УДК 539.3

V. F. Orobey[1], DSc, **A. F. Dashchenko**[1], DSc, **L. V. Kolomiets**[2], DSc, **A. M. Limarenko**[1], PhD

[1]*Odesa National Polytechnic University, Odesa*
[2]*Odesa State Academy of Technical Regulation and Quality, Odesa*

STABILITY OF COMPRESSED RODS WITH VARIABLE RIGIDITY

The problems of stability of compressed rods with continuous resizing of the cross sections in different directions are considered. Such structures include columns, chimneys, various supports, TV and radio towers, towers, parts of cranes, machines and mechanisms, various shafts and axles. It is shown that these problems are reduced to boundary problems for ordinary differential equations with variable coefficients. It is noted that analytical solutions of such equations cause the serious mathematical difficulties. For this reason, there are few cases of solving similar problems of stability of compressed rods in a closed form. In this regard, it was proposed to simplify significantly the algorithms for solving boundary problems for differential equations with variable coefficients based on the theory of a numerical-analytical version of the boundary element method that was developed in the writings of the authors of this work. For the application of technology of the boundary element method rods with variable rigidity are divided into a number of sections with constant rigidity and in such case matrices of the fundamental functions of differential equations with constant coefficients can be used. When the number of plots is more than 50, the solution of problems of stability converges to exact values. This conclusion is confirmed by the given examples of solutions of problems of stability with different boundary conditions.

Keywords: *stability of rods with variable rigidity, differential equations with variable coefficients, fundamental functions, boundary problems, MATLAB environment.*

В. Ф. Оробей, д.т.н., **О. Ф. Дащенко,** д.т.н., **Л. В. Коломієць,** д.т.н., **О. М. Лимаренко,** к.т.н.

СТІЙКІСТЬ СТИСНЕНИХ ПРУТІВ ЗІ ЗМІННОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Розглядаються проблеми стійкості стиснутих прутів з безперервною зміною розміру поперечних перерізів в різних напрямках. Такі структури включають колони, димоходи, різні опори, телевізійні та радіо башти, вежі, частини кранів, машин та механізмів, різні вали та осі. Показано, що ці задачі зводяться до граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Відзначено, що аналітичні рішення таких рівнянь викликають серйозні математичні труднощі. З цієї причини є кілька випадків вирішення аналогічних проблем стабільності стиснутих прутів у замкнутій формі. У зв'язку з цим було запропоновано значно спростити алгоритми вирішення крайових задач для диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами на основі теорії чисельно-аналітичної версії методу граничних елементів, розробленої в працях авторів цієї роботи. Для застосування технології методу граничних елементів стержні зі змінною жорсткістю поділяються на ряд секцій з постійною жорсткістю, і в цьому випадку можуть бути використані матриці фундаментальних функцій диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Коли кількість ділянок більше 50, рішення завдань стабільності збігається до точних значень. Цей висновок підтверджується наданими прикладами рішень задач стабільності з різними граничними умовами.

Ключові слова: *стійкість стержнів зі змінною жорсткістю, диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, фундаментальні функції, крайові задачі, середовище MATLAB.*

В. Ф. Оробей, д.т.н., **А. Ф. Дащенко,** д.т.н., **Л. В. Коломієць,** д.т.н., **А. М. Лимаренко,** к.т.н.

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ПРУТЬЕВ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Рассмотрены проблемы устойчивости сжатых стержней с непрерывным изменением размеров сечений в разных направлениях. К таким конструкциям относятся колонны, дымоходы, различные опоры, телевизионные и радиовышки, башни, детали кранов, машин и механизмов, различные валы и оси. Показано, что эти задачи сводятся к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Отмечено, что аналитические решения таких уравнений вызывают серьезные математические трудности. По этой причине мало случаев решения по-

добных проблем устойчивости сжатых стержней в замкнутом виде. В связи с этим было предложено существенно упростить алгоритмы решения краевых задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на основе теории численно-аналитического варианта метода граничных элементов, разработанного в трудах авторов данной работы. Для применения технологии метода граничных элементов стержни с переменной жесткостью делятся на ряд секций с постоянной жесткостью, и в этом случае могут использоваться матрицы основных функций дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Когда число участков больше 50, решение проблем устойчивости сходится к точным значениям. Этот вывод подтверждается приведенными примерами решения задач устойчивости с различными граничными условиями.

