

фундаменту (жорсткі проти гнучких) і умови безперервності на їх з'єднаннях, з акцентом на їх взаємовплив, пов'язані з основним розподілом навантаження ґрунту. Чисельний аналіз був виконаний комбінуванням кінцевих різниць і методом граничних елементів на однаковій чотиристоронній сітці.

Ключові слова: комбінований фундамент, взаємодія, пружний півпростір, пружна багатопарова середовище, метод кінцевих елементів, метод граничних елементів, узгодження.

УДК 519.878.5

В. Ф. Оробей¹, д.т.н., **А. Ф. Дашенко¹**, д.т.н., **Л. В. Коломієць²**, д.т.н., **О. М. Лимаренко¹**, к.т.н.

¹Одеський національний політехнічний університет, м. Одеса

²Одеська державна академія технічного регулювання та якості, м. Одеса

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА БАЛОК ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ.

Представлен алгоритм решения задач устойчивости плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения (тонкой полосы) с помощью численно-аналитического варианта метода граничных элементов. Целью работы является построение новых решений дифференциальных уравнений задач устойчивости. Балки с сечениями в виде узкой полосы имеют более высокую прочность и жесткость, однако, при поперечной нагрузке, возникает опасность потери устойчивости плоской формы изгиба. В этом случае балка дополнительно изгибается в другой плоскости и закручивается. Возникает изгибно-крутильная форма потери устойчивости, при которой появляются большие перемещения и может наступить разрушение конструкции. Теория решения подобных задач нуждается в развитии, т.к. существующие результаты весьма сложно распространить на неразрезные балки и рамы. Метод граничных элементов позволяет существенно упростить процесс решения, повысить точность и достоверность результатов и распространить полученные решения на более сложные конструкции, чем просто балки. Расчеты критических сил выполнены в среде MATLAB.

Ключевые слова: метод граничных элементов, устойчивость плоской формы изгиба, балки прямоугольного сечения, MATLAB.

Балки с сечением в виде узкой полосы имеют более высокую прочность и жесткость. В этой связи они имеют большое применение в различных балочных и рамных конструкциях машиностроения, строительства, мостов и т.д. Однако, при большом отношении высоты к ширине сечения, возникает реальная опасность потери устойчивости плоской формы изгиба такой балки. Она дополнительно получает прогибы в другой плоскости и углы закручивания. Если перемещения оказываются слишком большими, конструкция разрушается. Поэтому весьма важно иметь надежную, достоверную и достаточно простую теорию решения таких задач устойчивости.

Первые решения задач устойчивости плоской формы изгиба балок с сечением в виде узкой полосы были получены еще в 19 веке [1]. К настоящему времени решено достаточно много задач этого типа [2, 3]. При решении задач устойчивости балок под действием поперечной нагрузки дифференциальное уравнение и его решение записывалось для угла закручивания. В решении использовались функции, представляющие собой бесконечные

знакопередающиеся степенные ряды. В этом случае точность результата зависит от числа членов ряда, что не всегда удобно. Кроме того, имеющиеся решения весьма сложно использовать для решения задач устойчивости неразрезных балок и рам, поскольку они неполные (не включают другие параметры). Если же применить к этим задачам алгоритм численно-аналитического метода граничных элементов (МГЭ) [4], то появится возможность существенно упростить процедуру решения, повысить точность и достоверность результатов и применять новые решения дифференциальных уравнений в более сложных конструкциях, чем простые балки.

Целью работы является построение новых решений дифференциальных уравнений задач устойчивости плоской формы изгиба балок с сечением в виде узкой полосы и применение этих решений в конкретных задачах.

