

УДК 623.546

В.І. Грабчак, к.т.н., с.н.с.**Ю.М. Косовцов**, к.ф.-м.н.*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,
м. Львів, Україна*

РІВНЯННЯ РУХУ ЦЕНТРА МАС СНАРЯДА З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ

На основі рівнянь просторового руху снаряда методом диференційного виключення отримані точні рівняння руху центра мас снаряда з гіроскопічною стабілізацією, які не містять кути нутації снаряда, а залежать лише від його швидкості та кута кидання, що придатні як для розробки спрощених систем рівнянь руху снаряда, так і для відновлення складових сил та моментів сили опору повітря за результатами експериментальних даних балістичних стрільб.

Ключові слова: снаряд, сила опору повітря, рівняння руху, кут нутації, швидкість та кут кидання снаряда.

Постановка проблеми

Серед основних завдань зовнішньої балістики виділяються завдання, пов'язані з дослідженням рівнянь руху снаряда, як для визначення траєкторних параметрів руху снаряда, умов стійкості, так і для знаходження шляхів і методів вимірювання сили опору повітря, оцінки їх впливу на параметри руху і т.п. Наявні форми рівнянь руху снаряда (математичні моделі) часто не пристосовані для вирішення конкретних теоретичних і практичних завдань. Традиційне використання наближених методів рішення задач зовнішньої балістики часто призводить до «грубих» математичних моделей, що не дозволяє отримати ті чи інші параметри з необхідною точністю. Найбільш гостро це проявляється при спробах вимірювання повної сили опору повітря та моментів, що нею утворюється, з використанням експериментальних даних балістичних стрільб [1, 2, 3].

На сьогоднішній день важливим напрямом визначення сили опору повітря є підхід, заснований на відновленні значень складових сил та моментів опору повітря на основі параметрів просторового руху снаряда. Значення складових сил та моментів опору повітря снаряда розраховуються з використанням аналітичних залежностей, які отримуються на основі наближеного аналітичного рішення рівнянь просторового руху снаряда [1, 3, 4, 5] при врахуванні впливу всіх основних факторів, які діють на снаряд під час польоту.

Аналіз останніх досягнень і публікацій, постановка завдання

Визначення величини сили опору повітря має тривалу історію та охоплює широкий спектр досліджень, але не зважаючи на велику різноманітність в цьому напрямку наукових підходів, основним методом визначення сили опору повітря на сьогоднішній день, є експериментальний метод – метод стрільб, який заснований на вимірюванні зміни швидкості польоту снаряда на початковій ділянці траєкторії [1, 4, 5]. Цим питанням займалися видатні вчені й артилеристи, і в результаті проведення чисельних полігонних стрільб були отримані залежності функцій (коефіцієнтів) сили опору повітря від числа Маху.

Сила опору повітря залежить в першому наближенні від форми і розмірів снаряда, швидкості його польоту і обертання навколо центра мас, від щільності повітря і його в'язкості, від швидкості звука у повітрі, яка визначається його температурою, а також від положення снаряда на траєкторії [1, 3-5], тобто

$$R = f(\delta, V, d, \rho, \mu, a), \quad (1)$$

де δ – кут нутації; V – швидкість польоту снаряда; d – діаметр (калібр) снаряда; ρ – щільність повітря; μ – кінетичний коефіцієнт в'язкості повітря; a – швидкість звука у повітрі.

За допомогою теорії подібності і розмірностей вид функціональної залежності перетворюється так, що незалежні змінні стають безрозмірними і кількість їх зменшується. В підсумку отримаємо формулу [1]

$$R = \frac{\rho V^2}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \varphi \left(\frac{Vd\rho}{\mu}; \frac{V}{a}; \delta \right), \quad (2)$$