Ключевые слова: *устойчивость стержней с переменной жесткостью, дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, фундаментальные функции, краевые задачи, среда MATLAB.*

DOI 10.32684/2412-5288-2018-2-13-14-20

Problem statement

The problems of stability in the Euler formulation, when the beam dimensions and the compressive force change, are reduced to boundary problems for ordinary differential equations with variable coefficients [1]

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2}\right]+\frac{d}{dx}\left[N(x)\frac{d\vartheta(x)}{dx}\right]=0, \tag{1}$$

where $EI(x)$ is the function of flexural (minimum) rigidity, kNm^2;

$\vartheta(x)$ is transverse deflection, m;

$N(x)$ is the function of compressive force in beam section, kN.

The analytical solution of even such a relatively simple equation causes serious mathematical difficulties. In this case, it is necessary to apply the numerical methods, for example FEM. This raises questions about the accuracy and reliability of the results. Therefore, the problem of the development of new approaches to solving this and similar tasks remains relevant.

Analysis of researches and publications

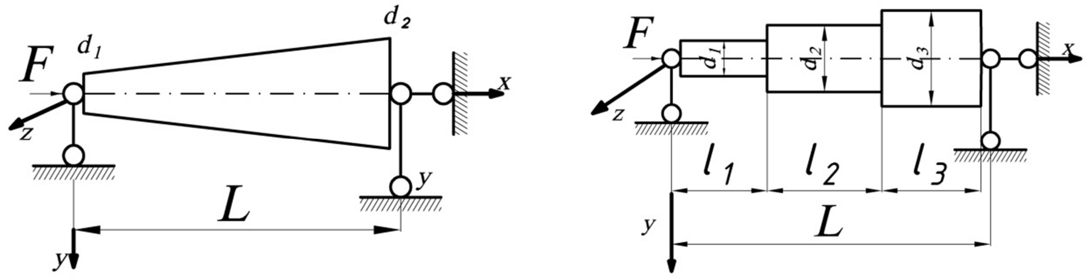
The solution of boundary problems for differential equations with variable coefficients attracts researchers by its complexity and a wide practical application. The numerical-analytical version of boundary element method (BEM) that was developed in the works of prof. Orobey V. F. can be successfully applied to solving differential equations with variable coefficients. [1-13]. However, in these works, rods, in which the section change was performed only in one direction, were considered. It's not exactly the general case. At the same time, in the scientific literature mathematical approaches to reflect changes in the dimensions of section in all directions (for example, a cone) are presented [14-15]. In this regard, we will present the opportunities of BEM for such cases.

The purpose of the research

The purpose of this research is numerical-analytical of BEM version to solving problems of beam stability having the shape of a truncated cone.

Presentation of basic material of the research

Since it is not possible to solve equation (1) analytically, we can propose an approximate approach that simplifies the task. It is obvious that continuous change of cross section dimensions and other rod's parameters can be approximately simulate by a stepped dependence (Fig. 1)



a b

Figure 1 – Modeling of a truncated cone by a stepped system

Such a replacement is very convenient because at each beam section the change in section dimensions (and other parameters) disappears and equations with variable coefficients are automatically reduced to equations with constant coefficients, which solutions exist and they are the only ones (Cauchy problems). Remains only to use the method that will most effectively cope with the calculation task of discretized system. The methods of initial parameters, displacements, finite elements, etc. can be applied. In our opinion, the numerical-analytical version of the boundary element method [6, 9, 10, 11, 13] is most suitable here. The essence of this method comes down to elementary transformations of matrices of calculated ratios at the boundary value $x=l_i$ each system's element according to the scheme

$$\mathbf{Y}(l) = \mathbf{A}(l) \cdot \mathbf{X}(0) + \mathbf{B}(l) \rightarrow \mathbf{A}(l) \cdot \mathbf{X}(0) - \mathbf{Y}(l) = -\mathbf{B}(l) \rightarrow \mathbf{A}_*(l) \cdot \mathbf{X}_*(0,l) = -\mathbf{B}(l)\,, \qquad (2)$$

where $\mathbf{Y}(l)$ is state parameter vector of all rods system in the boundary sections $x=l_i$, $i=1,n$;

$\mathbf{A}(l)$ is quasi-diagonal matrix of fundamental functions at $x=l_i$, $i=1,n$;

$\mathbf{X}(0)$ is vector of initial parameters of all rods system;

$\mathbf{B}(l)$ is external load vector at $x=l_i$, $i=1,n$;

n is number of elements in the system.

