

С. Н. Федоткин

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев

## ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ЯДРА НА ПРОЦЕССЫ АННИГИЛЯЦИИ ПОЗИТРОНОВ, ИСПУЩЕННЫХ ПРИ $\beta^+$ -РАСПАДЕ

Рассмотрен процесс выбивания электрона с атомной оболочки при аннигиляции позитрона, испущенного при  $\beta^+$ -распаде, с другим электроном дочернего атома. Исследована роль кулоновского поля ядра при расчете вероятности этого процесса. Показано, что корректный учет влияния этого фактора на состояния как вылетевшего электрона, так и позитрона существенно изменяет вероятность ионизации атома. Заметно изменяется также отношение вероятностей процессов ионизации и обычного  $\beta^+$ -распада.

*Ключевые слова:* аннигиляция,  $\beta^+$ -распад, атомная оболочка, К-электрон.

### Введение

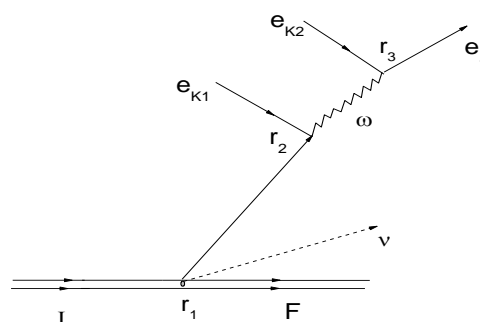
При аннигиляции позитрона с одним из электронов атома наряду с однофотонной аннигиляцией возможны так называемые безрадиационные процессы возбуждения ядра или атомной оболочки. При этом позитроны могут попадать в атом как от внешнего источника [1 - 3], так и в результате  $\beta^+$ -распада материнского ядра [4, 5].

В работе [6] был рассмотрен процесс аннигиляции позитрона, испущенного при  $\beta^+$ -распаде, с К-электроном дочернего атома. При этом часть энергии, выделенной при аннигиляции передается другому электрону из К, L, M или N оболочки, в результате чего он покидает атом. Было вычислено отношение вероятности рассмотренного процесса к вероятности обычного  $\beta^+$ -распада в предположении [7], что в этом случае роль кулоновского поля незначительна, хотя сами вероятности могут изменяться значительно. В настоящей работе вычислены вероятности процессов как ионизации атома при аннигиляции позитронов, так и обычного  $\beta^+$ -распада с корректным учетом влияния кулоновского поля ядра на состояния и вылетевшего электрона и позитрона. Показано, что это влияние существенно не только для абсолютных вероятностей этих процессов, но и для их отношения.

### Влияние кулоновского поля ядра на ионизацию атома при аннигиляции позитрона с К-электроном при $\beta^+$ -распаде

Рассмотрим процесс аннигиляции позитрона, испущенного при  $\beta^+$ -распаде с электроном дочернего атома с передачей части энергии дру-

гому атомному электрону. Исследован наиболее вероятный случай, когда аннигиляция позитрона происходит с К-электроном, а избыток энергии передается другому К-электрону. Диаграмма Фейнмана, соответствующая этому процессу, изображена на рисунке.



Диаграмма, описывающая аннигиляцию испущенного в процессе  $\beta^+$ -распада позитрона с электроном  $K_1$  с передачей энергии  $\omega$  другому электрону  $K_2$ .

На рисунке  $I$  и  $F$  - начальное и конечное состояния ядра ( $E_I$  и  $E_F$  - энергии начального и конечного состояний ядра соответственно);  $e_{K_1}$  и  $e_{K_2}$  - электроны К-оболочки атома;  $\omega$  - энергия, передаваемая в результате аннигиляции позитрона и  $K_1$ -электрона другому электрону К-оболочки  $K_2$ ;  $e_\epsilon$  - электрон, вылетающий в непрерывный спектр с энергией  $\epsilon$  и с импульсом  $\mathbf{p}_\epsilon$ ,  $\nu$ -нейтрино с импульсом  $\mathbf{p}_\nu$ . Амплитуда вероятности рассматриваемого процесса записывается в виде

