРИВОДІ БАРАБАННОГО МЛИНА

**Анотація.** Проаналізовано експериментальні дані щодо коливальних процесів в механічній системі привода барабанного млина. Розроблено математичну модель динаміки механічної системи привода барабанного млина. На основі розробленої моделі визначено, що при наявності в системі привода власної частоти, яка співпадає з подвоєною частотою обертання шестерні, виникають резонансні коливання крутного моменту у валопроводі та, отже, підвищені динамічні навантаження.

**Ключові слова:** барабанний млин, зубчаста передача, коливання, резонанс.

#### ABOUT RESONANCE TORSIONAL OSCILLATIONS AT TUMBLING MILL DRIVE

**Annotation.** Experimental data about oscillations at mechanical system of tumbling mill gear drive is analyzed. Mathematical model of dynamics at tumbling mill gear drive is developed. On the basis of model created it is shown that resonance oscillations of torque and high dynamic load occurred if there is own frequency which coincident with doubled frequency of pinion rotation.

**Key words:** tumbling mill, gearing, oscillations, resonance.

#### Сведения об авторах

**Виноградов Борис Владимирович** – доктор технічних наук, професор кафедри матеріалознавства ГВУЗ «Український державний хіміко-технологічний університет» (проспект Гагарина 8, г. Дніпро, Україна, 49005, e-mail: borvvin@gmail.com).

**Федін Дмитрій Александрович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри матеріалознавства ГВУЗ «Український державний хіміко-технологічний університет» (проспект Гагарина 8, г. Дніпро, Україна, 49005, e-mail: tm.i.sm.master@gmail.com).

**Виноградов Борис Володимирович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри матеріалознавства Державного ВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет» (пр. Гагаріна 8, м. Дніпро, Україна, 49005, e-mail: borvvin@gmail.com).

**Федін Дмитро Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент кафедри матеріалознавства Державного ВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет» (пр. Гагаріна 8, м. Дніпро, Україна, 49005, e-mail: tm.i.sm.master@gmail.com).

**Vinogradov Boris** – Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Material Sciences Ukrainian State University of Chemical Technology (Ave. Gagarin, 8, Dnipro, Ukraine, 49005, e-mail: borvvin@gmail.com).

**Fedin Dmitriy** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of Material Sciences Ukrainian State University of Chemical Technology (Ave. Gagarin, 8, Dnipro, Ukraine, 49005, e-mail: tm.i.sm.master@gmail.com).