As a result of parameter transfer from $\mathbf{Y}(l)$ to $\mathbf{X}(0)$ is a system of linear algebraic equations obtained. If it is required to solve eigenvalue problems, then $\mathbf{B}(l) = 0$ and at $\mathbf{X}_*(0,l) \neq 0$, the transcendental equation is obtained to search for critical forces or natural frequencies in the form of a determinant

$$\left|\mathbf{A}_*\left(l, F_{кр}, \omega\right)\right| = 0. \qquad (3)$$

By setting the interval for $F_{\text{кр}}$ or ω, you can always find your own values [1-13]. The matrix $\mathbf{A}_*(l, F_{\text{кр}}, \omega)$ has many remarkable properties:

1. Strong discharged matrix doesn't lead to a significant accumulation of rounding errors from arithmetic operations;

2. It is certainly scaled, that is, its elements smoothly decrease in size from left to right along the secondary diagonal. This property causes the high stability of numerical operations when solving the system of equations (2) or when calculating the determinant;

3. When $x=0$, it forms the identity matrix;

4. In problems of stability and dynamics, it doesn't contain breaking points of the 2nd kind;

5. Is formed without matrix operations of addition, multiplication and inversion. Quasidiagonalization operation is only used.

All these advantages allow us to have the simplest algorithm for solving various boundary problems, which is characterized by high accuracy results. Let us present the BEM algorithm using the examples of the truncated cone stability problems reviewed in the works [14, 15]. The stability equation for the discretized scheme in Fig. 1, b and the i-th segment will take the form:

$$EI_i \frac{d^4\vartheta(x)}{dx^4} + F\frac{d^2\vartheta(x)}{dx^2} = 0\,. \qquad (4)$$

The matrix of fundamental orthonormal functions for this equation is known, and has the form:

$\mathbf{A}_i =$ (5)

	1	2	3	4
1	1	A_{12}	$-A_{13}/EI_i$	$-A_{14}/EI_i$
2		A_{22}	$-A_{12}/EI_i$	$-A_{13}/EI_i$
3		$-A_{32}\cdot EI_i \cdot EI_i$	A_{22}	A_{12}
4				1

where

$$A_{12} = \frac{\sin(t_i x)}{t_i};\; A_{13} = \frac{1-\cos(t_i x)}{t_i^2};\; A_{14} = \frac{t_i x - \sin(t_i x)}{t_i^3};$$

$$A_{22} = \cos(t_i x)\,;\; A_{32} = \sin(t_i x)\,;\; t_i = \sqrt{F/EI_i} \qquad (6)$$

Rigidity parameters entered into matrix $\mathbf{A}_i$ for more simple fulfillment of the conditions of connection plots in the internal points of the beam. Values EI_i are most easily calculated in the middle of each plot. The cross section of the cone is a circle, and the diameter varies according to the law (Fig. 1, a):

$$d(x) = d_1(a + bx^k), \qquad (7)$$

where a, b are coefficients;

k is exponent.

The matrix $A_*(l,\mathrm{F})$ of equation (3) is formed in the following way. Let n = 3 (Fig. 1b). The matrices of initial and final parameters of the discretized beam are compiled. They take into account the boundary conditions of the bearing and the conditions for the continuity of the parameters of bending at the internal points.

