

**Ольшанський В.П.**  
д.ф.-м.н., професор

**Ольшанський С.В.**  
к.ф.-м.н., доцент

*Харківський  
національний  
технічний  
університет  
сільського  
господарства  
імені П. Василенка*

**Olshanskii V.**

**Olshanskii S.**

*Kharkiv Petro  
Vasylenko National  
Technical University of  
Agriculture*

**УДК 534.1:539.3**

## **КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З М'ЯКОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ ПРУЖНОСТІ, СПРИЧИНЕНІ СИЛОВИМ ІМПУЛЬСОМ**

*Розглянуто рух осцилятора з м'якою характеристикою пружності, яка пропорційна квадратному кореневі з деформації пружини при дії силового імпульса. Побудовано аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння другого порядку для розрахунку коливань, спричинених миттєво прикладеною силою або прямокутним імпульсом обмеженої тривалості. Показано, що коефіцієнт динамічності осцилятора з вибраною характеристикою пружності, при ступінчастому силовому навантаженні, дорівнює 2,25, тобто він більший ніж у лінійної системи. У випадку збурення руху прямокутним імпульсом, коефіцієнт динамічності залежить від тривалості дії тимчасового навантаження і не перевершує 2,25. Знайдено тривалість імпульсу, коли виникають максимальні амплітуди вільних коливань у розвантаженого осцилятора. На відміну від лінійних систем, ця тривалість залежить не тільки від власних параметрів осцилятора, а й від величини миттєво прикладеної сили. Визначена також тривалість імпульса, за якої розвантажений осцилятор не робить вільних коливань, а знаходиться в стані спокою. В аналітичних розв'язках задач Коші, крім елементарних функцій, задіяні також періодичні Атеб-функції. Для спрощення проведення розрахунків, складено таблицю використаних спеціальних функцій. Наведено приклади розрахунків.*

**Ключові слова:** *нелінійний осцилятор, м'яка характеристика пружності, імпульсне навантаження, коефіцієнт динамічності, періодичні Атеб-функції.*

**Постановка проблеми.** Інформації про дослідження нелінійних механічних коливань приділялась і приділяється зараз значна увага в науковій літературі. Так, крім багатьох наукових статей, в останні роки видано монографії [1-4]. Окремі статті частково увійшли в огляд [5], де розглянуто нелінійні коливання систем змінної маси. Про коливання таких систем, за наявності сил сухого тертя, йдеться також у [6, 7]. Стала увага цій тематиці зумовлена важливою роллю, яку відіграють механічні коливання у техніці та технологіях, адже від них значною мірою залежить надійність і ресурс машин, умови безпечної роботи людей-операторів, інтенсивність деяких технологічних процесів та ін. Виходячи з того, що огляди окремих робіт з нелінійних коливань зроблено у згаданих публікаціях, тут проводити його не будемо.

**Формування мети дослідження.** Метою даної статті є виведення та апробація

розрахункових формул для опису руху осцилятора з указаною ступеневу нелінійністю при дії силового імпульсного навантаження, а також аналіз особливостей коливань, спричинених таким навантаженням.

**Виклад основного матеріалу дослідження.**

1. Коливання при ступінчастому навантаженні. Їх описуємо нелінійним диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^{1/2} \text{sign}(x) = P \cdot H(t), \quad (1)$$

де  $m$  – маса осцилятора;  $c > 0$  – характеризує жорсткість;  $P$  – величина миттєво прикладеної сили;  $H(t)$  – одинична функція Хевісайда;  $t$  – час.

Рівняння (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$



Враховуючи, що  $\dot{x} = v$ ,  $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ ,

рівнянню (1) надаємо форму:

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{m} (P - cx^{1/2}). \quad (3)$$

При цьому вважаємо, що  $x \geq 0$ , коли  $t \geq 0$ .

Проінтегрувавши (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{4c}{3m}} \sqrt{x(a^{1/2} - x^{1/2})}. \quad (4)$$

Тут  $a = \frac{9P^2}{4c^2}$  – максимальне динамічне відхилення осцилятора від початкового положення  $x = 0$ .