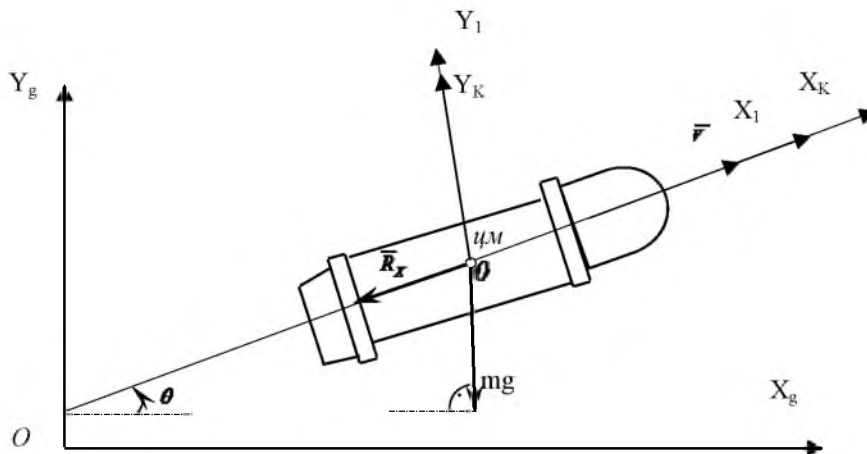
де $\frac{Vd\rho}{\mu}$ – число Рейнольдса (Re); $\frac{V}{a}$ – число Маха (M), та у загальному вигляді

$$R = \frac{\rho V^2}{2} S_M c(M) = q S_M c(M), \quad (3)$$

де $q = \frac{\rho V^2}{2}$ – швидкісний натиск; $S_M = \frac{\pi d^2}{4}$ – площа міделевого перерізу (площина перерізу корпусу снаряда у місці його найбільшого діаметру); c – безрозмірна функція (коефіцієнт) сили опору повітря.

Одним із методів визначення функції сили опору повітря за зміною швидкості польоту снаряда є вимірювання часу польоту снаряда між двома і більше фіксованими точками траєкторії, відстань між якими відома [1, 4, 5]. В цьому випадку фіксується час польоту снаряда в декількох точках траєкторії, визначається швидкість руху снаряда в цих точках та крива розподілу швидкостей вздовж траєкторії. Швидкість визначається як відношення відстані між фіксованими точками (ділянка траєкторії, що «блокується») до виміряного часу польоту на цій ділянці і відноситься до середини ділянки. Перевагами зазначеного методу є можливість досліджувати опір снарядів в натуральну величину, отримання сили опору повітря на всьому інтервалі швидкостей, що досліджуються.

Для визначення аналітичної залежності розрахунку функції сили опору повітря за даними швидкості польоту снаряда, як правило використовують рівняння руху снаряда в площині стрільби (рис. 1).



$OX_gY_gZ_g$ – нерухома нормальна земна система координат;
рухомі – траєкторна $OX_kY_kZ_k$ та зв'язана $OX_1Y_1Z_1$ системи координат

Рис. 1. Схема дії сил на снаряд в площині стрільби

$$m \frac{dV}{dt} = -S_M \frac{\rho V^2}{2} c_X(M) - mg \sin \theta_0, \quad (4)$$

де g – прискорення сили тяжіння; m – маса снаряда; θ_0 – початковий кут кидання снаряда, для шуканої k -ої ділянки, що блокується, відповідно значення функції сили лобового опору повітря має вид

$$c_x(M)_k = \frac{2m}{S_M \rho V_k^2} \left[\frac{dV}{dt} + g \sin \theta \right]_k \tag{5}$$

Отже, визначення функції сили опору повітря за даними зміни швидкості польоту снаряда зводиться до визначення однієї складової – функції сили лобового опору повітря [1, 4, 5], що призводить до невідповідності математичних моделей руху снаряда реальним умовам руху снаряда. Так відсутні аналітичні залежності, а також математичний апарат визначення за результатами експериментальних даних балістичних стрільб інших складових сили опору повітря – підйимальної сили, сили Магнуса, а також перекидаючого моменту, моменту Магнуса, гасящего та демпфуючого моментів. На сьогодні, розрахунок залежностей визначення складових сили опору повітря являє собою надзвичайно складне завдання.

Отже, метою статті є розробка рівнянь руху центра мас снаряда з гіроскопічною стабілізацією для розробки спрощених систем рівнянь руху снаряда, а також для відновлення функцій складових сил та моментів опору повітря за результатами експериментальних даних балістичних стрільб.

Виклад основного матеріалу

Перспективним напрямком визначення сили опору повітря є підхід, заснований на відновленні її складових на основі експериментальних даних балістичних стрільб (параметрів просторового руху снаряда), який полягає в тому, що значення функцій сили опору повітря розраховуються на основі рівнянь просторового руху снаряда [1, 3, 5]. В якості рівнянь просторового руху снарядів приймемо систему, яка наведена в [6, 7].

Розташування та взаємна орієнтація векторів складових сил та моментів опору повітря діючих на снаряд, схематично наведена на рис. 2.