$$\mathbf{X}_*= \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline V_{(0)}^{1-2}=0;\ \varphi_{(l)}^{3-4} \\ \hline \varphi_{(0)}^{1-2} \\ \hline M_{(0)}^{1-2}=0;\ Q_{(l)}^{3-4} \\ \hline Q_{(0)}^{1-2} \\ \hline V_{(0)}^{2-3} \\ \hline \varphi_{(0)}^{2-3} \\ \hline M_{(0)}^{2-3} \\ \hline Q_{(0)}^{2-3} \\ \hline V_{(0)}^{3-4} \\ \hline \varphi_{(0)}^{3-4} \\ \hline M_{(0)}^{3-4} \\ \hline Q_{(0)}^{3-4} \\ \hline \end{array} \qquad \mathbf{Y}= \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline V_{(l)}^{1-2}=V_{(0)}^{2-3} \\ \hline \varphi_{(l)}^{1-2}=\varphi_{(0)}^{2-3} \\ \hline M_{(l)}^{1-2}=M_{(0)}^{2-3} \\ \hline Q_{(l)}^{1-2}=Q_{(0)}^{2-3} \\ \hline V_{(l)}^{2-3}=V_{(0)}^{3-4} \\ \hline \varphi_{(l)}^{2-3}=\varphi_{(0)}^{3-4} \\ \hline M_{(l)}^{2-3}=M_{(0)}^{3-4} \\ \hline Q_{(l)}^{2-3}=Q_{(0)}^{3-4} \\ \hline V_{(l)}^{3-4}=0 \\ \hline \varphi_{(l)}^{3-4} \\ \hline M_{(l)}^{3-4}=0 \\ \hline Q_{(l)}^{3-4} \\ \hline \end{array} \qquad (8)$$

From the matrix $\mathbf{X}_*$ it follows that in the matrix $\mathbf{A}_*$ you need to reset 1 and 3 columns. Into place of the zero parameters of the matrix $\mathbf{X}_*$ carry the independent matrix Y parameters. The dependent matrix Y parameters are transferred according to the equations of their connection. As a result, the matrix $\mathbf{A}_*$ is supplemented with compensating elements. The beam stability matrix will look like:

$\mathrm{A}_*=$ (9)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		A_{12}		$-A_{14}/EI_1$	-1							
2		A_{22}		$-A_{13}/EI_1$		-1						
3		$-A_{32}EI_1$		A_{12}			-1					
4				1				-1				
5					1	A_{12}	$-A_{12}/EI_2$	$-A_{14}/EI_2$	-1			
6						A_{22}	$-A_{12}/EI_2$	$-A_{13}/EI_2$		-1		
7						$-A_{32}EI_2$	A_{22}	A_{22}			-1	
8								1				-1
9									1	A_{12}	$-A_{13}/EI_3$	$-A_{14}/EI_3$
10	-1									A_{22}	$-A_{12}/EI_3$	$-A_{13}/EI_3$
11										$-A_{32}EI_3$	A_{22}	A_{12}
12			-1									1

Matrix equations (3) are similarly formed for beams with other support conditions. From equation (3) by the search method you can determine the critical forces that are provided in the form:

$$F_{\text{кр}}=\frac{\lambda^2 EI_{min}}{l^2}=\frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} \qquad (10)$$

where λ is dimensionless critical force parameter;

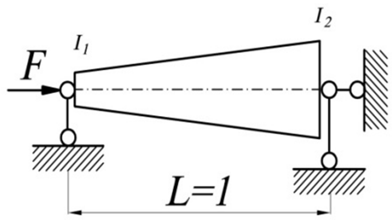
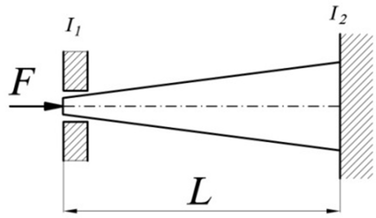
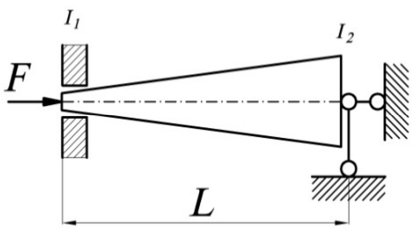
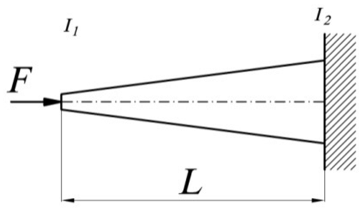
μ is effective length factor.

There is dependendence between λ and μ.

$$\lambda\mu = \pi \tag{11}$$

The practice of solving problems with variable coefficients shows that the results are almost accurate even with the number of plots $n \geq 30$ [1–13]. For the problems of works [14, 15] the matrix $\mathbf{A}_*$ was formed automatically according to the program in the MATLAB environment with $n = 50$. Table 1 presents the parameters λ for the first three critical forces of various cone-shaped beams with a a=1; b=0,01; k=1; L=1.

