



Морачковский О.К.
д.т.н., профессор

Дружинин Е.И.
к.т.н., доцент

Беломытцев А.С.
к.т.н., доцент

**Национальный
технический
университет
«Харьковский
политехнический
институт»**

Morachkovskii O.

Druzhynin E.

Bielomyttsev A.

**National Technical
University «Kharkiv
Polytechnic Institute»**

УДК 621.8.3

РАСЧЕТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИЛОВЫХ ПЕРЕДАЧ С КАРДАННЫМ ВАЛОМ

В статье рассмотрены точные и приближенные уравнения, описывающие крутильные колебания в силовых передачах, содержащих карданный вал. Использование приближенных уравнений позволяет существенно сократить объем вычислений, в связи с чем, они могут быть использованы для расчета моделей силовых передач транспортных машин со многими степенями свободы.

Результаты численных экспериментов показали, что возмущающие силы, действующие на элементы карданной передачи и приводящие к высокочастотным колебаниям, вызываются кинематическими и параметрическими колебаниями самой карданной передачи от эффекта ее вращения с переменными по времени колебаниями угла излома осей соединяемых карданных валов, а также возмущениями от двигателя.

По результатам расчетных исследований многомассовой модели землеройной гусеничной машины, содержащей карданную передачу, и сопоставления их с экспериментом, даны рекомендации по снижению уровня динамических нагрузок в элементах и узлах конструкции.

***Ключевые слова:** системы со многими степенями свободы, силовые передачи, карданные передачи, крутильные колебания, метод Ньютона, метод гармонического баланса.*

Постановка проблемы. Вопросы повышения надежности, долговечности, снижения уровня вибраций элементов и узлов, вновь создаваемых устройств на стадиях их проектирования и доводки, как за счет конструкторских решений, направленных на снижение динамических нагрузок, так и за счет разработки уточненных методик численных экспериментов, были и остаются одними из важнейших. Карданная передача является одним из наиболее ответственных агрегатов, и до сих пор по долговечности уступает главной передаче, коробке передач и другим агрегатам. Учитывая тот факт, что карданная передача является одним из источников повышенной вибрации элементов и узлов силовых передач транспортных средств, а также ее довольно высокую стоимость изготовления, следует признать, что задача расчета крутильных колебаний силовых передач с карданным валом является актуальной.

Анализ исследований и публикаций. Одним из источников возбуждения крутильных колебаний в силовых передачах машин является карданное соединение валов [2–11]. В ранних работах, посвященных данному

вопросу, влияние непостоянства передаточного отношения карданного шарнира на процесс колебаний учитывалось лишь добавлением в дифференциальные уравнения периодических возмущающих сил. Получающиеся при этом линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами описывают лишь первое приближение процессов, наблюдающихся в действительности. В работе [2] были уточнены уравнения движения с периодическими коэффициентами, что позволило исследовать параметрическое возбуждение колебаний. Однако точные уравнения движения системы с карданной передачей оказались слишком сложными для аналитического исследования, поэтому в ряде работ используются следующие упрощения: карданная передача представляется в виде двухмассовой модели, не учитываются моменты инерции карданных валов [2, 4], линеаризуются кинематические уравнения связей для карданных шарниров [2-5]. В ряде работ при оценке дополнительных динамических усилий, вызванных неравномерностью вращения карданного вала, используются лишь кинематические



соотношения. Карданный вал при этом предполагается недеформируемым, а ведущий вал – равномерно вращающимся. Такой подход дает возможность определить лишь инерционные моменты в карданных шарнирах, пропорциональные моментам инерции карданных валов, и не позволяет оценить неравномерности вращения карданного вала на динамику всей системы. В работе [1] были получены точные и приближенные уравнения движения системы с карданным валом и выбрана модель, расчеты по которой требуют наименьшего времени, а результаты достаточно близки к точным. С помощью этой математической модели можно рассчитывать произвольные цепные модели силовых передач транспортных машин, которые не

содержат, кроме карданного вала, других нелинейных элементов.

Цель и постановка задачи. Целью данной работы является численное исследование многомассовой силовой передачи землеройной гусеничной машины для обнаружения и оценки уровня высокочастотных крутильных колебаний, порождаемых карданной передачей, и выработки рекомендаций по снижению динамических нагрузок в элементах и узлах конструкции.