Дифференциальное уравнение устойчивости двутавровой балки вывел С. П. Тимошенко [1].

$$\begin{cases} EI_y w''''(x) + M_z(x)\theta''(x) = 0; \\ EI_\omega \theta''''(x) - GI_d \theta''(x) + M_z(x)w''(x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$w(x)$ – перемещение точки оси стержня в направлении оси Oz;

$\theta(x)$ – угол закручивания стержня вокруг оси Ox;

EI_y – изгибная жесткость сечения стержня

в плоскости xOz;

EI_ω – секториальная жесткость;

GI_d – жесткость при кручении;

$M_z(x)$ – изгибающий момент в сечении стержня относительно оси Oz, вызванный заданной поперечной нагрузкой (рис.1)

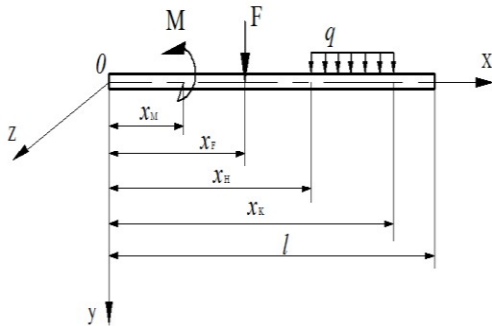


Рисунок 1 – Виды поперечной нагрузки

Поскольку прямоугольное сечение также имеет две оси симметрии, то систему уравнений (1) можно использовать для этого случая при существенном упрощении. Тонкое прямоугольное сечение при кручении имеет весьма малую величину депланации и членом $EI_\omega \theta''''(x)$ можно пренебречь. Уравнения устойчивости стержня с прямоугольным сечением запишутся в виде

$$\begin{cases} EI_y w''''(x) + M_z(x)\theta''(x) = 0; \\ -GI_d \theta''(x) + M_z(x)w''(x) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

| | | | | | |
|-------------------|---|---|---|-----------|-----------|
| $EI_y w(x)$ | 1 | 1 | x | $-A_{13}$ | $-A_{14}$ |
| $EI_y \varphi(x)$ | 2 | | 1 | $-A_{23}$ | $-A_{13}$ |
| $M_y(x)$ | 3 | | | A_{33} | A_{23} |
| $Q_z(x)$ | 4 | | | A_{43} | A_{33} |

$$=$$

| |
|-------------------|
| $EI_y w(0)$ |
| $EI_y \varphi(0)$ |
| $M_y(0)$ |
| $Q_z(0)$ |

$$,$$
(7)

где $EI_y \varphi(x), M_y(x), Q_z(x)$ – параметры изгиба стержня в горизонтальной плоскости xOz.

Ортонормированные фундаментальные функции имеют вид:

Из последнего уравнения системы (2) следует зависимость между углом закручивания и прогибом стержня

$$-GI_d \theta(x) + M_z(x)w(x) = Ax + B, \quad (3)$$

где константы интегрирования определяются из начальных условий

$$\begin{cases} B = -GI_d \theta(0) + M_z(0) \cdot w(0); \\ A = -GI_d \theta'(0) + M_z(0) \cdot w'(0). \end{cases} \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (2) следует, что

$$\theta''(x) = \frac{M_z(x)}{GI_d} w'(x), \quad (5)$$

Подставляя (5) в первое уравнение системы (2), получаем уравнение устойчивости стержня прямоугольного сечения

$$w''''(x) + \frac{M_z^2(x)}{GI_d EI_y} \cdot w''(x) = 0. \quad (6)$$

Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Его интегрирование приводит к существенным математическим трудностям, особенно, когда изгибающий момент $M_z(x)$ имеет несколько законов изменения, точки разрыва 1-го рода и точки излома. Все эти трудности преодолеваются, если применить к решению задач устойчивости алгоритм МГЭ [4]. С этой целью представим решение уравнения (6) для случая, когда жесткости GI_d, EI_y и изгибающий момент M_z постоянны по длине стержня. Видно, что уравнение (6) по форме записи не отличается от уравнения продольно-поперечного изгиба прямолинейного стержня, когда продольная сила сжимающая [5]. Его решение в матричной форме принимает вид:

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= \frac{1 - \cos nx}{n^2}; & A_{14} &= \frac{nx - \sin nx}{n^3}; \\
 A_{23} &= \frac{\sin nx}{n}; & A_{33} &= \cos nx; \\
 A_{43} &= -n \sin nx; & n &= \sqrt{\frac{M_z^2}{GI_d EI_y}}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Из представленного решения следует, что задачи устойчивости стержня с прямоугольным сечением описываются сравнительно простыми тригонометрическими функциями. Параметры кручения в решении (7) не участвуют, но существует связь между изгибом и кручением в виде соотношения (3). При формировании краевых задач используются граничные условия балки в горизонтальной плоскости xOz. Если M_z есть функция $M_z = M_z(x)$, то эпюру моментов разбивают на m частей, в пределах которых $M_{zi} = const$ и решение (7) по алгоритму МГЭ можно использовать для различных задач устойчивости. При достаточно большом m получаются результаты, близкие к точным. Рассмотрим отдельные задачи устойчивости балок.