Table 1 – The first three parameters of critical forces

Parameter λ		
λ1	3,1729	6,3474
λ2	6,3463	9,0664
λ3	9,5210	12,6886
Parameter λ		
λ1	4,5378	1,5931
λ2	7,8023	4,7611
λ3	11,0157	7,9346

The data in Table 1 can be compared with the results of work [14, 15]. Using the Green function allowed us to obtain an accurate result for λ1 with hinged support [14]

$$\lambda 1 = 3{,}17 \tag{12}$$

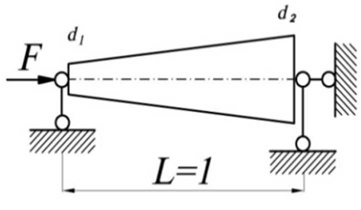
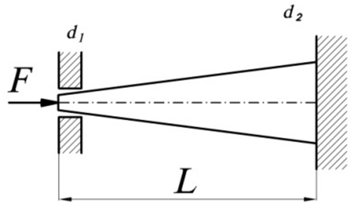
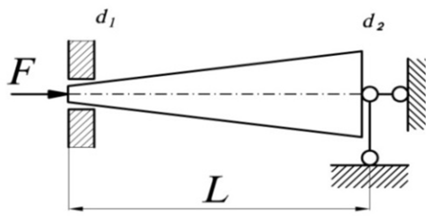
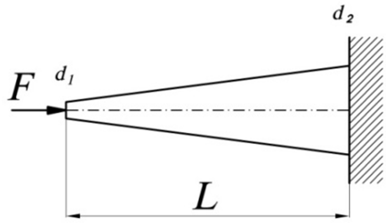
It can be seen that the BEM results and works [14] coincide. Using the integral equations, the approximate value λ1 = 3.11 was obtained in the work [15]. Although this result is little different from the accurate result but it is unreliable. The value of λ1 for a cone-shaped beam must be greater than π. Table 2 presents the parameter values λ1 depending on the diameter ratio of the cone-shaped beams with a=1; L=1; k=1.

The table 2 shows that with a smooth change in the transverse dimensions of the rod it is possible to significantly increase the critical forces of such structures as columns, chimneys, various supports, TV and radio towers, towers.

Conclusions

The analysis of the presented material shows that the method of calculating the beam stability with distributed parameters, based on BEM, allows you to solve effectively, accurately and reliably the complex problems, which don ‘t have an analytical solution. In particular, for cone-shaped (also pyramid-shaped) beams, it is not necessary to form a rather cumbersome Green function [14] or to solve the integral equations [15]. In BEM it is sufficient to use only the system of fundamental orthonormal functions of the corresponding differential equation with constant coefficients. An additional advantage is the minimum requirements for variable coefficients of the differential equation. They can have breaks of the 1-st kind, break points, and an arbitraty set of continuous functions [1–13], which significantly expands the range of the solvable problems not only in the stability theory, but also in other sciences.

Table 2 – Parameters λ1 when changing the diameter ratios of cross section

—	b		
2	1	6,2817	12,5658
3	2	9,4207	18,8627
4	3	12,5579	25,1635
5	4	15,6908	31,4722
6	5	18,8175	37,7929
—	b		
2	1	8,9833	4,0583
3	2	13,4870	6,8630
4	3	17,9917	9,8194
5	4	22,4967	12,8452
6	5	27,0185	15,9060