Анализ результатов исследования. Как отмечалось ранее, в [1] были получены точные и приближенные уравнения движения системы с карданным валом, показанной на рис. 1, в которых использованы известные кинематические соотношения для

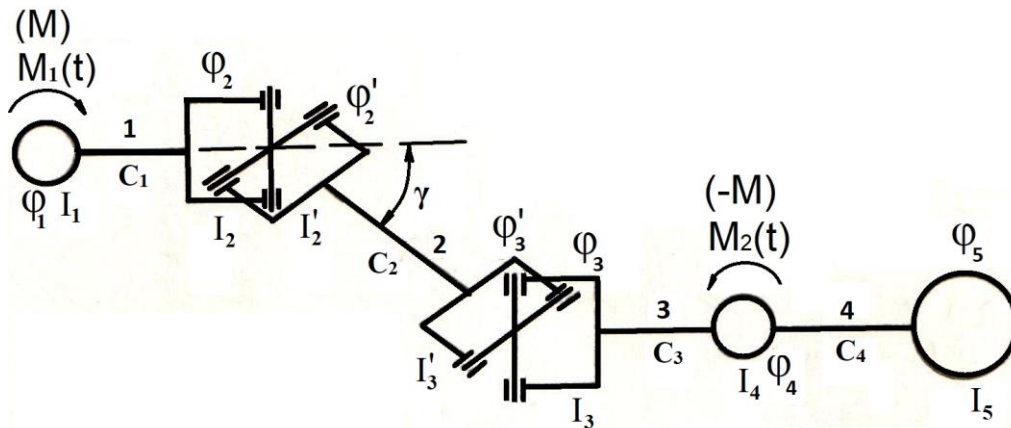


Рис. 1. Механическая модель силовой передачи с карданным валом.

карданного шарнира:

$$tg(k\varphi'_i) = tg(k\varphi_i) / \cos \gamma, \quad (1)$$

$$\dot{\varphi}'_i = \dot{\varphi}_i \frac{\cos \gamma}{1 - \sin^2 \gamma \cos^2(k\varphi_i)}, \quad i = 2, 3. \quad (2)$$

Масса 1 включает двигатель и редуктор с передаточным отношением k , масса 4 соответствует рабочему органу, к массам 1 и 4 приложены постоянные моменты M и $-M$, равные по величине передаваемому среднему моменту, все параметры приведены к валу двигателя.

При исследовании установившегося движения приведенные углы поворота масс принимаем в виде

$$\varphi_i = \omega t + \vartheta_i, \quad \varphi'_j = \omega t + \vartheta'_j, \quad i = 1, 4, \quad j = 2, 3, \quad (3)$$

где $\omega = const$ – постоянная составляющая угловой скорости вала двигателя;

$\vartheta_i, \vartheta'_j$ – малые периодически функции, характеризующие колебательный процесс в силовой установке.

Уравнения движения системы имеют вид:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\vartheta}_1 = M + c_1(\vartheta_2 - \vartheta_1), \\ [I_2 + \frac{I'_2 \cos^2 \gamma}{(1 - \sin^2 \gamma \cos^2 k(\omega t + \vartheta_2))^2}] \ddot{\vartheta}_2 = -c_1(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \\ + \frac{c_2 \cos \gamma (\vartheta'_3 - \vartheta'_2)}{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 k(\omega t + \vartheta_2)} + \frac{k I'_2 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma (\omega + \dot{\vartheta}_2)^2}{[1 - \sin^2 \gamma \cos^2 k(\omega t + \vartheta_2)]^3} \sin 2k(\omega t + \vartheta_2), \\ [I_3 + \frac{I'_3 \cos^2 \gamma}{(1 - \sin^2 \gamma \cos^2 k(\omega t + \vartheta_3))^2}] \ddot{\vartheta}_3 = c_3(\vartheta_4 - \vartheta_3) - \\ - \frac{c_2 \cos \gamma (\vartheta'_3 - \vartheta'_2)}{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 k(\omega t + \vartheta_3)} + \frac{k I'_2 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma (\omega + \dot{\vartheta}_2)^2}{[1 - \sin^2 \gamma \cos^2 k(\omega t + \vartheta_3)]^3} \sin 2k(\omega t + \vartheta_3), \\ I_4 \ddot{\vartheta}_4 = -M - c_3(\vartheta_4 - \vartheta_3) - c_4 \vartheta_4. \end{cases} \quad (4)$$