Результаты научных исследований. Балки с постоянным сечением, у которых $M_z = const$. К таким балкам относятся конструкции, у которых граничные точки имеют шарнирное опирание в

вертикальной плоскости xOy, нагруженные сосредоточенными моментами по концам. В горизонтальной плоскости xOz могут быть различные условия опирания. Поперечная нагрузка считается приложенной к продольной оси стержней. Изгибающий момент M_z удобно представить выражением

$$M_z = a_M \cdot M + a_F \cdot F + a_q \cdot q, \tag{9}$$

где a_M, a_F, a_q – изгибающие моменты, вызванные соответствующей поперечной нагрузкой, равной единице;

M, F, q – критические значения поперечной нагрузки. Для определения критических значений нагрузки необходимо составить уравнение краевой задачи и найти корни трансцендентного уравнения МГЭ [4, 5]

$$|A_*(M, F, q, l)| = 0, \tag{10}$$

где $A_*(M, F, q, l)$ – преобразованная по алгоритму МГЭ матрица коэффициентов уравнения (7). Составим эти матрицы для ряда задач.

Задача 1. Балка имеет шарнирное опирание в двух плоскостях.

При граничном значении $x=l$ будем иметь:

| | A* | X* | Y |
|---|--------------------------------|---------------------------------------|---|
| | 1 2 3 4 | | |
| 1 | | $EI_y \omega(0) = 0; EI_y \varphi(0)$ | $\begin{matrix} \swarrow \\ - \\ \swarrow \end{matrix} \begin{matrix} EI_y \omega(l) = 0 \\ EI_y \varphi(l) \\ M_y(l) = 0 \\ Q_z(l) \end{matrix} = 0$ |
| 2 | -1 1 -A ₁₃ | $EI_y \varphi(0)$ | |
| 3 | | $M_y(0) = 0; Q_z(l)$ | |
| 4 | | $Q_z(0)$ | |

Из матрицы начальных параметров A_* следует, что в матрице A_* нужно обнулить 1 и 3 столбцы, т. к. они связаны с нулевыми параметрами. На их место переносятся ненулевые параметры матрицы Y , что приводит к появлению в матрице A_* компенсирующих элементов $A_*(2,1) = -1; A_*(4,3) = -1$. Компенсирующие элементы равны коэффициентам при переносимых параметрах и должны находиться в матрице A_* на месте (i, j) , где i – старый адрес (номер строки матрицы Y), j –

новый адрес (номер строки матрицы X_*) параметра. Другими словами, выполняется цепочка матричных элементарных преобразований

$$\begin{aligned}
 Y(l) &= A(l) \cdot X(0) \rightarrow A(l) \cdot X - Y(l) = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow A_*(l) \cdot X_*(0, l) = 0
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Из последнего равенства следует уравнение МГЭ для определения критических значений поперечной нагрузки (10). Для данной задачи корни уравнения (10) могут быть определены аналитически. Определитель матрицы $A_*(M, l)$ равен

$$|A_*(M, l)| = l \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{14} = 0. \quad (13)$$

Если подставить в уравнение (13) значения фундаментальной функции A_{23} , то получим уравнение

$$\sin nl = 0 \rightarrow M_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{GI_d \cdot EI_y}, \quad (14)$$

что является точным решением [2, 3].