$$S_{fi} = -\frac{ie^2}{16\pi^3} G_V M_{FI}^\beta \bar{\Psi}_\nu \int \int d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 (\bar{\Psi}_\epsilon(\mathbf{r}_3) \gamma_\mu \Psi_{K_2}(\mathbf{r}_3)) \frac{e^{i\omega|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|}}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|} (S_{E_1}(\mathbf{r}_2) \gamma_\mu \Psi_{K_1}(\mathbf{r}_2)) \delta(E_0 - \epsilon - p_\nu). \quad (1)$$

Здесь  $\psi_{K_i}(\mathbf{r}_i)$  ( $i=1,2$ ),  $\bar{\psi}_\varepsilon(\mathbf{r}_3)$  - волновые функции К-электронов и электрона, покинувшего атом, соответственно;  $\bar{\psi}_\nu$  - спинорная часть волновой функции нейтрино;  $M_{FI}^\beta$  - ядерный матричный элемент, соответствующий разрешенному фермиевскому переходу ядра из состояния  $I$  в  $F$ . Максимальная энергия электрона  $E_0$ , покинувшего атом, равна

$$E_0 = E_{IF} + 2E_K, \quad E_{IF} = E_I - E_F. \quad (2)$$

Радиальная часть волновой функция К-электрона в атоме имеет вид [8]

$$\psi_K(r) = \frac{\eta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta r}, \quad (3)$$

где  $\eta = Zm\alpha$ ;  $Z$  - заряд ядра;  $m$  - масса электрона,  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры. В расчетах учитывается влияние кулоновского поля ядра как на вылетевший при  $\beta^+$ -распаде позитрон, так и на

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{r}_3) = e^{\frac{\pi\xi}{2}} e^{i\vec{p}_\varepsilon \vec{r}_3} \Gamma(1+i\xi) F(-i\xi, 1; -i(p_\varepsilon r_3 + \vec{p}_\varepsilon \vec{r}_3)), \quad \xi = \frac{Z\alpha}{v}. \quad (6)$$

Здесь  $v$  - скорость вылетающего электрона. В случае малых зарядов  $Z$  и больших скоростей  $v$  параметр  $\xi \ll 1$  и для волновой функции  $\psi_\varepsilon(\mathbf{r}_3)$  можно было бы использовать приближение плоских волн. Пренебрегая запаздыванием в электромагнитном взаимодействии между элек-

$$S_{fi} = -\frac{ie^2 \eta^3}{(2\pi)^{11/2}} G_V M_{FI}^{\beta^+} (\bar{u}_\varepsilon \gamma_\mu u_{K_2}) (\bar{u}_\nu \gamma_4 (1 + \gamma_5) B \gamma_\mu u_{K_1}) e^{\frac{\pi\xi}{2}} \Gamma(1-i\xi) I_{23}(\varepsilon) \delta(E_0 - \varepsilon - p_\nu). \quad (7)$$

Здесь  $\bar{u}_\nu, \bar{u}_\varepsilon, u_{K_i}$  ( $i=1,2$ ) - биспинорные части волновых функций нейтрино, вылетевшего из атома электрона и электронов К-оболочки соответственно. Функции  $I_{23}(\varepsilon)$  в выражении (7) имеют вид

$$I_{23}(\varepsilon) = \int \frac{d\mathbf{q}}{q^2} I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}_\varepsilon) I_2(\mathbf{q}), \quad (8)$$

где  $I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}_\varepsilon)$  и  $I_2(\mathbf{q})$  являются следующими интегралами:

$$I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}_\varepsilon) = \frac{8\pi(k^2 + \eta^2)^{i\xi-2} \left[ k^2(\eta + \xi p_\varepsilon) + \eta^3 + ip_\varepsilon \eta^2 (i\xi - 2) - 2\eta \mathbf{p}_\varepsilon \cdot (\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{q}) (i\xi - 1) \right]}{(k^2 + \eta^2 + 2\mathbf{p}_\varepsilon \cdot (\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{q}) - 2i\eta p_\varepsilon)^{i\xi+1}}. \quad (11)$$