При статичному навантаженні силою  $P$  відхилення осцилятора від положення рівноваги становить:  $x_{CT} = (P/c)^2$ .

Тому коефіцієнт динамічності системи  $K_g$  дорівнює:

$$K_g = a/x_{CT} = 2,25 > 2.$$

Він більший, ніж у лінійної коливальної системи при ступінчастому її навантаженні.

Щоб вивести формулу переміщень на проміжку  $x \in [0; a]$ , коли  $v \geq 0$ , проведемо подальше інтегрування (4). Воно дає залежність:

Інтегрування дає:

$$v = -\sqrt{\frac{4c}{3m}} \left[ a^{3/2} - x^{3/2} - \frac{3P}{2c}(a-x) \right]^{1/2} = -\sqrt{\frac{4c}{3m}} \sqrt{x(a^{1/2} - x^{1/2})}.$$

Звідки випливає, що:

$$2(t - t_*) \sqrt{\frac{c}{3m}} = -\int_a^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^{1/2} - y^{1/2})}}.$$

Замінивши тут змінну інтегрування  $y$  на  $u$  отримуємо:

$$\int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \omega(t - t_*),$$

що, після обчислення квадратури, зводиться до формули:

$$\frac{x}{a} = \left[ 1 - \frac{\omega^2}{4}(t - t_*)^2 \right]^2. \quad (8)$$

Вона дозволяє обчислювати переміщення при  $t \in [t_*; 2t_*]$ .

Одержані формули (6) і (8) описують рух осцилятора на першому циклі коливальності, що легко поширити і на інші цикли.

Отже, розв'язок нелінійного диференціального рівняння (1) виражається в

$$2t \sqrt{\frac{c}{3m}} = \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^{1/2} - y^{1/2})}}.$$

Переходом до нової змінної інтегрування

$y = au^2$ ;  $dy = 2au du$ , їй надаємо форму:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \omega t, \quad (5)$$

$$\text{де } \omega = \sqrt{\frac{c}{3m\sqrt{a}}} = \frac{c}{3} \sqrt{\frac{2}{mP}}.$$

Інтеграл в (5) виражається через елементарні функції. Тому:

$$\frac{x}{a} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\omega t}{2} \right)^2 \right]^2 = \omega^2 t^2 \left( 1 - \frac{\omega t}{4} \right)^2. \quad (6)$$

Ця залежність описує рух осцилятора при  $\omega t \in [0; 2]$ . Максимальне відхилення осцилятора досягається, коли:

$$t = t_* = \frac{2}{\omega} = \frac{3}{c} \sqrt{2mP}.$$

Цей час залежить не тільки від  $m$  і  $c$ , а також і від  $P$ . Чим більша миттєво прикладена сила  $P$ , тим більше часу осцилятор віддаляється від вихідного положення.

Щоб описати рух осцилятора на проміжку  $t \in [t_*; 2t_*]$ , треба інтегрувати рівняння (3) при початкових умовах:

$$x(t_*) = a; \quad \dot{x}(t_*) = 0. \quad (7)$$

елементарних функцій.

Геометричним образом, до якого призводять залежності (6) та (8), є графік коливальності, зображений на рис. 1.