Задача 2. Балка имеет жесткие заделки в горизонтальной плоскости. Определитель уравнения (10) этого случая имеет вид

$$|A_*(M, l)| = A_{13}^2 - A_{14} \cdot A_{23} = 0. \quad (15)$$

Корень данного уравнения необходимо искать с помощью компьютера. Для решения этой и других задач приняты следующие исходные данные:

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2; \quad G = 0,8 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2;$$

$$b = 0,01 \text{ м}; \quad h = 0,1 \text{ м}; \quad l = 1,0 \text{ м}.$$

$$I_y = hb^3 / 12 = 8,333 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

$$I_d = \beta hb^3 = 0,313 \cdot 0,1 \cdot 0,01^3 = 31,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

$$EI_y = 1,666 \text{ кНм}^2; \quad GI_d = 2,504 \text{ кНм}^2;$$

После подстановки этих данных в программу, первый корень (критическое значение) уравнения (15)

$$M_1 = 12,841 \text{ кНм},$$

или в безразличной форме

$$M_1 = \frac{2\pi}{l} \sqrt{GI_d \cdot EI_y}, \quad (16)$$

что также является точным решением [2,3].

Задача 3. Балка имеет жесткую заделку и шарнирное опирание в горизонтальной плоскости. Определитель уравнения (10) имеет вид

$$|A_*(M, l)| = -A_{13} \cdot A_{23} + A_{14} \cdot A_{33} = 0. \quad (17)$$

Первый корень будет равен

| | | | | | | | | |
|-------------------|---|---|---|----------|----------|----------|----------|-------------------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| $EI_y w(x)$ | 1 | 1 | x | - | - | | | $EI_y \omega(0)$ |
| $EI_y \varphi(x)$ | 2 | | 1 | - | - | | | $EI_y \varphi(0)$ |
| $M_y(x)$ | = | | | A_{33} | A_{23} | | | $M_y(0)$ |
| $Q_z(x)$ | 4 | | | A_{43} | A_{33} | | | $Q_z(0)$ |
| $GI_d \theta(x)$ | 5 | | | | | A_{33} | A_{23} | $GI_d \theta(0)$ |
| $M_{кр}(x)$ | 6 | | | | | A_{43} | A_{33} | $M_{кр}(0)$ |

$$\cdot \quad (23)$$

Применим это уравнение к данной задаче

$$M_1 = 9,175 \text{ кНм} \rightarrow M_1 = \frac{4,491}{l} \sqrt{GI_d \cdot EI_y} \quad (18)$$

Данный результат отсутствует в справочных данных [2, 3].

Задача 4. Консольная балка нагруженная на конце сосредоточенным моментом. В данном случае

$$|A_*(M, l)| = A_{33}^2 - A_{23} \cdot A_{43} = 0. \quad (19)$$

Если подставить значения фундаментальных функций в это уравнение, то получим невыполнимое равенство

$$\cos^2 nx + \sin^2 nx = 1 = 0. \quad (20)$$

Это свидетельствует о том, что неполное уравнение устойчивости (7) не позволяет определить критические нагрузки. Необходимо дополнить его параметрами кручения. Дифференциальное уравнение устойчивости для угла закручивания имеет вид [2]

$$\theta'' + \frac{M_z^2(x)}{GI_d \cdot EI_y} \theta(x) = 0. \quad (21)$$

Данное уравнение по форме записи не отличается от уравнения крутильных колебаний

| | | | |
|------------------|--------------|---------------------|------------------|
| $GI_d \theta(x)$ | $\cos nx$ | $\frac{\sin nx}{n}$ | $GI_d \theta(0)$ |
| $M_{кр}(x)$ | $-n \sin nx$ | $\cos nx$ | $M_{кр}(0)$ |

$$\cdot \quad (22)$$

призматического стержня. Поэтому его решение в матричной форме запишется в виде [5]

Если применить операцию квазидиагонализации, то полное решение уравнения устойчивости стержня прямоугольного сечения предстанет следующим образом

| | | | | | | | |
|---|---|----|----|------------------|------------------|----|-----------------|
| 1 | ① | -1 | | -A ₁₃ | -A ₁₄ | | |
| 2 | ② | | -1 | -A ₂₃ | -A ₁₃ | | |
| 3 | 3 | | | A ₃₃ | A ₂₃ | | |
| 4 | 4 | | | A ₄₃ | A ₃₃ | | |
| 5 | ⑤ | | | | | -1 | A ₂₃ |
| 6 | 6 | | | | | | A ₃₃ |