А для  $I_2(\mathbf{q})$  получено следующее выражение:

улетающий из атома электрон. Поэтому в качестве функции Грина используется выражение для нее в кулоновском поле [9] и, следовательно,  $S_{E_1}(\mathbf{r}_2)$  в амплитуде (1) имеет вид

$$S_{E_1}(\mathbf{r}) = B \Gamma(1 - \eta_0) \frac{W_{\eta_0, 1/2}(-2ibr)}{4\pi r}, \quad (4)$$

где  $W_{\eta_0, 1/2}(-2ibr)$  - функция Уиттекера, а величины  $B$ ,  $b$  и  $\eta_0$  определяются как

$$B = \beta E_1 + m, \quad \eta_0 = iZ\alpha E_1 / b, \\ b = \sqrt{E_1^2 - m^2}, \quad E_1 = 2E_K - \varepsilon. \quad (5)$$

Для волновой функции вылетающего из атома электрона  $\psi_\varepsilon(\mathbf{r}_3)$  используется следующее выражение для волновой функции сплошного спектра в кулоновском поле ядра [8]:

тронами и используя фурье-представление для кулоновского потенциала, а также явное выражение для функции  $S_{E_1}(\mathbf{r})$  (4), представим амплитуду вероятности рассматриваемого процесса  $S_{fi}$  в следующем виде:

$$I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}_\varepsilon) = \int d\mathbf{r}_3 e^{i\mathbf{r}_3(\mathbf{q} - \mathbf{p}_\varepsilon) - \eta r_3} F(i\xi, 1; i(p_\varepsilon r_3 + \mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{r}_3)), \quad (9)$$

$$I_2(\mathbf{q}) = \Gamma(1 - \eta_0) \int \frac{d\mathbf{r}_2}{r_2} e^{i\mathbf{r}_2 \mathbf{q} - \eta r_2} W_{\eta_0, 1/2}(-i2br_2). \quad (10)$$

Интегралы  $I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}_\varepsilon)$  (9) и  $I_2(\mathbf{q})$  (10) вычисляются аналитически. После ряда вычислений и преобразований интеграл  $I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}_\varepsilon)$  приобретает следующий вид:

$$I_2(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2 + (\eta - ib)^2} \times \quad (12)$$

$$\times \left( 1 + \frac{\eta_0}{(1 - \eta_0)2q} \left[ (b + i\eta + q) {}_2F_1(1, 1; 2 - \eta_0; \frac{\eta + i(b + q)}{2ib}) - (b + i\eta - q) {}_2F_1(1, 1; 2 - \eta_0; \frac{\eta + i(b - q)}{2ib}) \right] \right).$$

Интеграл  $I_{23}(\varepsilon)$  (8) был вычислен приближенно после интегрирования по  $\mathbf{q}$  с использованием явных выражений для  $I_3(\mathbf{q}, \mathbf{p}_e)$  и  $I_2(\mathbf{q})$  (11) и (12). Для него получено довольно громоздкое выражение, которое здесь не приводится, но используется в дальнейших расчетах.

Полная вероятность процесса  $W_{\beta^+K,K}$  определяется после интегрирования по всем конечным состояниям выбитого из атома электрона и нейтрино, а также суммированием по проекциям спинов всех частиц:

$$W_{\beta^+K,K} = 2\pi \sum_{s_e, s_\nu} \int \frac{d\mathbf{p}_\nu d\mathbf{p}_\varepsilon}{(2\pi)^6} |U_{fi}|^2 \delta(E_0 - \varepsilon - p_\nu), \quad (13)$$