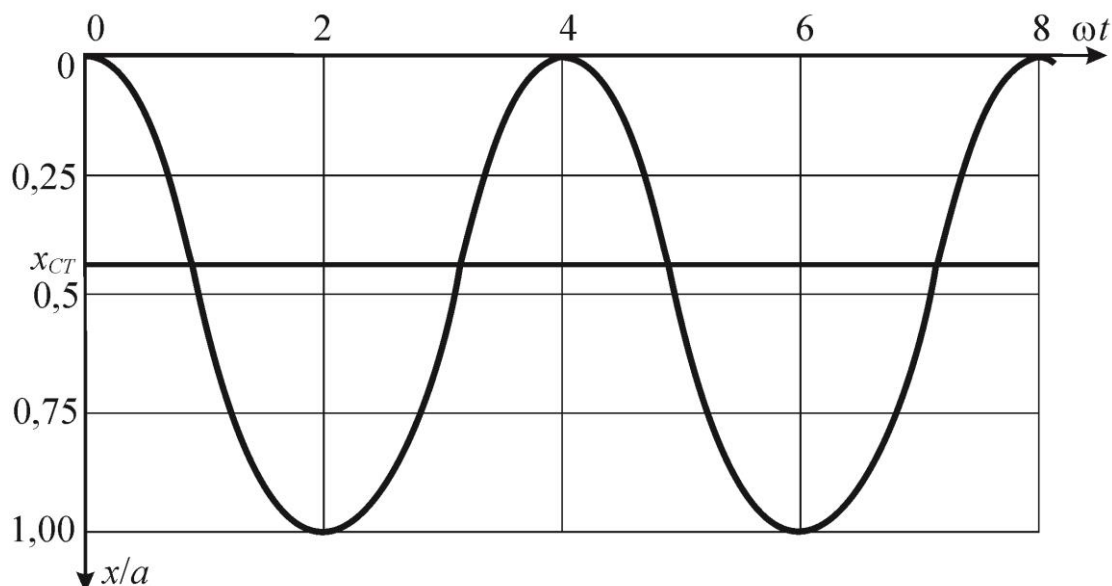
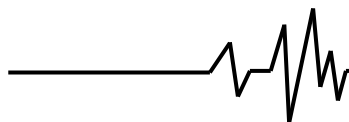


Рис. 1 Графік коливань, який відображає залежність (5) та (6)

Із графіка видно, що час перебування осцилятора при  $x > x_{CT}$  більший, ніж час перебування його при  $x < x_{CT}$ . Така особливість нелінійних коливань не спостерігається у лінійних систем, де графік  $x(t)$  перетинає горизонтальну пряму  $x = x_{CT}$  через рівні проміжки часу.

2. Коливання осцилятора, спричинені імпульсом обмеженої тривалості. Їх описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^{1/2} \text{sign}(x) = P \cdot [H(t) - H(t - t_1)] \dots (9)$$

$$\frac{x_1}{a} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\omega t_1}{2} \right)^2 \right]^2; \quad v_1 = \sqrt{\frac{4c}{3m}} \sqrt{x_1 (a^{1/2} - x_1^{1/2})}. \quad (10)$$

Це початкові умови до однорідного рівняння, що відповідає (9).

Оскільки однорідне рівняння має вигляд:

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} x^{1/2},$$

то його інтегрування, з урахуванням (10), дає:

$$v = \pm \sqrt{\frac{4c}{3m} \sqrt{a_*^{3/2} - x^{3/2}}}. \quad (11)$$

Тут  $a_* = a \cdot \lambda$ ;  $\lambda = (x_1/a)^{2/3}$ .

Де  $t_1$  – час дії миттєво прикладеної сили  $P$ .

При  $t > t_1$  рівняння (9) стає однорідним, тобто в ньому можна покласти  $P_0$

Далі будемо розрізняти два випадки тривалості імпульса.

2.1. У першому приймаємо  $\omega t_1 \in (0; 2)$ .

Задавши  $t = t_1$ , по формулах (4), (6) знаходимо переміщення і швидкість осцилятора в момент його миттєвого розвантаження:

Подальше інтегрування виразу рівняння (11) призводить до залежності:

$$\int_{x_1/a_*}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^{3/2} - y^{3/2}}} = \sqrt{\frac{4c}{3m}} (t - t_1),$$

якій, заміною  $y = a_* u$ , надаємо вигляд:

$$\int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \omega_* (t - t_1). \quad (12)$$

$$\text{При цьому } \omega_* = \frac{\sqrt{4c}}{\sqrt{3m a_*}} = \frac{2\omega}{\lambda^{1/4}}.$$

Щоб одержати вираз  $x(t)$ , проведемо наступне перетворення в (12):



$$\int_{x_1/a_*}^{x/a} \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \omega_*(t-t_1).$$