| | | |
|--|---|-------------------|
| $EI_y w(0) = 0; EI_y w(l)$ | ← | $EI_y w(l)$ |
| $EI_y \varphi(0) = 0; EI_y \varphi(l)$ | ← | $EI_y \varphi(l)$ |
| $M_y(0)$ | | $M_y(l) = 0$ |
| $Q_z(0)$ | - | $Q_z(l) = 0$ |
| $GI_d \theta(0) = 0; GI_d \theta(l)$ | ← | $GI_d \theta(l)$ |
| $M_{xp}(0)$ | | $M_{xp}(l) = 0$ |

$$= 0 \quad (24)$$

Уравнение устойчивости данной балки

$$|A_*(M, l)| = (A_{33}^2 - A_{23} \cdot A_{43}) \cdot A_{33} = 0 \quad (25)$$

имеет первый корень

$$M_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{GI_d \cdot EI_y}, \quad (26)$$

что является точным результатом [2, 3].

Балки с постоянным сечением и

$$M_z = M_z(x).$$

Данный случай широко распространен в практике. В работе предлагается краевую задачу для уравнения с переменным коэффициентом решать с помощью фундаментальных функций данного уравнения, но с постоянным коэффициентом. С этой целью балка дискретизируется на m частей. Например, при разбивке балки с шарнирными опорами на 3 получим:

| | |
|----|--|
| 1 | $w_{(0)}^{0-1} = 0; \varphi_{(0)}^{2-3}$ |
| 2 | $\varphi_{(0)}^{0-1}$ |
| 3 | $M_{y(0)}^{0-1} = 0; Q_z^{2-3}(l)$ |
| 4 | $Q_z^{0-1}(0)$ |
| 5 | $w_{(0)}^{1-2}$ |
| 6 | $\varphi_{(0)}^{1-2}$ |
| 7 | $M_{y(0)}^{1-2}$ |
| 8 | $Q_z^{1-2}(0)$ |
| 9 | $w_{(0)}^{2-3}$ |
| 10 | $\varphi_{(0)}^{2-3}$ |
| 11 | $M_{y(0)}^{2-3}$ |
| 12 | $Q_z^{2-3}(0)$ |

$$\mathbf{X}_* =$$

| | |
|----|---|
| 1 | $w_{(l)}^{0-1} = w_{(0)}^{1-2}$ |
| 2 | $\varphi_{(l)}^{0-1} = \varphi_{(0)}^{1-2}$ |
| 3 | $M_y^{0-1}(l) = M_{(0)}^{1-2}$ |
| 4 | $Q_z^{0-1}(l) = Q_z^{1-2}(0)$ |
| 5 | $w_{(l)}^{1-2} = w_{(0)}^{2-3}$ |
| 6 | $\varphi_{(l)}^{1-2} = \varphi_{(0)}^{2-3}$ |
| 7 | $M_y^{1-2}(l) = M_{(0)}^{2-3}$ |
| 8 | $Q_z^{1-2}(l) = Q_{(0)}^{2-3}$ |
| 9 | $w_{(l)}^{2-3} = 0$ |
| 10 | $\varphi_{(l)}^{2-3}(l)$ |
| 11 | $M_{(l)}^{2-3} = 0$ |
| 12 | $Q_z^{2-3}(l)$ |

$$\mathbf{Y} = \quad (27)$$

Из матрицы X_* следует, что в матрице A_* нужно обнулить 1 и 3 столбцы и ввести компенсирующие элементы $A(10,1) = -1$; $A(12,3) = -1$. Другие компенсирующие элементы, связанные с равенствами

кинематических и статических параметров во внутренних точках балки, образуют диагональ из (-1). Матрица уравнения для критической нагрузки (10) в этом случае примет вид:

$$\mathbf{A}_* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} l^{0-1} & & & -A_{44}/EI_y & -1 & & & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & & -A_{43}/EI_y & & -1 & & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & A_{23} & & & -1 & & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & A_{33} & & & & -1 & & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & 1 & l^{1-2} & -A_{43}/EI_y & -A_{44}/EI_y & -1 & & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & & 1 & -A_{23}/EI_y & -A_{43}/EI_y & & -1 & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & & & A_{33} & A_{23} & & & -1 & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & & & A_{43} & A_{33} & & & & & -1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & & & & & 1 & l^{2-3} & -A_{43}/EI_y & -A_{44}/EI_y & \end{matrix} \\ \begin{matrix} -1 & & & & & & & & & 1 & -A_{23}/EI_y & -A_{43}/EI_y & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & & & & & & & A_{33} & A_{23} & \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & -1 & & & & & & & A_{43} & A_{33} & \end{matrix} \end{matrix} \quad (28)$$

