

УДК 681.5814

**О.В. Ткачук***Військова академія (м. Одеса), Україна*

## ОПЕРАТОРНА ФОРМА ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕННЯ НА ФОНІ АДИТИВНИХ ШУМІВ

*Виходячи з основних понять функціонального аналізу, подана математична формалізація процесу відновлення зображення на фоні адитивних шумів. Сформульована постановка задачі відновлення зображення на фоні адитивних шумів за допомогою теорії лінійних обмежених операторів.*

**Ключові слова:** *середньоквадратична помилка, фільтрація, адитивний шум, гільбертів простір, лінійний обмежений оператор, зортка функцій.*

### Постановка проблеми. Аналіз останніх досягнень і публікацій

Достатньо розповсюдженим способом відновлення зображення на фоні адитивних шумів є застосування фільтра, що забезпечує мінімум середньоквадратичної помилки. Існує велика кількість різноманітних методів фільтрації, застосування яких залежить від обраної математичної моделі зображення та шуму. Вони базуються на використанні параметрів фільтрації, які залежать від потужності шуму  $\sigma^2$ . Найбільш повний огляд методів фільтрації, принципів їх роботи та результатів застосування подано в роботах [1–3].

У випадку вирішення задачі відновлення зображення на фоні адитивних шумів найкращим з методів є просторова фільтрація. Ідея алгоритмів просторової фільтрації полягає в безпосередній обробці прийнятих зашумлених значень зображення, які потрапили до апертури фільтра, та число яких значно менше загального числа значень зображення, що обробляється.

В загальноприйнятому варіанті просторова фільтрація зашумленого зображення  $Y_{ij}, i = \overline{1, M}; j = \overline{1, N}$  за допомогою фільтра розміру  $m \times n$  задається виразом вигляду [3]

$$L_{ij} = \sum_{(k, p) \in S_{xy}}^{\wedge} w_{kp} Y_{kp}; \quad k \in \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де  $w_{kp}$  – коефіцієнти маски фільтра, що обчислюються тим чи іншим способом, залежно від виду фільтра;  $S_{xy}$  – окіл, покритий маскою фільтра.

На жаль, проблема боротьби з шумами не вирішується повністю застосуванням масочних фільтрів, оскільки вибір розміру маски залежить від наявності апріорної інформації про вихідне зображення та статистичних характеристик шумової складової. Крім того, в основі всіх методів покладено принцип, що шум має коливальний характер, а зображення є гладким або кусково-гладким. В дійсності ж багато якісних зображень має такий саме коливальний характер, як і шум; з іншого боку, білий шум має низьку частоту та, як наслідок, гладкі складові. Тому алгоритми фільтрів не бачать різниці між дрібними деталями та шумом, видаляючи їх. В багатьох випадках вони утворюють нові спотворення, до яких настільки звикли під час застосування, що склали цілу таксономію знешумлювальних артефактів: «дзвін», «ефект шахівниці», «сторонній вейвлет» [4].

Обмежена здатність до пригнічення шуму масочними фільтрами виявляється при значному рівні шуму на зображенні. На сьогодні немає методів двовірної фільтрації, в яких поєднується максимально досяжна якість фільтрації та мінімальні вимоги до обчислювальних ресурсів, що реалізують обробку [5].

Очевидно, що постає актуальним питання математичної формалізації процесу відновлення зображення, вирішення якого створить передумови для створення просторового фільтра високої якості.

### Мета роботи

Метою роботи є математичне формулювання процесу просторової фільтрації в операторній формі з подальшим застосуванням у вирішенні задачі придушення адитивного шуму значного рівня на зображенні.

### Основна частина

Проаналізувавши наявні методи двовірної фільтрації зображення при наявності адитивного шуму, приходимо до наступної математичної формалізації процесу відновлення зображення.

Математична модель прийнятої реалізації зображення  $Y(x, y)$  має вигляд

$$Y(x, y) = L(x, y) + N(x, y), \quad (2)$$

де  $L(x, y)$  – вихідне (не зашумлене) зображення;  $N(x, y)$  – адитивний шум.