Звідки випливає, що:

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \tau = I_* - \omega_*(t-t_1). \tag{13}$$

Де  $I_* = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}}$  виражається через неповні еліптичні інтеграли першого та другого роду, які затабульовані в [8, с. 103, 106]. Згідно з [9, с. 126]:

$$I_* = 2 \int_{\sqrt{x_1/a_*}}^1 \frac{zdz}{\sqrt{1-z^3}} = 2 \left[ \left( \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \sqrt[4]{3} \right) F(\varphi, \sin 75^\circ) + 2\sqrt[4]{3} E(\varphi, \sin 75^\circ) - \frac{2\sqrt{1-(x_1/a_*)^{3/2}}}{\sqrt{3+1-\sqrt{x_1/a_*}}} \right];$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{x_1/a_*}}{\sqrt{3+1-\sqrt{x_1/a_*}}}. \tag{14}$$

Отже,  $I_*$  можна обчислювати за  $t = t_2$ , коли осцилятор відхилиться на  $a_*$  від початкового положення  $x = 0$ . Задавши в (13)

Вираз (13) дає можливість знайти час  $t = t_2$ ,  $x = a_*$ , отримуємо:

$$\omega_*(t_2 - t_1) = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = I_* \Rightarrow \omega_* t_2 = I_* + \omega_* t_1,$$

або

$$\omega t_2 = \frac{1}{2} \lambda^{1/4} I_* + \omega t_1. \tag{15}$$

Нарешті, використовуючи періодичні Атеб-функції [3, 10, 11], із (13) одержуємо формулу переміщень розвантаженого осцилятора на проміжку  $t \in [t_1, t_2]$ :

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Ca\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4} \tau\right), \tag{16}$$

де  $Ca\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4} \tau\right)$  – Атеб-косинус.

Подальший рух осцилятора, при  $t > t_2$ , зводиться до вільних коливань з амплітудою  $a_*$  відносно положення  $x = 0$ .

2.2. У другому випадку імпульсного навантаження приймаємо  $\omega t_1 \in (2; 4)$ . Для цього моменту часу по формулі (8) одержуємо:

$$\frac{x_1}{a} = \left[ 1 - \frac{\omega^2}{4} (t_1 - t_*)^2 \right]^2; \quad v_1 = \sqrt{\frac{4c}{3m}} \sqrt{x_1 (a^{1/2} - x_1^{1/2})}. \tag{17}$$

Це початкові умови для розрахунку подальшого руху розвантаженого осцилятора.

Взявши знак мінус перед радикалом в (11), після інтегрування цього виразу, отримуємо:

$$-\int_{x_1}^x \frac{dy}{\sqrt{a_*^{3/2} - y^{3/2}}} = \sqrt{\frac{4c}{3m}} (t - t_1).$$

Заміною змінних  $y = a_* u$ ,

$d y = a_* du$ , йому надамо вигляд:

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \omega_*(t-t_1).$$



Далі проводимо перетворення:

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} - I_* = \omega_*(t - t_1).$$

Звідки випливає, що:

$$\int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}} = \xi = I_* + \omega_*(t - t_1). \tag{18}$$

Задавши в (18)  $x = 0$ ;  $t = t_2$ , одержуємо вирази:

$$\omega_* t_2 = J - I_* + \omega_* t_1 \text{ або } \omega t_2 = \frac{1}{2} \lambda^{1/4} (J - I_*) + \omega t_1, \tag{19}$$

Для обчислення часу  $t_2$ , коли осцилятор повернеться у вихідне положення.

Наведено інтеграл:

$$J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}^{3/2}}$$

Виражається через гама-функцію в [9, с. 295], де:

$$J = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)} \approx 1,72474.$$

Для обчислення  $x/a$  із (18) одержуємо формулу:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Ca\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}\xi\right), \tag{20}$$

Вона має чинність при  $t_1 \in (t_1; t_2)$ .