Для упрощения уравнений стыковки участков (см. матрицу \mathbf{Y} (27)) в матрицу \mathbf{A}_* введены жесткости EI_y . Малое число участков балки приводит к грубой аппроксимации функции $M_z(x)$ и критические значения получается неточными. При увеличении числа участков m можно определить граничное его значение, при котором уточнение критических

сил не происходит. Матрица \mathbf{A}_* имеет при этом соответствующий размер. Рассмотрим тестовый пример.

Задача 5. Балка с шарнирным опиранием в двух плоскостях, нагруженная сосредоточенной силой F . Используется матрица \mathbf{A}_* (28) при $m=50$. Результаты решения сведены в таблицу 1

Таблица 1 – Критические силы при изменении координат силы F

| Координата силы F | 0,1l | 0,2l | 0,3l | 0,4l | 0,5l |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| МГЭ | 56,03 | 29,12 | 21,01 | 17,83 | 16,95 |
| Данные [2] | 56,01 | 29,11 | 21,01 | 17,82 | 16,94 |
| Погрешность % | 0,04 | 0,03 | 0,0 | 0,06 | 0,06 |

Задача 6. Балка с шарнирным опиранием в вертикальной плоскости xOy и заделками, в горизонтальной плоскости xOz , нагруженная сосредоточенной силой F . В матрице \mathbf{A}_* (28) нужно обнулить 1, 2 и 5 столбцы и ввести. Вычисления критических сил показывают, что при $m \geq 30$ их уточнение практически заканчивается. Результаты данной задачи при

$m = 50$ и полным решением (23) сведены в таблицу 2.

Задача 7. Балка с различными граничными условиями, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой. Применив предлагаемый алгоритм МГЭ, результаты решения сведены в таблицу № 3

Таблица 2 – Критические силы задачи 6

| | | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Координата силы F | 0,1l | 0,2l | 0,3l | 0,4l | 0,5l |
| МГЭ | 88,45 | 45,96 | 33,21 | 28,20 | 26,79 |
| Данные [2] | 177 | 53,2 | 35,2 | 28,5 | 26,7 |
| Погрешность % | 24,40 | 13,60 | 5,66 | 1,07 | 0,32 |

Таблица 3 – Критические силы при действии равномерно распределенной нагрузки

| | | | |
|--|-------|------------|---------------|
| Краевые условия опирания | МГЭ | Данные [2] | Погрешность % |
| Шарнирное опирание в двух плоскостях | 28,32 | 28,31 | 0,03 |
| Шарнирное опирание в пл. xOy; шарнирное опирание и заделка в пл. xOz | 39,77 | 39,6 | 0,44 |
| Шарнирное опирание в пл. xOy; заделка в пл. xOz | 44,79 | 48,6 | 7,84 |

Задача 8. Балка с различными граничными условиями, нагруженная сосредоточенным моментом. В справочных данных [2, 3] приведены результаты решения задач устойчивости балок с охватом возможных условий опирания при действии распределенной нагрузки по всей длине и сосредоточенных сил. Отсутствуют задачи, когда сосредоточенный момент находится в пролете балок. Здесь

необходимо учитывать разрыв 1-го рода в функции изгибающего момента $M_z(x)$. По видимому сложности с учетом этого фактора и повлияли на отсутствие решений этих задач. В алгоритме МГЭ эти трудности снимаются. В таблице 4 представлены результаты для критических значений сосредоточенных моментов при $m = 50$.