Нехай  $G^2$  – гільбертів простір зображень, які є двовимірними сигналами. Тоді, процес покращення зображення можна розглянути як дію деякого оператора  $F: G^2 \rightarrow G^2$ , яка кожній прийнятій реалізації зображення  $Y(x, y) \in G^2$  ставить у відповідність оцінку (відфільтроване зображення)  $\hat{L}(x, y) \in G^2$  вихідного зображення  $L(x, y)$

$$F[Y(x, y)] = \hat{L}(x, y).$$

Наявні методи просторової фільтрації такі, як усереднююча, інверсна, рангова, медіанна, адаптивна та байєсовська фільтрації, розроблені для двовимірного масиву та застосовні лише у випадку, коли  $\|L(x, y)\|_{G^2} \geq \|N(x, y)\|_{G^2}$ , де  $\|\cdot\|_{G^2}$  – норма у гільбертовому просторі. Якщо ж  $\|L(x, y)\|_{G^2} < \|N(x, y)\|_{G^2}$ , то вони не є ефективними.

Сформулюємо цей процес інакше, використавши формули зв'язку між векторним та матричним поданням двовимірного масиву (5.3.3) та (5.3.4) с. 133 У. Претт [7]. Це дозволить застосувати методи, розроблені для одновимірних сигналів, що утворюють гільбертів простір, який позначимо через  $G^1$ . Наведемо ці формули нижче з деякими внесеними уточненнями.

Цифрове зображення  $L(x, y)$  подається у вигляді матриці розміру  $m \times n$

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} L(1,1) & L(1,2) & \dots & L(1,n) \\ L(2,1) & L(2,2) & \dots & L(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L(m,1) & L(m,2) & \dots & L(m,n) \end{pmatrix}.$$

Формула переходу від зображення  $L(x, y)$  до сигналу-носія зображення  $s(t)$ :

$$s(t) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} A_{ij} \cdot L(x, y) \cdot B_{i-(j-1)N}, \quad (3)$$

де матриця  $A_{ij}$  розміру  $m \cdot n \times m$  та матриця-стовпець  $B_{i-(j-1)N}$  розміру  $n \times 1$  мають вигляд:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_i, \quad B_{i-(j-1)N} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_j \quad i - (j-1)N.$$

Обернена операція перетворення вектора  $s(t)$  до матриці  $L(x, y)$  задається співвідношенням

$$L(x, y) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=(j-1)N+1}^{jN} A_{ij}^T \cdot s(t) \cdot B_{i-(j-1)N}^T. \tag{4}$$

Тоді перетворення вихідного зображення  $L(x, y)$  до деякої функції від часу  $s(t)$ , яка є корисним сигналом-носієм інформації, можна подати як дію оператора  $V : G^2 \rightarrow G^1$

$$s(t) = V[L(x, y)].$$

Внаслідок формули (3), оператор  $V : G^2 \rightarrow G^1$  є лінійним [6], оскільки виконуються властивості

1) адитивності

$$\forall L_1, L_2 \in G^2 \quad V[L_1 + L_2] = V[L_1] + V[L_2];$$

2) однорідності

$$\forall L(x, y) \in G^2, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad V[\lambda L] = \lambda V[L].$$

Крім того, він є взаємно-однозначним, оскільки  $\forall L_1, L_2 \in G^2$  таких, що  $L_1 \neq L_2 \quad V[L_1] \neq V[L_2]$ .

Внаслідок формули (4), цей оператор має лінійний обернений оператор  $V^{-1} : G^1 \rightarrow G^2$  такий, що

$$L(x, y) = V^{-1}[s(t)] = V^{-1}[V[L(x, y)]],$$

де  $L(x, y)$  – вихідне (оригінальне) зображення.

Якщо ж в інформаційному каналі присутній зовнішній шум  $n(t)$ , природнього або штучного походження, то спостерігається випадкова реалізація процесу  $y(t) \neq s(t)$  така, що

$$y(t) = s(t) + n(t). \tag{5}$$

В цьому випадку результат відновлення зображення буде відмінним від  $L(x, y)$  та дорівнювати деякій оцінці  $\hat{L}(x, y)$ :

$$\hat{L}(x, y) = V^{-1}[y(t)] = V^{-1}[s(t) + n(t)] = V^{-1}[s(t)] + V^{-1}[n(t)] = L(x, y) + N(x, y),$$

де  $N(x, y)$  – деяка випадкова маска, що породжується шумом  $n(t)$ . Ця процедура проілюстрована на рис. 1.