где амплитуды  $U_{fi}$  и  $S_{fi}$  связаны соотношением

$$S_{fi} = 2\pi U_{fi} \delta(E_0 - \varepsilon - p_\nu). \quad (14)$$

Выполняя суммирование по проекциям спинов всех частиц в начальном и конечном состояниях, усредняя по спинам начальных состояний и выполняя интегрирование по углам вылета частиц и по энергии нейтрино, получаем окончательное выражение для вероятности  $W_{\beta^+K,K}$  аннигиляции испущенного при  $\beta^+$ -распаде позитрона с K-электроном дочернего атома и выбивании из атомной оболочки другого K-электрона

$$W_{\beta^+K,K} = \frac{4\alpha^2 (Zm\alpha)^6}{\pi^3} G_V^2 |M_{FI}^{\beta^+}|^2 J_{\beta^+K,K}. \quad (15)$$

Для интеграла  $J_{\beta^+K,K}$  имеется выражение

$$J_{\beta^+K,K} = \int_m^{E_0} d\varepsilon (E_0 - \varepsilon)^2 \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} \Phi_c(\varepsilon), \quad (16)$$

где  $\Phi_c(\varepsilon)$  имеет вид

$$\Phi_c(\varepsilon) = [(\varepsilon + m)(\varepsilon - 3m)^2 + 3(\varepsilon - m)^3] |I_{23}(\varepsilon)|^2.$$

Выражение для вероятности  $W_{\beta^+K,K}$  (15) является общим и может быть использовано для ядер с любым зарядом  $Z$ . Численные расчеты ве-

роятности исследуемого процесса проводятся для ядра  ${}^{45}_{22}\text{Ti}$ , для которого ранее были сделаны оценки, полученные в других приближениях [5, 6].

В дальнейшем нас будет интересовать вероятность рассмотренного процесса на акт  $\beta^+$ -распада. Для этого оценим вероятность обычного  $\beta^+$ -распада, учитывая должным образом влияние кулоновского поля на вылетающий из ядра позитрон. Вероятность  $\beta^+$ -распада для этого случая имеет следующий вид [10]:

$$W_{\beta^+} = \frac{G_V^2 |M_{FI}^{\beta^+}|^2}{2\pi^3} I_{\beta^+}, \quad (17)$$

где  $I_{\beta^+}$  равно

$$I_{\beta^+} = \int_m^{E_{00}} dE (E_{00} - E)^2 \sqrt{E^2 - m^2} F(Z, E) E. \quad (18)$$

Здесь  $F(Z, E)$  - функция Ферми, посредством которой учитывается влияние кулоновского поля ядра на вылетающий позитрон

$$F(Z, E) = 2(1 + \gamma_0)(2pR)^{-2(1-\gamma_0)} e^{\pi\nu} \frac{|\Gamma(\gamma_0 + i\nu)|^2}{\Gamma(2\gamma_0 + 1)^2}, \quad (19)$$

где  $\gamma_0 = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}$ ,  $\nu = -\alpha ZE / p$ ,  $E$  и  $p$  - энергия и импульс вылетающего позитрона,  $E_{00}$  - полная энергия, выделяемая при  $\beta^+$ -распаде,  $R$  - радиус ядра.

Сделаем оценки для вероятности  $\beta^+$ -распада ядра  ${}^{45}_{22}\text{Ti}$ . Учет влияния кулоновского поля на позитрон приводит к уменьшению вероятности распада  $W_{\beta^+}$  приблизительно в два раза по сравнению со случаем расчета без учета такого влияния  $W_{\beta^+}^0$  [6]:

$$\frac{W_{\beta^+}}{W_{\beta^+}^0} \approx 0,56. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь отношение вероятности рассмотренного процесса  $W_{\beta^+K,K}$  (15) к вероят-

ности  $\beta^+$ -распада  $W_{\beta^+}$  (17) для того же ядра:

$$\frac{W_{\beta^+K,K}}{W_{\beta^+}} = 8\alpha^2 (Zm\alpha)^6 \frac{J_{\beta^+K,K}}{I_{\beta^+}}. \quad (21)$$