Далі, при  $t > t_2$ , осцилятор буде у стані вільних коливань, спричинених в положенні  $x = 0$  початковою швидкістю  $v_0$ , яку він матиме, повернувшись у це положення. Швидкість  $v_0$  і  $v_1$  пов'язана залежністю:

$$v_0 = \frac{v_1}{\sqrt{1 - \sqrt{x_1/a}}},$$

де  $v_1$  – визначена виразом (17).

З метою спрощення розрахунків по формулах (16) і (20), наводимо таблицю значень Атеб-косинуса.

Таблиця 1

Значення Атеб-косинуса

$\tau$	$10Ca\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3\tau}{4}\right)$	$\tau$	$10Ca\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3\tau}{4}\right)$	$\tau$	$10Ca\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3\tau}{4}\right)$
0,00	10,00	0,60	8,67	1,20	4,85
0,05	9,99	0,65	8,44	1,25	4,44
0,10	9,96	0,70	8,19	1,30	4,01
0,15	9,92	0,75	7,93	1,35	3,58
0,20	9,85	0,80	7,65	1,40	3,13



Продовження табл. 1

0,25	9,77	0,85	7,35	1,45	2,67
0,30	9,66	0,90	7,04	1,50	2,20
0,35	9,54	0,95	6,71	1,55	1,72
0,40	9,40	1,00	6,37	1,60	1,24
0,45	9,25	1,05	6,01	1,65	0,74
0,50	9,07	1,10	5,64	1,70	0,25
0,55	8,88	1,15	5,25	1,7247	0,00

Якщо  $\tau > J$ , то при використанні табл. 1 треба прийняти до уваги, що:

$$Ca \left[ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}(J - \tau) \right] = Ca \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}\tau \right).$$

Розглянемо приклади розрахунків.

**Приклад 1.** Обчислимо час першої зупинки осцилятора, коли  $\omega t_1 = 1,4$ . По формулі (6), для такої тривалості імпульса, маємо:  $x_1/a \approx 0,8281$ ;

$$\lambda = a_*/a = (x_1/a)^{2/3} \approx 0,8818;$$

$\sqrt{x_1/a_*} \approx 0,9691$ ;  $\varphi \approx 15,216^\circ$ . По таблиці 1 [8, с. 103 і с. 106] знаходимо, що  $F(\varphi, \sin 75^\circ) \approx 0,2685$ ;  $E(\varphi, \sin 75^\circ) \approx 0,3401$  і по формулі (14) одержуємо:  $I_* \approx 0,404$ . Тоді, згідно з (15),  $\omega t_2 \approx 1,596$ . Обчислимо далі, яким буде відношення  $x/a$  при  $\omega t = 1,5$ .

Для цього моменту часу  $\tau \approx 0,198$ . Методом лінійної інтерполяції по табл. 1 одержуємо  $Ca \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}\tau \right) \approx 0,985$ . Тому, згідно з (20),  $x/a \approx 0,869$ .

Зазначимо, що при обчисленні  $I_*$ , крім формули (14), можна використовувати і табл. 1, бо:

$$\frac{x_1}{a_*} = Ca \left( \frac{1}{2}; 1; I_* \right). \quad (21)$$

Оскільки  $x_1/a_* \approx 0,939$ , то інтерполяція табличних даних дає:

$$I_* \approx 0,35 + 0,05 \frac{0,939 - 0,954}{0,940 - 0,954} \approx 0,404,$$

що було знайдено раніше по формулі (14).