References

1. Orobej V. F. Ustojchivost' balok s raspredelennymi parametrami [Stability of beams with distributed parameters] / V. F. Orobej, G. V. Kostrova. – Pratsi Odesk. politekhn. un-tu. – Odesa, 2011. – Vyp. 1(35) – S. 15–23.
2. Orobej, V. F. Chislenno-analiticheskoe reshenie kraevyh zadach dlja sistem obyknoven-nyh differencial'nyh uravnenij s peremen-nymi kojefficientami [A numerical-analytical solution of boundary value problems for systems of ordinary differential equations with variable coefficients] / V. F. Orobej, G. V. Kostrova. – Trudy Odessk. politehn.un–ta. – Odessa, 2007. – Vyp. 1(27). – S. 23–30.
3. Orobej, V. F. Reshenie zadachi ustojchivosti ploskoj formy izgiba tonkostennyh sterzhnevyh sistem metodom granichnyh jelementov [Solution of the problem of stability of a flat shape of bending of thin-walled rod systems by the method of boundary elements] / V. F. Orobej, G. V. Kostrova. – Trudy Odessk. politehn. un-ta. – Odessa, 2007. – Vyp. 2(28). – S. 8–24.
4. Orobej, V. F. Metod granichnyh jelementov v zadachah ustojchivosti arok [Boundary-element method in archs' stability problems] / V. F. Orobej, G. V. Kostrova, V. N. Purich. – Trudy Odessk. politehn. un-ta. – Odessa, 2009. – Vyp. 1(31). – S. 7–14.
5. Orobej V. F. Raschet staticheski neopredelimyh balok s raspredelennymi parametrami / V. F. Orobej, I. B. Korneeva, D. O. Bondarenko. – Visnyk Odeskoi derzhavn. akademii budivn. ta arkhitekt. – Odesa, 2009. – Vip. 36. – S. 322–328.
6. Dashhenko A. F. Chislenno-analiticheskij metod granichnyh jelementov [Numerical-analytical method of boundary elements] / A. F. Dashhenko, L. V. Kolomiec, V. F. Orobej, N. G. Sur'janinov. – Odessa: VMV, 2010. – T.1. – 415 s. – T.2. – 510 s.
7. Orobej V. F. Ustojchivost' ploskoj formy izgiba tonkostennyh sterzhnevyh sistem [Stability of the flat form of bending thin-walled core systems] / V. F. Orobej, A. F.Chumak // Prikladnaja mehanika. – Kiev: Institut mehaniki NAN Ukrainy, 2009. – T. 45. – № 5. – S. 110–123.
8. Orobej V. F. Kolebanija balok s peremennoj zhestkost'ju [Vibrations of beams with variable stsffness] / V. F. Orobej, K. S. Tymanjuk // Trudy Odessk. politehn. un–ta. – Odessa, 2010. – Vyp. 1(33) – 2(34). – S. 16–22.
9. Dashhenko A. F. MATLAB v mehanike deformiruemogo tverdogo tela [MATLAB in the mechanics of a deformable solid] / A. F. Dashhenko, V. F. Orobej, N. G. Sur'janinov. – Har'kov: «Burun kniga», 2011. – 480 s.
10. Orobej V. F. Praktikum po metodam reshenie kraevyh zadach [Workshop on methods for solving boundary value problems] / V. F. Orobej, N. G. Sur'janinov. – Odessa: Astroprint, 2011. – 408 s.
11. Dorofeev V. S. Novye metody rascheta sistem s diskretno-nepreryvnym raspredeleniem

parametrov [New methods for calculating systems with discrete-continuous distribution of parameters] / V. S. Dorofeev, A. V. Kovrov, Ju. S. Krutij, V. F. Orobej, N. G. Sur'janinov, R. M. Tacij, T. I. Ushak. – Odessa: Jeven, 2012. – 378 s.

12.Orobej V. F. Metod granichnyh jelementov v zadachah ustojchivosti ploskoj formy izgiba balok prjamougol'nogo sechenija [Method of boundary element in problems of stability of plane bending beams of rectangular cross section] / V. F. Orobej, A. F. Dashhenko, L. V. Kolomiec, A. M. Limarenko. // Zbìrnik naukovih prac' Odes'koï deržavnoï akademiï tehnìčnogo regulûvannâ ta âkostì. – Odesa, 2015. – Vyp. 2(7). – S. 47–54.

13.Orobej V. F. Metod granichnyh jelementov v zadachah rascheta mashinostroitel'nyh konstrukcij [The method of boundary elements in the problems of calculating engineering structures] / V. F. Orobej, A. Aniskin, A. F. Dashhenko, L. V. Kolomiec, A. M. Limarenko, B. Soldo. – Odessa: «Aprel'», 2016. – 761 s.

14. Bogacheva V. E. Funkcija Grina i zadacha na sobstvennye znachenija [Green's function and eigenvalue problem] / V. E. Bogacheva, I. N. Beljaeva, N. A. Chekanova, B. M. Bashkatov, N. N. Chekanova, I. S. Kuznecova. – Visnyk Khersonskoho nats. tekhnichn. un–tu. – Kherson, 2016. – № 3(58). – S. 15–19.