Для спрощення аналітичних залежностей визначення складових сил та моментів опору повітря та враховуючи те, що вимірювання параметрів просторового руху снаряда відбувається на невеликій ділянці 100–500 м боковим відхиленням можна знехтувати, та припустити, що траєкторія польоту відбувається в одній площині – площині стрільби. Рівняння руху снаряда в проєкціях на осі траєкторної системи координат з урахуванням дії складових сили опору повітря: сили лобового опору R_T , підйимальної сили R_N , сили Магнуса R_L ; складових головного моменту кількості руху – перекидаючого моменту M , моменту Магнуса M_L , демпфуючого моменту M_D та гасящего моменту M_T з урахуванням прийнятих припущень, запишуться у вигляді:

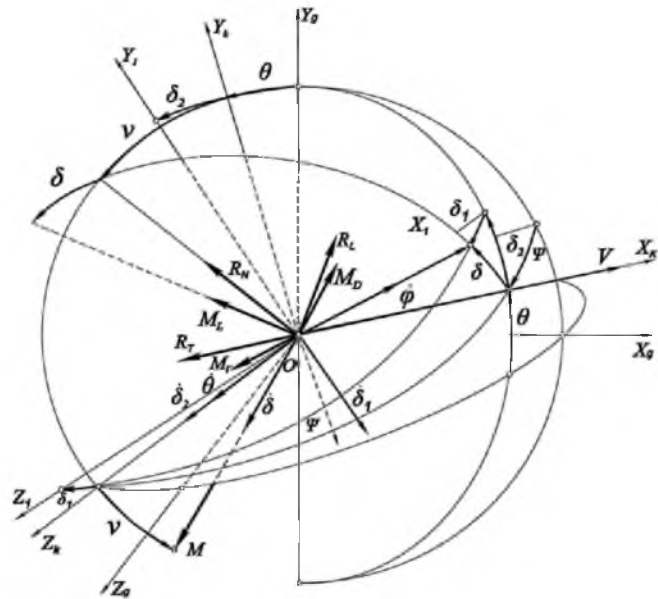


Рис. 2. Взаємна орієнтація векторів діючих на снаряд сил та моментів

$$\frac{d}{dt} V(t) = -f(t) - g \sin \theta(t); \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt} \theta(t) = 2\chi \delta_2(t) + 2\lambda \delta_1(t) - \frac{g \cos \theta(t)}{V(t)}; \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = V \cos \theta(t); \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = V \sin \theta(t); \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t) - \left(\frac{Cr(t)}{A} + 2\lambda \right) \frac{d}{dt} \delta_2(t) + 2(\xi + \chi) \frac{d}{dt} \delta_1(t) - \left(\beta + 2 \frac{Cr(t)}{A} \lambda - 4\xi\chi - 2 \frac{d}{dt} \chi \right) \delta_1(t) + \\ + 2 \left(\varepsilon \frac{r(t)}{r_0} - \frac{Cr(t)}{A} \chi - 2\xi\lambda - \frac{d}{dt} \lambda \right) \delta_2(t) + \frac{Cr(t)}{A} \frac{g \cos \theta(t)}{V(t)} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \delta_2(t) - \left(\frac{Cr(t)}{A} + 2\lambda \right) \frac{d}{dt} \delta_1(t) + 2(\xi + \chi) \frac{d}{dt} \delta_2(t) - \left(\beta + 2 \frac{Cr(t)}{A} \lambda - 4\xi\chi - 2 \frac{d}{dt} \chi \right) \delta_2(t) + \\ - 2 \left(\varepsilon \frac{r(t)}{r_0} - \frac{Cr(t)}{A} \chi - 2\xi\lambda - \frac{d}{dt} \lambda \right) \delta_1(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{g \cos \theta(t)}{V(t)} \right) + 2\xi \frac{g \cos \theta(t)}{V(t)} = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} r(t) = -\varsigma(t)r(t), \quad (12)$$

де $f = \frac{1}{m} R_T = \frac{d^2 10^3}{g} H(y) V^2(t) c_X(M)$; $c_X(M)$ – коефіцієнт сили лобового опору; $H(y)$ – функція зміни

щільності повітря в залежності від висоти; $2\chi\delta_1 = \frac{1}{mV} R_N \sin v = 2\chi\delta \sin v$; $2\chi\delta_2 = \frac{1}{mV} R_N \cos v = 2\chi\delta \cos v$;