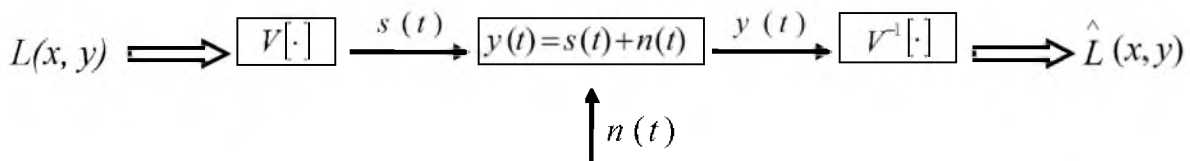


Рис. 1. Узагальнена схема відновлення зображення

Зображення буде відновлено ідеально, якщо перетворення  $V^{-1}[\cdot]$  виконує умови:

$$\begin{cases} V^{-1}[s(t)] = L(x, y) \\ V^{-1}[n(t)] = O(x, y), \end{cases} \tag{6}$$

де  $O(x, y)$  – нульова матриця. Але ці умови є несумісними та не можуть бути виконані одночасно.

Очевидно, що необхідно ввести деяке попереднє перетворення  $P[y(t)]$  над процесом, який спостерігається, так, як вказано на рис. 2.

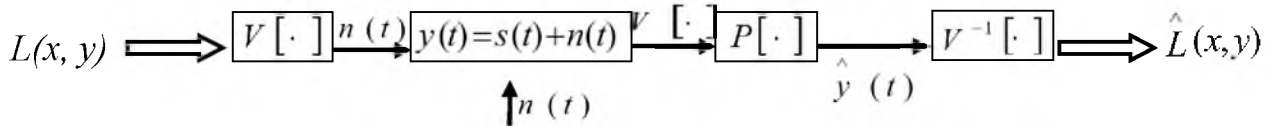


Рис. 2. Відновлення зображення з попереднім пригніченням адитивного шуму

В цьому випадку результат відновлення вихідного зображення дорівнює:

$$\hat{L}(x, y) = V^{-1}\{P[y(t)]\}.$$

Сформулюємо наступне завдання: необхідно знайти оператор  $P: G^1 \rightarrow G^1$ , який ставить у відповідність кожному прийнятому сигналу  $y(t) \in G^1$  оцінку  $\hat{s}(t) \in G^1$  вихідного сигналу-носія зображення  $s(t)$

$$P[y(t)] = \hat{s}(t), \tag{7}$$

такий, що

$$\left\| \hat{s}(t) - s(t) \right\|_{G^1} \rightarrow \min. \tag{8}$$

З умови (8) випливає, що цей оператор є неперервним [8], тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y(t) \in G^1 \text{ з того, що } \|y(t) - s(t)\|_{G^1} < \delta \Rightarrow \|P[y(t)] - P[s(t)]\|_{G^1} < \varepsilon,$$

або

$$\left\| \hat{s}(t) - s(t) \right\|_{G^1} < \varepsilon.$$

Отже, оператор  $P: G^1 \rightarrow G^1$  є обмеженим, тобто

$$\forall y(t) \in G^1 \exists M > 0 : \|P[y(t)]\|_{G^1} \leq M \|y(t)\|_{G^1},$$

або

$$\frac{\|P[y(t)]\|_{G^1}}{\|y(t)\|_{G^1}} \leq M; \quad y(t) \neq 0. \tag{9}$$

Нерівність (9) означає, що множина таких дробів є обмеженою, та, отже, має точну верхню грань. Тому, доцільним є поняття норми обмеженого оператора.

Нормою обмеженого оператора  $P: G^1 \rightarrow G^1$  є найменша з констант  $M$ , яка позначається через  $\|P\|$  та обчислюється за формулою:

$$\|P\| = \sup_{\substack{y(t) \in G^1 \\ y(t) \neq 0}} \frac{\|P[y(t)]\|_{G^1}}{\|y(t)\|_{G^1}}. \tag{10}$$

З формул (9) та (10) випливає, що:

$$\forall y(t) \in G^1 : \|P[y(t)]\|_{G^1} \leq \|P\| \cdot \|y(t)\|_{G^1}.$$

Будемо шукати лінійний обмежений оператор  $P: G^1 \rightarrow G^1$  у вигляді згортки прийнятого сигналу  $y(t)$  та імпульсної характеристики системи (вагової функції)  $h(t)$ :

$$P[y(t)] = y(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau, \quad (11)$$

де  $h(t)$  – зсунута на деяку кількість відліків і така, що змінюється за амплітудою дельта-функція Дірака. Тоді, внаслідок лінійності операції інтегрування, оператор  $P: G^1 \rightarrow G^1$  буде лінійним.

У випадку цифрової системи зв'язку

$$h(t) = \sum_{i=1}^m w(i\Delta t) \delta_n(t - i\Delta t),$$

де  $\Delta t$  – інтервал дискретизації;  $w(i\Delta t)$  – вагові коефіцієнти;  $\delta_n(t)$  – дельта-функція Дірака.