Определение периодических решений этих нелинейных дифференциальных уравнений рассматривается как периодическая краевая задача, которая решается с использованием метода Ньютона. Приближенные линейные дифференциальные уравнения получены из (4) следующим образом полагаем:

$$\omega t + \vartheta_i \approx \omega t, \quad \omega + \dot{\vartheta}_i \approx \omega, \quad \text{tg}(k\vartheta_i) \approx k\vartheta_i, \quad i = 2,3,$$

тогда из (1) получим

$$\mathcal{G}'_3 - \mathcal{G}'_2 = \frac{1 + \cos \gamma \cdot \text{tg}^2(k\omega t)}{\text{tg}^2(k\omega t) + \cos \gamma} (\mathcal{G}_3 - \mathcal{G}_2). \quad (5)$$

Периодическое решение полученной системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами определяем методом гармонического баланса.

Расчеты, проведенные для точных уравнений движения (4), показали, что

периодические колебания системы весьма близки к гармоническим (амплитуды второй и более высоких гармоник в 50 - 100 раз меньше первой). Это объясняет хорошее совпадение результатов расчетов по точным и приближенным уравнениям движения. Преимущество приближенной математической модели заключается в значительно меньшем (примерно в 60 раз) объеме вычислений по сравнению с точной моделью, поэтому она может быть использована для расчета силовых передач со многими степенями свободы.

Рассмотрим силовую передачу землеройной гусеничной машины, механическая модель которой представлена на рис. 2. Здесь показано расположение инерционных и упругих элементов модели, значения моментов инерции (I_k) и жесткостей (C_k), которые приведены в табл.1.

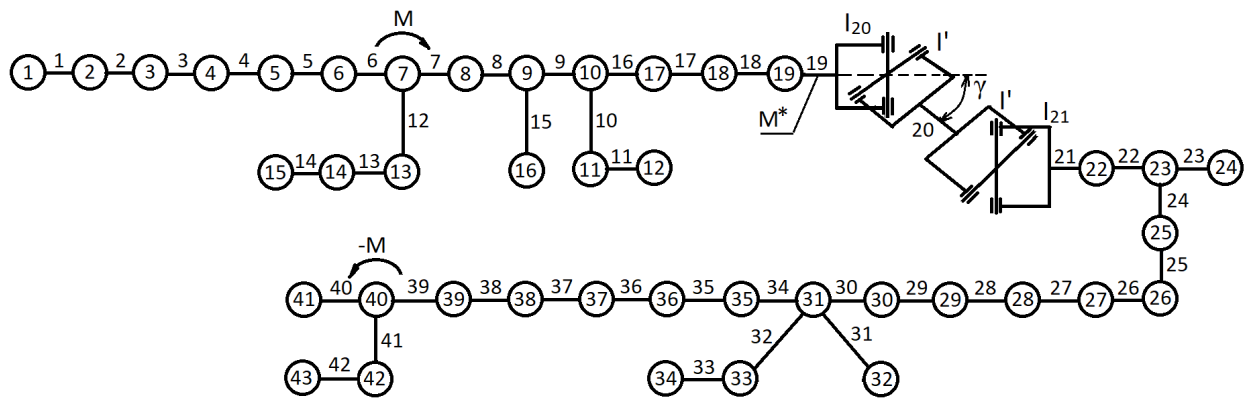


Рис. 2. Модель силовой передачи землеройной гусеничной машины.