$R_N = \frac{dl \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_{R_N} \cdot \delta$; K_{R_N} – коефіцієнт підйимальної сили;

l – довжина снаряда; $2\lambda\delta_1 = \frac{1}{mV} R_L \sin v = 2\lambda\delta \sin v$; $2\lambda\delta_2 = \frac{1}{mV} R_L \cos v = 2\lambda\delta \cos v$;

C , A – відповідно полярний та екваторіальний момент інерції снаряда; r – кутова швидкість власного обертання снаряда; $R_L = \frac{d^2 l \cdot 10^3}{g} r(t) V H(y) K_{R_L} \cdot \delta$; K_{R_L} – коефіцієнт сили Магнуса;

δ_1 , δ_2 – відповідно вертикальна і горизонтальна складові кута нутації снаряда;

$\beta = \frac{1}{A} \frac{d^2 h \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_{M_P}$; h – відстань між центром тиску та центром мас снаряда;

K_{M_P} – коефіцієнт перекидаючого моменту; $2\varepsilon = \frac{1}{A} \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} r H(y) V K_{M_L}$; K_{M_L} – коефіцієнт моменту

Магнуса; $2\xi = \frac{1}{A} \frac{dl^3 \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_D}$; K_{M_D} – коефіцієнт демпфуючого моменту;

$\varsigma = \frac{d^3 l 10^3}{g C} H(y) V(t) K_{M_\Gamma}$; K_{M_Γ} – коефіцієнт гасячого моменту.

При постановці балістичних стрільб проводиться вимірювання елементів польоту снаряда: шлях, час, швидкість польоту, кути, які утворюються віссю снаряда і інші питання, за даними яких роблять висновки про складові сили опору повітря та її моменти, які діють на снаряд в польоті.

При розробці та дослідженні зразків артилерійського озброєння застосовують, як правило спеціальні методи вимірювань, які використовують обладнання, спеціально розроблене для вимірювання елементів польоту снаряда із заданими метрологічними і експлуатаційними характеристиками.

На сьогодні найбільш широке застосування для визначення елементів польоту снаряда знайшли спеціальні методи вимірювання характеристик руху центра мас снаряда, а саме – швидкості, координат та кута кидання снаряда, які дозволяють із заданою точністю розрахувати силу опору повітря. Водночас, проблемним питанням є технічна реалізація методів визначення кутів нутації та прецесії снаряда, точність вимірювань яких, не завжди відповідає поставленій меті. В рівняннях (7, 10, 11), припускаючи, що сферичний трикутник зі сторонами δ_1 , δ_2 , δ (рис. 3) є плоский, виразимо через вертикальну і горизонтальну складові кута нутації снаряда – кут прецесії, тобто

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta \sin \nu; \\ \delta_2 &= \delta \cos \nu. \end{aligned}$$

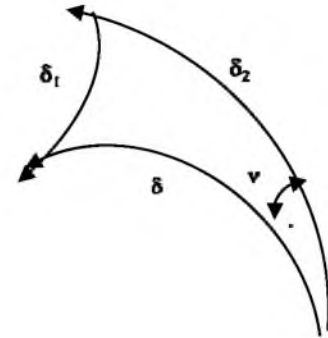


Рис. 3. Складові кута нутації снаряда

Виходячи з цього, зауважимо, що рівняння (6) за відомими значеннями $V(t)$, $\theta(t)$ та $x(t)$, $y(t)$ дозволяють, в даному разі, точно знайти значення сили лобового опору f . Знаходження решти сил та моментів опору повітря з використанням всієї системи рівнянь (6)-(12) мало реалістично, перш за все по причині складнощів, які виникають при експериментальному визначенні значень $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ з потрібною точністю.

Для отримання точної системи рівнянь, яка містить лише функції $V(t)$ та $\theta(t)$, виключимо з системи рівнянь (6)-(12) невідомі функції $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$. Для цього застосуємо метод диференціального виключення до диференціальних рівнянь (7, 10, 11) [8], який полягає в послідовному виключенні невідомих функцій доти, поки не залишиться лише рівняння, що містять функції $V(t)$ та $\theta(t)$. Виключаючи із зазначених трьох рівнянь кути нутації $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ ми маємо отримати принаймні одне рівняння, яке не містить $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$. Очевидно, це рівняння буде рівнянням вищого порядку і після того як його рішення знайдено, інші невідомі функції можна знайти по черзі, використовуючи або початкові диференціальні рівняння системи, або отримані в процесі виключення невідомих.