Таблица 4 – Критические моменты балок, нагруженные сосредоточенным моментом

| | | | | | | | | | | |
|--|---|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| Краевые условия опирания | Координата сосредоточенного момента M | | | | | | | | | |
| | 0,0l | 0,1l | 0,2l | 0,3l | 0,4l | 0,5l | 0,6l | 0,7l | 0,8l | 0,9l |
| Шарнирное опирание в двух плоскостях | 5,56 | 5,65 | 6,09 | 6,88 | 7,91 | 8,49 | 7,91 | 6,88 | 6,09 | 5,65 |
| Шарнирное опирание в пл. xOy; шарнирное опирание и заделка в пл. xOz | 6,51 | 6,83 | 7,51 | 8,88 | 10,70 | 11,72 | 10,99 | 10,21 | 9,57 | 8,93 |
| Шарнирное опирание в пл. xOy; Заделки в пл. xOz | 8,79 | 8,93 | 9,57 | 10,84 | 12,46 | 13,39 | 12,46 | 10,84 | 9,57 | 8,93 |

Здесь следует сделать замечание, что данные таблицы 4 приближенно отражают критические значения моментов. Связано это с тем, что дифференциальные уравнения (2) и их решения (7), (22), (23) нечувствительны к знаку изгибающего момента $M_z(x)$. Поэтому задача 8

решена при положительных значениях изгибающего момента M_z . Точное решение можно получить, если использовать дифференциальное уравнение (1) и соответствующую систему фундаментальных

ортонормированных функций [4], которая как раз и учитывает знак $M_z(x)$.

Задача 9. Консольная балка имеет высоту сечения, меняющуюся по закону

$$h = h_0(1 - x/l)^{1/\kappa} \quad (29)$$

Балка также дискретизируется на m частей. Для каждой части вычисляются изгибающий момент M_{zi} при расширенной нагрузке q в

точке с координатой $x = x_i/\sqrt{3}$, где x_i – длина i -го участка балки; при сосредоточенной силе – $x = x_i/2$ [4]. Жесткость при изгибе EI_{yi} и кручении GI_{di} вычислялись в середине каждого участка. В остальном алгоритм не меняется. Результаты решения при $m = 0$ приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Критические нагрузки консольной балки с переменной высотой

| Способ нагружения | | К | | | |
|---|----------------|-------|-------|-------|-------|
| | | 4 | 2 | 1,333 | 1 |
| Равномерно распределенная нагрузка q | МГЭ | 18,14 | 15,81 | 13,68 | 11,43 |
| | Данные [2] | 12,8 | 11,2 | 10,4 | 9,6 |
| | Погрешность, % | 41,72 | 41,16 | 31,54 | 19,06 |
| Сосредоточенная нагрузка F в середине пролета | МГЭ | 5,26 | 4,13 | 3,01 | 1,93 |
| | Данные [2] | 3,61 | 3,21 | 2,81 | 2,40 |
| | Погрешность, % | 45,71 | 28,66 | 7,12 | 19,58 |

В качестве иллюстрации и сравнения с данными таблицы 5, в таблице 6 приведены критические нагрузки такой же балки, по

имеющей шарнирное опирание в двух плоскостях.

Таблица 6 – Критические нагрузки шарнирно опертой балки с переменной высотой

| Способ нагружения | | К | | | |
|---|--|-------|-------|-------|-------|
| | | 4 | 2 | 1,333 | 1 |
| Равномерно распределенная нагрузка q | | 23,32 | 18,82 | 14,76 | 11,19 |
| Сосредоточенная нагрузка F в середине пролета | | 14,07 | 11,48 | 9,28 | 7,27 |

Выводы

Представленные задачи устойчивости плоской формы изгиба балок с сечением в виде узкой полосы показывает, что модель (7), (23) и алгоритм численно-аналитического варианта МГЭ позволяют получить точные и достоверные результаты при постоянных и переменных значениях изгибающего момента M_z и жесткостей EI_y , GI_d . Могут быть учтены произвольная внешняя нагрузка, множество законов изменения момента M_z , точек излома и разрыва 1-го рода. Не представляет трудностей применение предложенного подхода для решения задач устойчивости более сложных конструкций типа неразрезных балок и рам [4].

Список использованных источников

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни/ В. З. Власов. – М. –Л. Физматиз, 1959 – 568 с.

2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах/ Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановно. – М.: Машиностроение, 1968. – Т.3. – 569 с.

3. Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений/ А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

4. Дашенко А. Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов/ А. Ф. Дашенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов. – Одесса: ВМВ, 2010. – Т.1. – 416 с.

5. Баженов В. А. Строительная механика. Специальный курс. Применение МГЭ/ В. А. Баженов, А. Ф. Дашенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.

6. Оробей В. Ф. Метод граничных элементов в задачах с неустойчивыми решениями / В. Ф. Оробей, А. Ф. Дашенко,

А. М. Лимаренко // Пр. Одес. політехн. ун-ту. – Одеса, 2013. Вып.2(41). – С. 27 – 31.

Науково-виробничий журнал Проблеми техніки – Одесса 2009. – С. 114 – 123.

7. Оробей В. Ф. Расчет арок на устойчивость методом граничных элементов / В. Ф. Оробей, А. Ф. Дащенко, А. М. Лимаренко. Одеський національний морський університет, Хмельницький національний університет,

Надійшла до редакції 24.10.2015

Рецензент: д.т.н., проф. Усов А. В., Одеський національний політехнічний університет, г. Одесса.

В. Ф. Оробей, д.т.н., А. Ф. Дащенко, д.т.н., Л. В. Коломиец, д.т.н., А. М. Лимаренко, к.т.н.

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ ПЛОСКОЇ ФОРМИ ВИГИНУ БАЛОК ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ

Представлено алгоритм розв'язання задач стійкості плоскої форми вигину балок прямокутного перерізу (тонкої смуги) за допомогою чисельно-аналітичного варіанта методу граничних елементів. Метою роботи є побудова нових рішень диференціальних рівнянь задач стійкості. Балки з перерізами у вигляді вузької смуги мають більш високу міцність і жорсткість, однак, при поперечному навантаженні, виникає небезпека втрати стійкості плоскої форми вигину. У цьому випадку балка додатково згинається в іншій площині і закручується. Виникає згинально-крутильна форма втрати стійкості, при якій з'являються великі переміщення і може настати руйнування конструкції. Теорія вирішення подібних завдань потребує розвитку, тому існуючі результати вельми складно поширити на нерозрізні балки і рами. Метод граничних елементів дозволяє істотно спростити процес рішення, підвищити точність і достовірність результатів і поширити отримані рішення на більш складні конструкції, ніж просто балки. Розрахунки критичних сил виконані в середовищі MATLAB.

Ключові слова: метод граничних елементів, стійкість плоскої форми вигину, балки прямокутного перерізу, MATLAB.

V. F. Orobey, ScD, A. F. Dashchenko, ScD, L. V. Kolomiets, ScD, A. M. Lymarenko, PhD.

METHOD OF BOUNDARY ELEMENT IN PROBLEMS OF STABILITY OF PLANE BENDING BEAMS OF RECTANGULAR CROSS SECTION.

An algorithm for solving problems of stability plane bending beams of rectangular section (thin strips) with the help of numerical and analytical variant of the method of boundary elements. The aim is to build new solutions of differential equations of stability problems. Beams with sections in the form of narrow strips have higher strength and stiffness, however, when the transverse load, there is a risk of loss of stability plane bending. In this case, the beam is further bent in another plane and twists. There flexural-torsional buckling, in which there are large displacements and structural failure may occur. The theory of solving such problems needs to be developed, as current results are very difficult to extend to continuous beams and frames. The boundary element method can greatly simplify the process of decisions to improve the accuracy and reliability of the results obtained and disseminate solutions to more complex structure than a beam. Calculations are made of the critical forces in MATLAB environment.

Keywords: boundary element method, the stability of plane bending, rectangular beam, MATLAB.

УДК 681.2.089

Н. В. Глухова, к.т.н.

ДВНЗ «Національний гірничий університет», м. Дніпропетровськ

СПОСОБИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТРОЛОГІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАНАЛІВ РЕЄСТРАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

У роботі розглянуто існуючі проблеми створення метрологічного забезпечення при реєстрації вимірювальної інформації у вигляді візуальних даних. Виконаний аналіз джерел невизначеності при реєстрації, обробці та аналізі аналогових і цифрових зображень газорозрядного випромінювання. Запропоновано способи калібрування вимірювальних каналів, призначених для реєстрації, перетво-