Таблица 1

Параметры исходной системы

к	1-5	6	7	8	9	10
$I_k \cdot 10^2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	17	17	8	116	8,9	4,1
$C_k \cdot 10^{-4}, \text{Н} \cdot \text{м}$	217	261	355	397	229	34,5
к	11	12	13	14	15	16
$I_k \cdot 10^2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	19,9	86,1	2,2	4,1	122	5,9
$C_k \cdot 10^{-4}, \text{Н} \cdot \text{м}$	158	4,55	21,7	9,9	3,33	155
к	17	18	19	20	21	22
$I_k \cdot 10^2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	11,6	10,4	279,7	5,68	3,05	4,7
$C_k \cdot 10^{-4}, \text{Н} \cdot \text{м}$	166	97,4	137	10	18,1	57,4
к	23	24	25	26	27	28
$I_k \cdot 10^2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	6,25	2,8	3,5	7,3	3,1	8
$C_k \cdot 10^{-4}, \text{Н} \cdot \text{м}$	5,56	55,3	5	28,3	33,7	30,5
к	29	30	31	32	33	34
$I_k \cdot 10^2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	14,7	6,2	12,8	6,8	9,6	9,1
$C_k \cdot 10^{-4}, \text{Н} \cdot \text{м}$	25,2	198	20	156	25,1	35,3
к	35	36	37	38	39	40
$I_k \cdot 10^2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	9,4	2,3	33,3	3,45	15,4	54,4
$C_k \cdot 10^{-4}, \text{Н} \cdot \text{м}$	11,1	68,5	15	62,6	6,99	0,16
к	41	42	43			
$I_k \cdot 10^2, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	16,3	363,4	200			
$C_k \cdot 10^{-4}, \text{Н} \cdot \text{м}$	5,88	0,02	-			



Моменты инерции вилок карданного вала $I' = 0,06 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, угол излома $\gamma = 16^\circ$, средний момент, передаваемый карданным валом, $M = 3,12 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}$; масса 19 включает редуктор с передаточным отношением $k = 1,42$, массы 1–6 представляют приведенные цилиндрические массы двигателя.

Расчет данной силовой передачи проводился с целью оценки уровня обнаруженных в системе высокочастотных крутильных колебаний и выработки рекомендаций по снижению динамических нагрузок. Экспериментальное исследование силовой передачи проводилось в условиях эксплуатации машины. Упругие моменты в отдельных соединениях записывались в диапазоне рабочих оборотов при угловой скорости вала двигателя $\omega \in (190; 213) \text{ рад/с}$. На рис. 3 приведены фрагменты двух осциллограмм с записью упругого момента M^* (см. рис. 2) в соединении перед карданным валом.

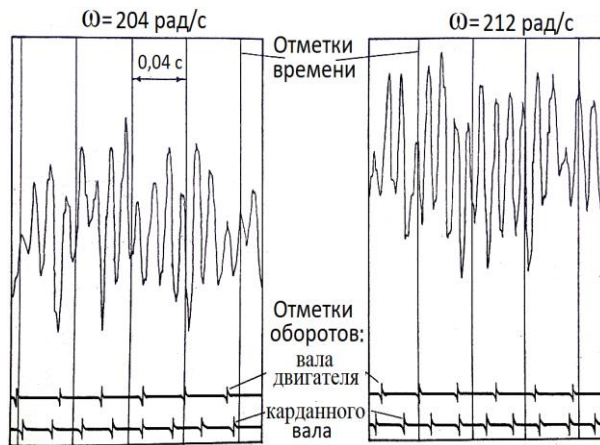


Рис. 3. Осциллограммы упругого момента M^* .

Спектральный анализ участков осциллограмм, соответствующих шести оборотам вала двигателя, показал, что наиболее существенными являются гармоники № 6, 12, 18, 17 ($M_6, M_{12}, M_{18}, M_{17}$). Источником колебаний с частотами первых трех гармоник является 6-ти цилиндровый двигатель. Частота гармоники № 17 при выбранной длине обрабатываемых участков осциллограмм соответствует частоте колебаний, возбуждаемых неравномерностью вращения карданного вала. Результаты экспериментов показали, что во всем частотном диапазоне уровень крутильных колебаний в значительной степени определяется неравномерностью вращения карданного вала. На рис. 4 показаны расчетная кривая для амплитуды момента M_{17} и ее экспериментально полученные значения.