З рівняння (8) знаходимо $\delta_2(t)$

$$\delta_2(t) = -\frac{1}{2} \frac{2\lambda\delta_1(t)V(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)V(t) - g \cos\theta(t)}{V(t)\chi},$$

підставляємо отриманий вираз в (10) та (11), отримуємо систему з двох рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\delta_1(t) - \left(\frac{Cr(t)}{A} + 2\lambda\right) \left[\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{2\lambda\delta_1(t)V(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)V(t) - g \cos\theta(t)}{V(t)\chi} \right) \right] + 2(\xi + \chi) \frac{d}{dt}\delta_1(t) - \\ - \left(\beta + 2\frac{Cr(t)}{A}\lambda - 4\xi\chi - 2\frac{d}{dt}\chi \right) \delta_1(t) + \frac{Cr(t)}{A} \frac{g \cos\theta(t)}{V(t)} + \\ + \frac{\left(\varepsilon \frac{r(t)}{r_0} - \frac{Cr(t)}{A} \right) \chi - 2\xi\lambda - \frac{d}{dt}\lambda}{V(t)\chi} \left(2\lambda\delta_1(t)V(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)V(t) - g \cos\theta(t) \right) = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{2\lambda\delta_1(t)V(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)V(t) - g \cos \theta(t)}{V(t)\chi} \right) + \left(\frac{Cr(t)}{A} + 2\lambda \right) \frac{d}{dt} \delta_1(t) + \\ & + 2(\xi + \chi) \left(\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{2\lambda\delta_1(t)V(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)V(t) - g \cos \theta(t)}{V(t)\chi} \right) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\left(\beta + 2 \frac{Cr(t)}{A} \lambda - 4\xi\chi - 2 \frac{d}{dt} \chi \right) \left(2\lambda\delta_1(t)V(t) - \left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)V(t) - g \cos \theta(t) \right)}{V(t)\chi} - \\ & - 2 \left(\varepsilon \frac{r(t)}{r_0} - \frac{Cr(t)}{A} \chi - 2\xi\lambda - \frac{d}{dt} \lambda \right) \delta_1(t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{g \cos \theta(t)}{V(t)} \right) - 2\xi \frac{g \cos \theta(t)}{V(t)} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

З рівняння (13) та (14) виключаємо $\frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t)$, для цього вирішуємо рівняння (13) відносно $\frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t)$. Для скорочення математичних викладок отриманий результат запишемо у вигляді функціональної залежності

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t) = \Psi \left(\frac{d}{dt} \delta_1(t), \delta_1(t), V(t), \theta(t) \right). \quad (15)$$

Підставляємо (15) до рівняння (14), отримуємо

$$B \left(\frac{d}{dt} \delta_1(t), \delta_1(t), V(t), \theta(t) \right) = 0, \quad (16)$$

що залежить тільки від $\frac{d}{dt} \delta_1(t)$ та $\delta_1(t)$.

Продиференціюємо рівняння (16) за часом t , отримаємо

$$P \left(\frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t), \frac{d}{dt} \delta_1(t), \delta_1(t), V(t), \theta(t) \right) = 0. \quad (17)$$

Отриманні рівняння (15)-(17) вирішуються відносно $\frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t)$, $\frac{d}{dt} \delta_1(t)$ та $\delta_1(t)$.

Рішення яких надамо у вигляді:

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta_1(t) = X(t); \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \delta_1(t) = Y(t); \quad (19)$$

$$\delta_1(t) = Z(t), \quad (20)$$

де

$$X(t) = X(V(t), \theta(t), \chi(V(t)), \beta(V(t)), \lambda(V(t)), \varepsilon(V(t)), \xi(V(t)));$$

$$Y(t) = Y(V(t), \theta(t), \chi(V(t)), \beta(V(t)), \lambda(V(t)), \varepsilon(V(t)), \xi(V(t)));$$

$$Z(t) = Z(V(t), \theta(t), \chi(V(t)), \beta(V(t)), \lambda(V(t)), \varepsilon(V(t)), \xi(V(t))),$$

отже, рівняння (18)-(20) виражають функцію $\delta_1(t)$ та її похідні через параметри $V(t), \theta(t)$.