Вычислив интегралы  $J_{\beta^+K,K}$  (16) и  $I_{\beta^+}$  (18), получаем для отношения вероятностей этих процессов следующую оценку:

$$\frac{W_{\beta^+K,K}}{W_{\beta^+}} \approx 1,1 \cdot 10^{-5}. \quad (22)$$

Отметим, что аналогичное отношение, вычисленное в случае, когда для волновых функций вылетающих в данных процессах электронов и позитронов было использовано приближение плоских волн, ранее получена такая оценка [6]:

$$\frac{W_{\beta^+K,K}^0}{W_{\beta^+}^0} \approx 4 \cdot 10^{-6}. \quad (23)$$

Таким образом, корректный учет влияния кулоновского поля ядра увеличивает отношение вероятности выбивания второго электрона с К-оболочки при аннигиляции позитрона, испущенного при  $\beta^+$ -распаде, с К-электроном дочернего атома к вероятности  $\beta^+$ -распада. Учет влия-

ния кулоновского поля на волновую функцию выбитого из атома электрона несколько уменьшает вероятность процесса  $W_{\beta^+K,K}$ , а его воздействии на функцию Грина приводит к обратному эффекту – увеличению вероятности процесса.

## Выводы

Исследовано влияние кулоновского поля ядра на вероятность как  $\beta^+$ -распада, так и на вероятность выбивания второго электрона с К-оболочки при аннигиляции позитрона, испущенного при  $\beta^+$ -распаде, с К-электроном дочернего атома. Показано, что вероятность обычного  $\beta^+$ -распада  $W_{\beta^+}$  ядра  ${}^{45}_{22}\text{Tl}$  при этом уменьшается приблизительно в два раза. Учет влияния кулоновского поля на волновую функцию выбитого из атома электрона уменьшает вероятность процесса выбивания второго электрона с К-оболочки при аннигиляции позитрона. Расчет с функцией Грина в кулоновском поле ядра приводит к некоторому увеличению вероятности процесса. С учетом обоих эффектов вероятность  $W_{\beta^+K,K}$  увеличивается приблизительно в полтора раза. Таким образом, роль кулоновского поля оказывается существенной как при вычислении абсолютных значений вероятностей процессов  $W_{\beta^+K,K}$ ,  $W_{\beta^+}$ , так и при вычислении отношения вероятностей этих процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mikoyama T., Shimizu S.* Nuclear excitation by positron annihilation // *Phys. Rev.* - 1972. - Vol. C5. - P. 95 - 99.
2. *Вишневецкий И.Н., Желтоножский В.А., Свято В.П., Тришин В.В.* Ядерное возбуждение под действием бесфотонной аннигиляции позитронов // *Письма ЖЭТФ.* - 1979. - Т. 30. - С. 394.
3. *Shimizu S., Micoyama T., Nakayama Y.* Radiationless annihilation of positron in lead // *Phys. Rev.* - 1968. - Vol. 173, No. 2. - P. 405 - 416.
4. *Борозенец Г.П., Вишневецкий И.Н., Желтоножский В.А.* Возбуждение ядра при аннигиляции позитронов в процессе  $\beta^+$ -распада // *Ядерная физика.* - 1986. - Т. 43, вып. 1. - С. 14 - 16.
5. *Коломиец В.М., Пунинский О.Г., Федоткин С.Н.* Возбуждение ядра при аннигиляции позитрона с К-электроном в процессе  $\beta^+$ -распада // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* - 1988. - Т. 52, № 1. - С. 12 - 17.
6. *Федоткин С.Н.* Ионизация атома при аннигиляции позитронов, испущенных при  $\beta^+$ -распаде // *Ядерная физика та енергетика.* - 2011. - Т. 12, № 4. - С. 335 - 338.
7. *Lewis R.R., Ford G.R.* Coulomb effects in inner Bremsstrahlen // *Phys. Rev.* - 1957. - Vol. 107, No. 3. - P. 756 - 765.
8. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. - М.: Физматгиз, 1959. - 656 с.
9. *Glauber R.J., Martin P.C.* Radiative capture of orbital electrons // *Phys. Rev.* - 1956. - Vol. 104, No. 1. - P. 158 - 175.
10. *Конопинский Е., Роуз М.* Теория ядерного бета распада. Альфа-, бета- и гамма-спектроскопия / Под ред. К. Зигбана. Вып. 4. - М.: Атомиздат, 1969. - С. 18 - 55.