15. Mihlin S. G. Prilozhenie integral'-nyh uravnenij k nekotorym problemam mehaniki, matematicheskoj fiziki i tehniki [Application of integral equations to some problems of mechanics, mathematical physics and engineering] / S. G. Mihlin. – M. –L.: OGIZ tehn.–teor. lit., 1947. – 304 s.

Список использованных источников

1. Оробей В. Ф. Устойчивость балок с распределенными параметрами / В. Ф. Оробей, Г. В. Кострова. – Праці Одеськ. політехн. ун-ту. – Вип. 1(35) – Одеса, 2011. – С. 15–23.

2. Оробей, В. Ф. Численно-аналитическое решение краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами / В. Ф. Оробей, Г. В. Кострова. – Труды Одесск. политехн. ун–та. – Одесса, 2007. – Вып. 1(27). – С. 23–30.

3. Оробей, В. Ф. Решение задачи устойчивости плоской формы изгиба тонкостенных стержневых систем методом граничных элементов / В. Ф. Оробей, Г. В. Кострова. – Труды Одесск. политехн. ун-та. – Одесса, 2007. – Вып. 2(28). – С. 8–24.

4. Оробей, В. Ф. Метод граничных элементов в задачах устойчивости арок / В. Ф. Оробей, Г. В. Кострова, В. Н. Пурич. – Труды Одесск. Политехн. ун-та. – Одесса, 2009. – Вып. 1(31). – С. 7–14.

5. Оробей В. Ф. Расчет статически неопределимых балок с распределенными параметрами / В. Ф. Оробей, И. Б. Корнеева, Д. О.Бондаренко. – Вісник Одеської державн. академії будівн. та архітект. – Одеса, 2009. – Вип. 36. – С. 322–328.

6. Дащенко А. Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А. Ф. Дащенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов. – Одесса: ВМВ, 2010.–Т.1. – 415 с.–Т.2. – 510 с.

7. Оробей В. Ф. Устойчивость плоской формы изгиба тонкостенных стержневых систем / В. Ф. Оробей, А. Ф.Чумак // Прикладная механика. – Киев: Институт механики НАН Украины, 2009. – Т. 45. – № 5. – С. 110–123.

8. Оробей В. Ф. Колебания балок с переменной жесткостью / В. Ф. Оробей, К. С. Тыманюк // Труды Одесск. политехн. ун–та. – Одесса, 2010. – Вып. 1(33) – 2(34). – С. 16–22.

9. Дащенко А. Ф. MATLAB в механике деформируемого твердого тела / А. Ф. Дащенко, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов. – Харьков: «Бурун книга», 2011. – 480 с.

10.Оробей В. Ф. Практикум по методам решение краевых задач / В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов. – Одесса: Астропринт, 2011. – 408 с.

11. Дорофеев В. С. Новые методы расчета систем с дискретно-непрерывным распределением параметров / В. С. Дорофеев, А. В. Ковров, Ю. С. Крутий, В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов, Р. М. Таций, Т. И. Ушак. – Одесса: Эвен, 2012. – 378 с.

12. Оробей В. Ф. Метод граничных элементов в задачах устойчивости плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения / В. Ф. Оробей, А. Ф. Дащенко, Л. В. Коломиец, А. М. Лимаренко. // Збірник наукових праць Одеськ. держ. академії технічного регулювання та якості. – Одеса, 2015. – Вип. 2(7). – С. 47–54.

13. Оробей В. Ф. Метод граничных элементов в задачах расчета машиностроительных конструкций / В. Ф. Оробей, А. Анискин, А. Ф. Дащенко, Л. В. Коломиец, А. М. Лимаренко, Б. Солдо. – Одесса: «Апрель», 2016. – 761 с.

14. Богачева В. Е. Функция Грина и задача на собственные значения / В. Е. Богачева, И. Н. Беляева, Н. А. Чеканова, Б. М. Башкатов, Н. Н. Чеканова, И. С. Кузнецова. – Вісник Херсонського нац. технічн. ун–ту. – Херсон, 2016.– № 3(58). – С. 15–19.

15. Михлин С. Г. Приложение интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники / С. Г. Михлин. – М. –Л.:ОГИЗ техн.–теор. лит., 1947. – 304 с.

Надійшла до редакції 03.12.2018