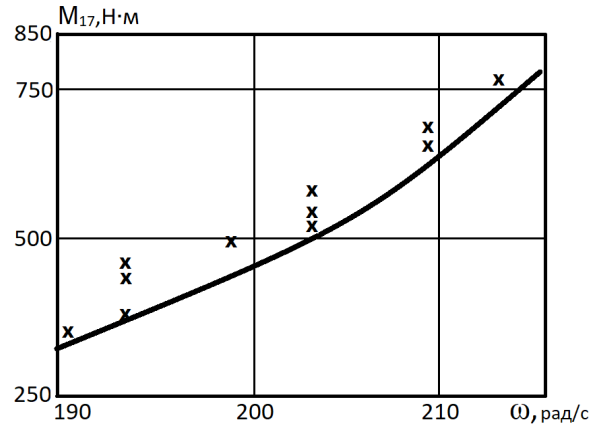


Рис. 4. Расчетные и экспериментальные значения упругого момента.

Как видно из рис. 4, рассматриваемый частотный диапазон лежит в предрезонансной зоне. Поэтому одним из путей снижения динамической нагруженности является изменение параметров, влияющих на расположение резонансных зон системы. Исследование функций чувствительности системы, выполненное по методике работы [7], показало, что параметром, влияющим на расположение резонансной зоны, ближайшей к рассматриваемому частотному диапазону, является жесткость карданного вала C_{20} . Результаты расчетов момента M_{17} при различных конструктивно допустимых значениях C_{20} приведены на рис. 5.

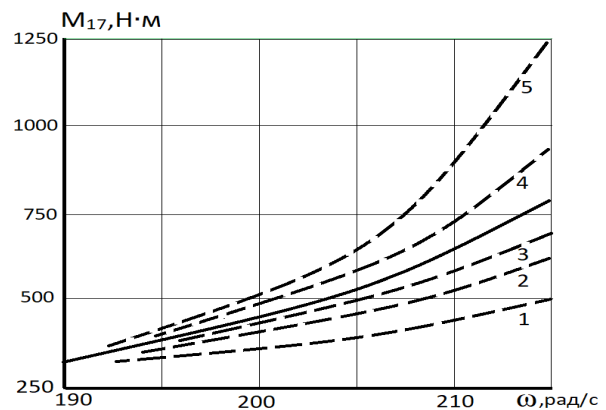


Рис. 5. Изменение жесткости карданного вала.

На этом и всех следующих рисунках сплошной линией показана расчетная кривая для исходной системы, пунктиром – расчетные кривые, соответствующие системе с измененными параметрами. Кривая 1 (см. рис. 5) соответствует $C_{20} = 2 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, 2 – $C_{20} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, 3 – $C_{20} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}$, 4 – $C_{20} = 9 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}$, 5 – $C_{20} = 8 \cdot 10^4 \text{ Н}\cdot\text{м}$. На рис. 6 показаны результаты варьирования момента инерции вилок карданного вала, кривая 1 соответствует $I' = 0,05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, 2 – $I' = 0,07 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

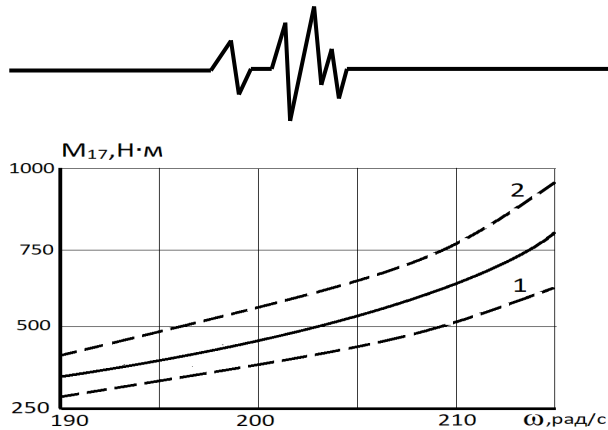


Рис. 6. Изменение моментов инерции вилок I' .

Этот параметр не влияет на расположение резонансной зоны, однако от него зависят величины переменных коэффициентов уравнений движения. Весьма незначительным оказалось влияние на уровень колебаний величины среднего момента, передаваемого карданным валом (рис. 7, кривая 1 – $M=2 \cdot 10^3$ Н·м, 2 – $M=4 \cdot 10^3$ Н·м).