**Приклад 2.** Обчислимо час повернення осцилятора у вихідне положення, якщо його розвантаження відбулося при  $\omega t_1 = 3,2$ . Підставивши це значення  $\omega t_1$  в (10), одержуємо:  $x_1/a \approx 0,4096$ . Тоді:

$$\lambda \approx 0,5515; \sqrt{x_1/a_*} \approx 0,8618; \varphi \approx 31,547^\circ.$$

Для цього кута, по таблицях в [8, с. 103 і с. 106] знаходимо:  $F(\varphi, \sin 75^\circ) \approx 0,5785$ ;

$$E(\varphi, \sin 75^\circ) \approx 0,5250.$$

Далі по формулі (14) одержуємо  $I_* \approx 0,837$ . Тоді, згідно з (19),  $\omega t_2 \approx 3,583$ . Якщо  $I_*$  обчислювати з використанням залежності (21) і табл. 1, то, при  $x_1/a_* \approx 0,7427$ , лінійна інтерполяція дає:

$$I_* \approx 0,8 + \frac{0,7427 - 0,765}{0,735 - 0,765} \cdot 0,05 \approx 0,837,$$

тобто той же результат, що і формула (14).

Знайдемо далі відношення  $x/a$ , коли  $\omega t = 3,4$ . Для нього, згідно з (18),  $\xi \approx 0,837 + 0,464 \approx 1,301$ . В табл. 1 йому відповідає  $Ca \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{4}\xi \right) \approx 0,400$ . Тому  $x/a \approx 0,221$ .

Розрахунки підтвердили вірогідність викладеної теорії.

**Висновки.**

1. Коефіцієнт динамічності вибраного осцилятора з м'якою характеристикою пружності більший, ніж у лінійного осцилятора.

2. Переміщення осцилятора при ступінчастому його навантаженні виражається через елементарні функції.

3. Розрахунок коливань після розвантаження осцилятора зручно проводити з використанням періодичних Атеб-функцій.

**Список використаних джерел**

1. Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин // Том 1: Модели, методы, явления. – М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.  
 2. Митропольський Ю. А. Избранные труды в 2-х томах / Ю. А. Митропольский. – Киев: Наукова думка, 2012. – 504 с.  
 3. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Пукач. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.



4. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин / В. М. Шатохин. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.

5. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system / L. Cveticanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – Pp. 56-74.

6. Ольшанский В. П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Харків: Міськдрук, 2014. – 264 с.

7. Ольшанський В. П. Динаміка дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тищенко. – Харків : Міськдрук, 2016. – 264 с.

8. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М. : Наука, 1977. – 344 с.

9. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев // Элементарные функции. – М. : Наука, 1981. – 800 с.

10. Грицик В. В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій / В. В. Грицик, М. А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37-42.

11. Сокіл Б. І. Про застосування Атеб-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ / Б. І. Сокіл // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 1997. – № 1. – С. 55-58.

#### Список джерел у транслітерації

1. Avramov K. V. Nonlinear dynamics of elastic / K. V. Avramov, V. Michlin // Volume 1: Models, Methods, phenomena. – Moscow-Izhevsk: Institute of research of computer, 2010. – 704 P.

2. Mitropolsky Yu. A. Selected Works in 2 Volumes / Yu. A. Mitropolsky. – Kiev: Naukova Dumka, 2012. – 504 P.

3. Pukach P. Y. Qualitative methods of nonlinear vibration systems / P. Y. Pukach. – Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2014. – 288 P.

4. Shatokhin VM Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission of machines / VM Shatokhin. – Kharkov: NTU «KhPI», 2008. – 456 P.

5. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system / L. Cveticanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – P. 56-74.

6. Olshanskii V. P. The VBK method in calculations of nonstationary oscillations of an oscillator / V. P. Olshanskii, S. V. Olshanskii. –

Kharkov: Miskdruk, 2014. – 264 P.

7. Olshanskii V. P. Dynamics dissipative oscillators / V. P. Olshanskii, S. V. Olshanskii, L. M. Tishchenko. – Kharkov: Miskdruk, 2016. – 264 P.

8. Janke E. Special functions / E. Janke, F. Emde, F. Lesch. – Moscow: Nauka, 1977. – 344 P.

9. Prudnykov A. P. Integrals and series / A. P. Prudnykov, A. A. Brychkov, O. I. Marychev // Elementary functions. – Moscow : Nauka, 1981. – 800 P.

10. Grytsyk V. V. Mathematical models and algorithms implementation Ateb functions / V. V. Grytsyk, M. A. Nazarkevych // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – Kyiv, 2007. – № 12. – P. 37-42.