Тепер врахуємо, що похідна правої частини (20) по t повинна дорівнювати правій частині (19) і похідна правої частини (19) по t повинна дорівнювати правій частині (18), тобто

$$\frac{d}{dt} Z(t) - Y(t) = 0; \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} Y(t) - X(t) = 0. \quad (22)$$

В розгорнутому вигляді ліві частини (21)-(22) мають співпадаючі нетривіальні співмножники, які і представляють собою шукане рівняння

$$\Phi \left[t, \theta(t), V(t), \frac{d}{dt} V(t), \frac{d^2}{dt^2} V(t), \frac{d^3}{dt^3} V(t), \frac{d^4}{dt^4} V(t), \frac{d}{dt} \theta(t), \frac{d^2}{dt^2} \theta(t), \frac{d^3}{dt^3} \theta(t), \frac{d^4}{dt^4} \theta(t), \frac{d^5}{dt^5} \theta(t), \right. \\ \left. \chi(V(t)), \frac{d}{dV} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^3}{dV^3} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^4}{dV^4} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \lambda(V(t)), \frac{d}{dV} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \right. \\ \left. \frac{d^2}{dV^2} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^3}{dV^3} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^4}{dV^4} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \beta(V(t)), \frac{d}{dV} \beta(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \beta(V) \Big|_{V=V(t)}, \right. \\ \left. \varepsilon(V(t)), \frac{d}{dV} \varepsilon(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \varepsilon(V) \Big|_{V=V(t)}, \xi(V(t)), \frac{d}{dV} \xi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \xi(V) \Big|_{V=V(t)} \right] = 0; \quad (23)$$

Повний вид рівняння (23) досить легко отримується за згаданою вище схемою за допомогою системи комп'ютерної алгебри, наприклад, Maple і незважаючи на громіздкість дозволяє в подальшому проводити з ним необхідні перетворення та розрахунки. Підкреслимо, що ніяких додаткових припущень відносно параметрів, що входять в рівняння (23), крім їх диференційованості певну кількість разів, при його виведенні не вводилося. У розгорнутому вигляді це рівняння містить 59695 доданків, що становить основний його недолік.

Для визначення складових сил та моментів сили опору повітря, вимірювання параметрів руху снаряда, як правило, відбувається на невеликому відрізку траєкторії, відповідно швидкість власного обертання снаряда практично не змінюється

$$r(t) = r_0 = const.$$

В цьому випадку рівнянням (12) можна знехтувати. В підсумку отримуємо систему рівнянь руху снаряда:

$$\frac{d}{dt} V(t) = -f(t) - g \sin \theta(t); \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = V \cos \theta(t); \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = V \sin \theta(t); \quad (26)$$

$$\Phi \left[t, \theta(t), V(t), \frac{d}{dt} V(t), \frac{d^2}{dt^2} V(t), \frac{d^3}{dt^3} V(t), \frac{d^4}{dt^4} V(t), \frac{d}{dt} \theta(t), \frac{d^2}{dt^2} \theta(t), \frac{d^3}{dt^3} \theta(t), \frac{d^4}{dt^4} \theta(t), \frac{d^5}{dt^5} \theta(t), \right. \\ \left. \chi(V(t)), \frac{d}{dV} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^3}{dV^3} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^4}{dV^4} \chi(V) \Big|_{V=V(t)}, \lambda(V(t)), \frac{d}{dV} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \right. \\ \left. \frac{d^2}{dV^2} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^3}{dV^3} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^4}{dV^4} \lambda(V) \Big|_{V=V(t)}, \beta(V(t)), \frac{d}{dV} \beta(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \beta(V) \Big|_{V=V(t)}, \right. \\ \left. \varepsilon(V(t)), \frac{d}{dV} \varepsilon(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \varepsilon(V) \Big|_{V=V(t)}, \xi(V(t)), \frac{d}{dV} \xi(V) \Big|_{V=V(t)}, \frac{d^2}{dV^2} \xi(V) \Big|_{V=V(t)} \right] = 0. \quad (27)$$

Система рівнянь (24)–(27) є точними наслідками системи рівнянь (6)–(12) і являє собою точну систему рівнянь руху центру мас снаряда, що обертається. Подальші спрощення рівняння (23), пов'язані, наприклад, з малістю параметрів, що до нього входять і т.п., можливі, але залежать від конкретних завдань і мети спрощення.