Тоді, інтеграл (11), з урахуванням парності дельта-функції та її фільтруючої властивості, прийме вигляд

$$\begin{aligned} P[y(t)] &= \lim_{n \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \cdot \sum_{i=1}^m w(i\Delta t) \delta_n((t - i\Delta t) - \tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^m w(i\Delta t) \lim_{n \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \delta_n((t - i\Delta t) - \tau) d\tau = \sum_{i=1}^m w(i\Delta t) y(t - i\Delta t) = W^T \cdot Y, \end{aligned}$$

де  $Y = \{y(t - i\Delta t)\}; i = \overline{0, m}$  – вектор-стовпець вхідних значень прийнятого сигналу  $y(t)$ ;  $W^T = \{w_i\}; i = \overline{0, m}$  – параметричний вектор-рядок вагових коефіцієнтів, що виконує вимоги критерію оптимальності (8).

Враховуючи формулу (7), отримаємо

$$W^T \cdot Y = \hat{S}(t) \quad (12)$$

де  $\hat{S}(t)$  – оцінені значення вихідного сигналу  $S = \{s_i(t)\}; i = \overline{0, m}$ , які параметрично залежать від вагових коефіцієнтів  $W^T = \{w_i\}; i = \overline{0, m}$ .

З означення норми у гільбертовому просторі та умови (8) випливає, що знаходження лінійного обмеженого оператора  $P: G^1 \rightarrow G^1$  зводиться до знаходження мінімуму середньоквадратичної помилки

$$E(W) = \min_{W \in \Omega_W} \left\| \hat{S}(t) - S(t) \right\|_{G^1}^2,$$

де  $\Omega_W$  – область припустимих значень вагових коефіцієнтів  $W^T = \{w_i\}; i = \overline{0, m}$ , що виконують умову (12).

### Висновки

Поданий підхід до формалізації процесу відновлення зображення може бути підґрунтям для синтезу оптимальних, в середньоквадратичному змісті, структур багатомірних адаптивних алгоритмів, які дозволяють виділяти відеоінформацію на фоні шумів довільної інтенсивності.

### Список використаних джерел

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
2. Хуанг Т.С., Эклунд Дж.-О. и др. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т.С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд // под ред. Т.С. Хуанга: пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1984. – 224 с.
3. Методы и алгоритмы восстановления изображений в условиях неполной априорной информации : монография / В.В. Воронин, В.И. Марчук. – Шахты, ГОУВПО «ЮГРГУЭС», 2010. – 89 с.
4. Buades A., Coll B., Morel J.M. A Review of Image Denoising Algorithms, With a New One // Journal on Multiscale Modeling and Simulations, 4(2), 2005. – pp. 490–530.
5. Грузман И.С., Киричук В.С. и др. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Учебное пособие для студ. V курса РЭФ. – Новосибирск: НГТУ, 2000. – 168 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М. : Наука, 1999. – 296 с.
7. Прэнтт У. Цифровая обработка изображений. – М. : Мир, 1981. – 310 с.
8. Чеб Е.С. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Курс лекций. Линейные ограниченные операторы. – Минск : изд. БГУ, 2007. – 140 с.

**Рецензент:** Б.О. Дем'янчук, д.т.н., доц., Військова академія (м. Одеса)

### ОПЕРАТОРНАЯ ФОРМА ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ФОНЕ АДДИТИВНЫХ ШУМОВ

О.В. Ткачук

*Исходя из основных понятий функционального анализа, представлена математическая формализация процесса восстановления изображения на фоне аддитивных шумов. Сформулирована постановка задачи восстановления изображения на фоне аддитивных шумов с помощью теории линейных ограниченных операторов.*

**Ключевые слова:** *среднеквадратическая ошибка, фильтрация, аддитивный шум, гильбертово пространство, линейный ограниченный оператор, свертка функций.*

### STATEMENT FORM OF RENEWAL OF IMAGE ON A BACKGROUND ADDITIVE NOISES

O. Tkachuk

*Coming from the basic concepts of functional analysis, mathematical formalization of process of renewal of image is presented on background additive noises. Raising of task of renewal of image is set forth on a background additive noises by means of theory of linear limit operators.*

**Keywords:** *midding quadratic error, filtration, additive noise, Hilbert space, linear limit operator, convolution product of functions.*

Надійшла до редакції 10.11.2016