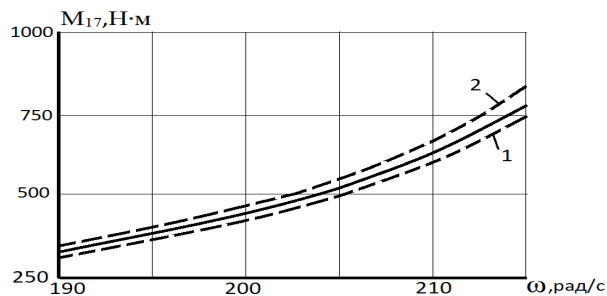


Рис. 7. Изменение момента M , передаваемого карданным валом.

Изменение же угла излома осей соединяемых валов, напротив, существенно изменяет величину упругого момента (рис. 8, кривая 1 – $\gamma=4^\circ$, 2 – $\gamma=8^\circ$, 3 – $\gamma=12^\circ$).

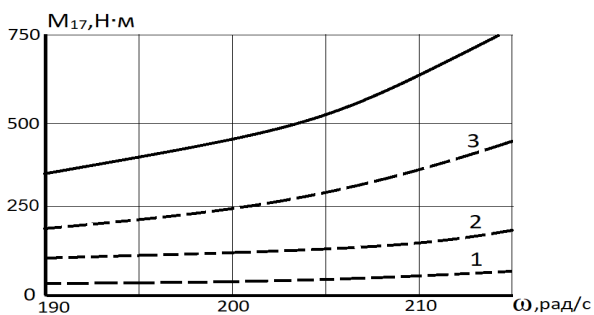


Рис. 8. Изменение угла излома γ .

Последний результат качественно очевиден, так как именно угол γ определяет степень неравномерности вращения карданного вала. Предложенная же методика расчета позволяет дать надежные количественные оценки уровня возможных динамических нагрузок.

Выводы. Из проведенных расчетно-экспериментальных исследований можно

сделать следующие выводы:

1. Основную роль в формировании высокочастотных колебаний силовой передачи играет параметрическое возбуждение, связанное с неравномерностью вращения карданного вала.

2. Снизить уровень крутильных колебаний силовой передачи возможно без введения в систему специальных устройств. Эффективным средством уменьшения динамических нагрузок является варьирование жесткости карданного вала, которая является параметром, влияющим на расположение резонансной зоны системы: увеличение C_{20} на 25% приводит к снижению максимальных динамических нагрузок наиболее нагруженных элементов системы в рабочем диапазоне оборотов двигателя на 21%, а увеличение C_{20} в два раза позволяет снизить нагрузки на 43%. Снижение динамических нагрузок возможно и за счет уменьшения моментов инерции вилок карданного вала. Так уменьшение I' на 17% позволяет снизить нагрузки на 19%.

3. Наиболее эффективной мерой по устранению опасных динамических явлений следует признать уменьшение угла излома осей соединяемых валов: уменьшение угла γ с 16° до 12° ведет к снижению динамических нагрузок на 44%, а при $\gamma=8^\circ$ нагрузки уменьшаются в четыре раза.

Список использованных источников

1. Карабан В.Н. Крутильные колебания силовых передач с карданным валом / В.Н. Карабан, А.С. Беломытцев // Известия вузов. Машиностроение. – 1986. – № 2. – С. 98-102.
2. Крутильные колебания валопровода силовых установок : [в 4-х т.]. Под общ. Ред. В.П. Терских. – Л. : Судостроение, 1970. – Т. 3. – 272 с.
3. Никулина К.А. Параметрическое возбуждение крутильных колебаний карданного вала / К.А. Никулина // Известия вузов. Машиностроение. – 1971. – № 9. – С. 118-124.
4. Иванов С.Н. Крутильные колебания карданной передачи в трансмиссии автомобиля / С.Н. Иванов, Ю.Г. Стефанович // Автомобильная промышленность. – 1974. – № 4. – С. 30-36.
5. Иванов С.Н. Об углах установки отдельных карданных шарниров в мног шарнирной карданной передаче трансмиссии / С.Н. Иванов, В.П. Мамаева // Автомобильная промышленность. – 1976. – № 3. – С. 16-20.
6. Динамическая нагруженность колесных машин / Н.Л. Островерхов, И.К. Русецкий,



Л.И. Бойко // Минск : “Наука и техника”, 1977. – 192 с.