С. М. Федоткін

*Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ***ВПЛИВ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ ЯДРА НА ПРОЦЕСИ АНІГІЛЯЦІЇ ПОЗИТРОНІВ,  
ВИПУЩЕНИХ ПРИ  $\beta^+$ -РОЗПАДІ**

Розглянуто процес вибивання К-електрона з атомної оболонки при анігіляції позитрона, випущеного при  $\beta^+$ -розпаді, з іншим К-електроном дочірнього атома. Досліджено роль кулонівського поля ядра в розрахунках імовірності цього процесу. Показано, що коректне врахування впливу цього фактора на стан як електрона, так і позитрона суттєво змінює ймовірність іонізації атома. Помітно змінюється також відношення ймовірностей процесів іонізації та звичного  $\beta^+$ -розпаду.

*Ключові слова:* анігіляція,  $\beta^+$ -розпад, атомна оболонка, К-електрон.

S. N. Fedotkin

*Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv***INFLUENCE OF THE NUCLEAR ELECTRIC FIELD ON PROCESSES OF ANNIHILATION  
OF POSITRONS EMITTED AT  $\beta^+$ -DECAY**

The process of atomic shell ionization during annihilation of positron, emitted at  $\beta^+$ -decay, with K-electron of daughter's atom is considered. The role of nuclear Coulomb field at calculation of the probability of this process is investigated. It is shown that the correct account of the influence of this factor on the states of electron and positron changes the probability of atomic ionization appreciably. The ratio of the probabilities of processes of atomic ionization and usual  $\beta^+$ -decay is notably changed.

*Keywords:* annihilation,  $\beta^+$ -decay, atomic shell, K-electron.

## REFERENCES

1. *Mukoyama T., Shimizu S.* Nuclear excitation by positron annihilation // *Phys. Rev.* - 1972. - Vol. C5. - P. 95 - 99.
2. *Vishnevskij I.N., Zheltonozhskij V.A., Svyato V.P., Trishin V.V.* // *Pis'ma ZhETF.* - 1979. - Vol. 30. - P. 394. (Rus)
3. *Shimizu S., Mucoyama T., Nakayama Y.* Radiationless annihilation of positron in lead // *Phys. Rev.* - 1968. - Vol. 173, No. 2. - P. 405 - 416.
4. *Borozenets G.P., Vishnevskij I.N., Zheltonozhskij V.A.* // *Yadernaya fizika.* - 1986. - Vol. 43, Iss. 1. - P. 14 - 16. (Rus)
5. *Kolomiets V.M., Puninskij O.G., Fedotkin S.N.* // *Izv. AN SSSR. Ser. fiz.* - 1988. - Vol. 52, No. 1. - P. 12 - 17. (Rus)
6. *Fedotkin S.N.* // *Yaderna fizyka ta energetyka.* - 2011. - Vol. 12, No. 4. - P. 335 - 338. (Rus)
7. *Lewis R.R., Ford G.R.* Coulomb effects in inner Bremsstrahlen // *Phys. Rev.* - 1957. - Vol. 107, No. 3. - P. 756 - 765.
8. *Akhiezer A.I., Berestetskij V.B.* Quantum electrodynamics. - Moskva: Fizmatgiz, 1959. - 656 p. (Rus)
9. *Glauber R.J., Martin P.C.* Radiative capture of orbital electrons // *Phys. Rev.* - 1956. - Vol. 104, No. 1. - P. 158 - 175.
10. *Konopinskij E., Rouz M.* Theory of nuclear beta decay. Alpha-, beta- and gamma-spectroscopy / Ed. by K. Zighan. Iss. 4. - Moskva: Atomizdat, 1969. - P. 18 - 55. (Rus)

Надійшла 04.11.2014

Received 04.11.2014