У разі коли параметром руху снаряда, який вимірюється є тільки швидкість його польоту $V(t)$, то виражаючи з рівняння (6) кут кидання $\theta(t)$ і підставляючи його в (23) можна отримати рівняння, яке залежить тільки від швидкості $V(t)$.

Висновки

При розрахунках Таблиць стрільби, установок для стрільби артилерійських систем що розроблюються та модернізуються, актуальним питанням є визначення сили опору повітря руху снаряда, основним методом визначення якої є експериментальний метод – метод стрільб, який заснований на вимірюванні зміни швидкості польоту снаряда на початковій ділянці траєкторії. Однак, на сьогодні, методи та математичні моделі для визначення складових сили опору повітря з необхідною точністю недостатньо розроблені, що призводить до невідповідності математичних моделей руху снаряда реальним умовам стрільби.

В статті на основі системи рівнянь просторового руху снарядів, в якості складових сили опору повітря враховано: силу лобового опору; підймальну силу; силу Магнуса; перекидаючий момент; гасящий момент; момент Магнуса, методом диференційного виключення отримані рівняння руху центра мас снаряда з гіроскопічною стабілізацією, що являють собою точну систему рівнянь руху центру мас снаряда, що обертається та не містять кути нутації снаряда, а залежать лише від його швидкості та кута кидання, які із заданою точністю можна виміряти при проведенні балістичних стрільб.

Подальшим напрямком досліджень є розроблення, на основі отриманих рівнянь руху центра мас снаряда, аналітичних залежностей щодо визначення складових сили опору повітря за даними вимірювання швидкості та кута кидання снаряда та оцінка похибки їх відновлення.

Список використаних джерел

1. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко. – М. : Машиностроение, 2005. – 607 с.
2. Грабчак В.І. Аналіз існуючих та перспективних методів визначення сили опору повітря руху снарядів / В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко. – Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ. – 2013. – Вип. 2. (9). – С. 13–19.
3. McCoy R.L. Modern Exterior Ballistics/ R.L. McCoy. – Atglen, PA.: Schiffer Military History, 2012. – 328 p.

4. *Баллистика* / [Беневольский С.В., Бурлов В.В., Казаковцев В.П. и др.]; под ред. Л.Н. Лысенко – [Учеб. для курсантов и слушателей ГРАУ]. – Пенза: ПАИИ, 2005. – 510 с.
5. Равдин И.Ф. *Внешняя баллистика неуправляемых ракет и снарядов* / И.Ф. Равдин. – МО : Воениздат, 1973. – 184 с.
6. Грабчак В.І. *Математична модель руху центру мас снаряда з гіроскопічною стабілізацією* / В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко, С.В. Стеців. – *Військово-технічний збірник*. – Львів : АСВ. – 2014. – Вип. 2. (11). – С. 7–12.
7. Грабчак В.І. *Математична модель руху снаряда з гіроскопічною стабілізацією навколо його центру мас* / В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко, С.В. Стеців. – *Системи озброєння і військова техніка*. – Харків: ХУПС. – 2014. – Вип. 4 (40). – С. 21–27.
8. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* / Л.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1974. – 331 с.

Рецензент: Л.І. Сопільник д.т.н., професор, Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС СНАРЯДА С ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ

В.И. Грабчак, Ю.Н. Косовцов

На основании уравнений пространственного движения снаряда методом дифференциального исключения получены точные уравнения движения центра масс снаряда с гироскопической стабилизацией, которые не содержат углы нутации снаряда, а зависят только от его скорости и угла бросания, пригодные как для разработки упрощенных систем уравнений движения снаряда, так и для восстановления составляющих сил и моментов силы сопротивления воздуха по результатам экспериментальных данных баллистических стрельб.

Ключевые слова: снаряд, сила сопротивления воздуха, уравнения движения, угол нутации, скорость и угол бросания снаряда.

MOTION EQUATION FOR THE MASS CENTER OF A PROJECTILE WITH GYROSCOPIC STABILIZATION

V. Grabchak, Y. Kosovtsov

Exact equations for the mass center of a projectile with gyroscopic stabilization are derived basing on equations of spatial motion of a projectile, using the method of exclusion of differential equations. Derived equations do not contain nutation angles of a projectile, are dependent only on its velocity and the launch angle, being suitable for development of simplified systems of projectile motion equations as well as for restoration of the components of force and momenta of the air resistance from experimental data of ballistic shooting

Keywords: projectile, air resistance force, motion equation, angle of nutation, velocity and launch angle of a projectile.