7. Андреев Ю.М. Синтез нелинейных вибрационных систем по скелетным кривым с использованием теории чувствительности / Ю.М. Андреев Ю.М., Л.И. Штейнвольф // Харьков : “Динамика и прочность машин”. – 1984. – № 40. – С. 50-56.

8. Брик Я.Е. О причинах возникновения высокочастотных резонансных крутильных колебаний автомобильных карданных передач / Я.Е. Брик, И.Х. Мамедов // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. – № 9. – С. 56-60.

9. Нарбут А.Н. Экспериментальное исследование крутильных колебаний в трансмиссии автомобиля / А.Н. Нарбут, А.А. Федоров // Известия вузов. Машиностроение. – 1983. – № 8. – С. 100-105.

10. Бочаров Н.Ф. Стенд для исследования вынужденных крутильных колебаний карданной передачи / Н.Ф. Бочаров, И.Х. Мамедов // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. – № 4. – С. 80-84.

11. Бочаров Н.Ф. Высокочастотные колебания автомобильных карданных передач и способы их снижения / Н.Ф. Бочаров, И.Х. Мамедов // Известия вузов. Машиностроение. – 1989. – № 3. – С. 94-98.

Список использованных источников в транслитерации

1. Karaban, V.N., & Byelomytsev, A.S. (1986). Krutit'nyye kolebaniya silovykh peredach s kardannym valom [Torsional vibrations of power transmissions with cardan shaft]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye – News of high schools. Mechanical engineering*, 2, 98-102 [in Russian].

2. Terskikh, V.P. (Ed.). (1970). Krutit'nyye kolebaniya valoprovoda silovykh ustanovok [Torsional shaft oscillations of the power transmissions]. (Vols. 1-4). Leningrad: Sudostroyeniye [in Russian].

3. Nikulina, K.A. (1971). Parametricheskoye vzbuzhdeniye krutit'nykh kolebaniy kardannogo vala [Parametric excitation of torsional vibrations of a propshaft]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye – News of high schools. Mechanical engineering*, 9, 118-124 [in Russian].

4. Ivanov, S.N., & Stefanovich, YU.G. (1974). Krutit'nyye kolebaniya kardannoy peredachi v transmissii avtomobilya [Torsional oscillations of the cardan transmission in the car's transmission]. *Avtomobil'naya promyshlennost' – Automobile industry*, 4, 30-36 [in Russian].

5. Ivanov, S.N., & Mamayeva, V.P. (1976). Ob uglakh ustanovki otdel'nykh kardannykh sharnirov v mnogosharnirnoy kardannoy peredache transmissii [About the angles of the installation of individual cardan joints in the multi-

hinged cardan transmission]. *Avtomobil'naya promyshlennost' – Automobile industry*, 3, 16-20 [in Russian].

6. Ostroverkhov, N.L., Rusetskiy, I.K., & Boyko, L.I. (1977). Dinamicheskaya nagruzhennost' kolesnykh mashin [Dynamic loading of wheeled vehicles]. Minsk : “Nauka i tekhnika” [in Russian].

7. Andreyev, YU.M., & Shteynvol'f, L.I. (1984). Sintez nelineynykh vibratsionnykh sistem po skeletnym krivym s ispol'zovaniyem teorii chuvstvitel'nosti [Synthesis of nonlinear vibrational systems on skeletal curves using the theory of sensitivity]. *Khar'kov : Dinamika i prochnost' mashin. – Dynamics and Strength of Machines*, 40, 50-56 [in Ukrainian].

8. Brik, YA.Ye., & Mamedov, I.KH. (1989). O prichinakh vozniknoveniya vysokochastotnykh rezonansnykh krutit'nykh kolebaniy avtomobil'nykh kardannykh peredach [On the causes of the occurrence of high-frequency resonant torsional oscillations of automotive cardan gears]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye. – News of high schools. Mechanical engineering*, 9, 56-60 [in Russian].

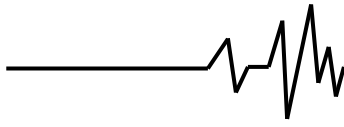
9. Narbut, A.N., & Fedorov, A.A. (1983). Eksperimental'noye issledovaniye krutit'nykh kolebaniy v transmissii avtomobilya [Experimental study of torsional oscillations of a car transmission]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye. – News of high schools. Mechanical engineering*, 8, 100-105 [in Russian].