11. Sokil B.I. About the whispering of the Ateb-functions for the motives of the rozv'yakiv of the active rivnyans, let's describe the non-linear collation of the one-middle peasants / B.I. Sokil // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – Kyiv, 1997. – № 1. – P. 55-58.

#### КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С МЯГКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ СИЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

**Аннотация.** Рассмотрено движение осциллятора с мягкой характеристикой упругости, которая пропорциональна квадратному корню с деформации пружины, при действии силового импульса. Построено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, для расчета колебаний, вызванных мгновенно приложенной силой или прямоугольным импульсом ограниченной протяженности. Показано, что коэффициент динамичности осциллятора с выбранной характеристикой упругости, при ступенчатой силовой нагрузке, равен 2,25, то есть он больший, нежели у линейной системы. В случае возмущения движения прямоугольным импульсом, коэффициент динамичности зависит от продолжительности действия нагрузки и не превышает 2,25. Найдена продолжительность импульса, когда возникают максимальные амплитуды свободных колебаний у разгруженного осциллятора. В отличие от линейных систем, эта продолжительность зависит не только от собственных параметров осциллятора, но и от величины приложенной силы. Определена также продолжительность импульса, при которой разгруженный осциллятор не совершает свободных колебаний, а находится в состоянии покоя. В аналитических решениях задач Коши, кроме



элементарных функций, задействованы также периодические Атеб-функции. Для упрощения проведения расчетов составлено таблицу использованных специальных функций. Приведено примеры расчетов.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, мягкая характеристика упругости, импульсное нагружение, коэффициент динамичности, периодические Атеб-функции.

#### OSCILLATOR OSCILLATIONS WITH SOFT CHARACTERISTICS OF ELASTICITY CAUSED BY A POWER PULSE

**Annotation.** The motion of an oscillator with a soft elastic characteristic, which is proportional to the square root with the deformation of the spring, is considered under the action of a force pulse. An analytic solution of a second-order nonlinear differential equation is constructed to calculate the oscillations caused by an instantaneously applied force or a rectangular pulse of a limited extent. It is

shown that the coefficient of dynamism of an oscillator with a chosen elasticity characteristic, with a stepped power load, is 2.25, that is, it is larger than for a linear system. In the case of disturbance of motion by a rectangular pulse, the dynamic coefficient depends on the duration of the load and does not exceed 2.25. The pulse duration is found when the maximum free oscillation amplitudes of the unloaded oscillator appear. Unlike linear systems, this duration depends not only on the proper parameters of the oscillator, but also on the magnitude of the applied force. The pulse duration at which the unloaded oscillator does not perform free oscillations is determined, but is at rest. In the analytic solutions of the Cauchy problem, in addition to elementary functions, periodic Атеб-functions are also involved. To simplify the calculation, a table of used special functions is compiled. Examples of calculations are given.

**Key words:** nonlinear oscillator, soft elasticity characteristic, impulse loading, dynamic coefficient, periodic Атеб-functions.

#### Відомості про авторів

**Ольшанський Василь Павлович** – д.ф.-м.н, професор кафедри теоретичної механіки та деталей машин Харківського національного університету сільського господарства.

**Ольшанський Станіслав Васильович** – к.ф.-м.н., доцент, Харківський національний університет сільського господарства (E-mail: stasolsh77@gmail.com).

**Ольшанский Василий Павлович** – д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической механики и деталей машин Харьковского национального университета сельского хозяйства.

**Ольшанский Станислав Васильевич** – к.ф.-м.н., доцент, Харьковский национальный университет сельского хозяйства (E-mail: stasolsh77@gmail.com).

**Olshansky Vasilii Pavlovich** – Professor of the Department of Theoretical Mechanics and Machine Parts, Kharkiv National University of Agriculture, Dr. Sci. (Phys.-Math).

**Olshansky Stanislav Vasilyevich** – Candidate . Sci. (Phys.-Math), (E-mail: stasolsh77@gmail.com).