10. Bocharov, N.F., & Mamedov, I.KH. (1989). Stend dlya issledovaniya vynuzhdennykh krutit'nykh kole'aniy kardannoy peredachi [The stand for the study of forced torsional oscillations of cardan transmission]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye. – News of high schools. Mechanical engineering*, 4, 80-84 [in Russian].

11. Bocharov, N.F., & Mamedov, I.KH. (1989). Vysokochastotnyye kolebaniya avtomobil'nykh kardannykh peredach i sposoby ikh snizheniya [High-frequency oscillations of automobile cardan gears and ways to reduce them]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye. – News of high schools. Mechanical engineering*, 3, 94-98 [in Russian].

РОЗРАХУНОК КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СИЛОВИХ ПЕРЕДАЧ З КАРДАННИМ ВАЛОМ

У статті розглянуті точні та наближені рівняння, що описують крутильні коливання в силових передачах, які містять карданний вал. Використання наближених рівнянь дозволяє істотно скоротити обсяг обчислень, в зв'язку з чим, вони можуть бути використані для розрахунку моделей силових передач транспортних машин з багатьма ступенями вільності.



Результати чисельних експериментів показали, що збуджувальні сили, які діють на елементи карданної передачі і призводять до високочастотних коливань, викликаються кінематичними і параметричними коливаннями самої карданної передачі від ефекту її обертання зі змінними за часом коливаннями кута зламу осей з'єднувальних карданних валів, а також збуреннями від двигуна.

За результатами розрахункових досліджень багатомасової моделі землерийної гусеничної машини, що містить карданну передачу, і зіставлення їх з експериментом, надано рекомендації щодо зниження рівня динамічних навантажень в елементах та вузлах конструкції.

Ключові слова: системи з багатьма ступенями вільності, силові передачі, карданні передачі, крутильні коливання, метод Ньютона, метод гармонічного балансу.

CALCULATION OF TORSION OSCILLATIONS OF POWER TRANSMISSION WITH CARDAN SHAFT

Precise and approximate equations describing torsional oscillations in force

Сведения об авторах

Морачковский Олег Константинович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: morachko@kpi.kharkov.ua).

Дружинин Евгений Иванович – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: druzhinin_e_i@ukr.net).

Беломытцев Андрей Сергеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002, e-mail: andrserg1@ukr.net).

Морачковский Олег Костянтинович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: morachko@kpi.kharkov.ua).

Дружинін Євген Іванович – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: druzhinin_e_i@ukr.net).

Беломитцев Андрій Сергійович – кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної механіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (вул. Кирпичова, 2, м. Харків, Україна, 61002, e-mail: andrserg1@ukr.net).

Morachkovskii O. – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Theoretical Mechanics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute» (2, Kyrpychova str., 61002, Kharkiv, Ukraine, e-mail: morachko@kpi.kharkov.ua).

Druzhynin E. – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical Mechanics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute» (2, Kyrpychova str., 61002, Kharkiv, Ukraine, e-mail: druzhinin_e_i@ukr.net).

Bielomyttsev A. – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical Mechanics, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute» (2, Kyrpychova str., 61002, Kharkiv, Ukraine, e-mail: andrserg1@ukr.net).

transmissions containing a cardan shaft are considered in the article. Using approximate equations can significantly reduce the amount of calculations, in connection with which, they can be used to calculate models of power transmission of transport vehicles with many degrees of freedom.

The results of numerical experiments showed that the perturbing forces acting on the cardan transmission elements and leading to high-frequency oscillations are caused by the kinematical and parametric oscillations of the cardan transmission itself from the effect of its rotation with time-varying oscillations of the angle of fracture of the axes of the connected cardan shafts, and also perturbations from the engine.

Based on the results of computational studies of the multi-mass model of an earth-moving caterpillar machine containing cardan gear and comparing them with experiment, recommendations are given to reduce the level of dynamic loads in elements and components of the structure.

Keywords: systems with many degrees of freedom, power transmissions, cardan gears, torsional vibrations, Newton's method, harmonic balance method.