

УДК 517.958

В. Д. Душкін

**АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ  
Е-ПОЛЯРИЗОВАНИХ ХВИЛЬ НА ПЕРІОДИЧНІЙ ГРЕБІНЦІ З УРАХУВАННЯМ  
ПОВЕРХНЕВОГО ІМПЕДАНСУ СТРУКТУРИ**

*Початкову крайову задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, для чисельного розв'язання яких можна застосувати метод дискретних особливостей.*

**Постановка проблеми.** Аналіз останніх досліджень і публікацій. Гребінка є одним із основних конструктивних елементів багатьох технічних пристроїв та електродинамічних систем [1]. Для аналізу втрат енергії у таких системах актуальна побудова математичних моделей, які дозволяють чисельно досліджувати різноманітні електродинамічні характеристики цих систем [1, 2]. Урахування властивостей матеріалу, з яких зроблено структури, приводить до крайових задач з граничними умовами Щукіна–Леонтовича. Ефективним методом чисельного розв'язання цих задач є метод інтегральних перетворень [3, 4]. З огляду на такий підхід було запропоновано математичну модель задачі на неперіодичній гребінці [5]. У цій статті розглядається задача дифракції на періодичній гребінці (рис. 1).

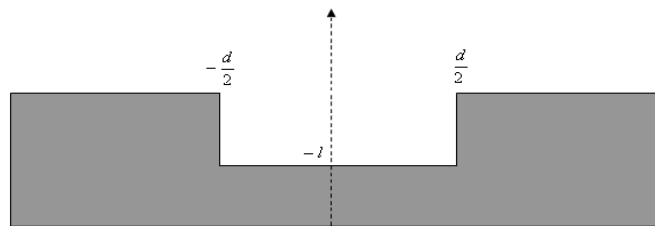


Рис. 1

**Метою статті** є побудова алгоритму чисельного розв'язання задачі, котрий ґрунтується на зведенні розв'язання початкової крайової задачі з граничними умовами третього роду до системи сингулярних рівнянь, яку можна розв'язати за допомогою застосування методу дискретних особливостей.

**Виклад основного матеріалу.** *Математична модель задачі.* Нехай на  $L'$ -періодичну по осі  $OY'$  і однорідну по осі  $OX'$  гребінку падає хвиля:

$$U'_0 = \exp \{ ik(y' \cdot \sin \theta - z' \cdot \cos \theta) \}. \quad (1)$$

Уведемо позначення для компоненти повного поля  $E'_x = U'$ . Необхідно знайти в області  $\Omega$ , яка є частиною простору зовні гребінки, розв'язок рівняння Гельмгольца:

$$\Delta U' + k^2 U' = 0, \quad (2)$$

який задовольняє:

а) імпедансним граничним умовам:

$$\frac{\partial}{\partial n} U' - \hbar_E \cdot U' \Big|_{(y', z') \in \partial \Omega} = 0, \quad (3)$$

де  $\hbar_E = \frac{i\omega\mu_0\mu}{Z_s}$ ;  $\Re(\hbar_E) > 0$ ;  $\Im(\hbar_E) > 0$ ;  $Z_s$  – поверхневий імпеданс матеріалу гребінки;

б) умові на ребрі, яка еквівалентна обмеженості енергії у будь-якій області  $V$  площини  $XOY'$ :

$$W = \int_V \left( k^2 \cdot |U|^2 + |\nabla U|^2 \right) dV; \quad (4)$$

- в) умові випромінювання Зоммерфельда;  
г) умові квазіперіодичності Флоке:

$$U'(y' + L', z') = \exp \{ ikL' \cdot \sin \theta \} \cdot U'(y' + L', z'). \quad (5)$$

Ураховуючи умови Флоке, поле можна шукати лише в шарі шириною  $L'$  по змінній  $y'$ . Для спрощення подальших обчислень уведемо величини:

$$\theta = \frac{d}{\pi}, \quad z = \frac{z'}{\theta} = \frac{z \cdot \pi}{d}, \quad y = \frac{d \cdot y'}{\theta} = \frac{y' \cdot \pi}{d}, \quad (6)$$

$$\kappa = \theta \cdot k, \quad h = \theta \cdot \hbar_E, \quad U(y, z) = U'(y', z'). \quad (7)$$

Функція  $U(y, z)$  задовольняє таким умовам:

$$\Delta U + \kappa^2 U = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} - h \cdot U \Big|_{z_n = -\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial n} + h \cdot U \Big|_{z_n = \frac{\pi}{2}} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} - h \cdot U \Big|_{|y| \leq \frac{\pi}{2}, z = -l} = 0. \quad (10)$$

Подання полів у вигляді рядів Фур'є. Обґрунтування законності такого подання.

Поле в області  $\Omega^+ = \{(y, z) : |y| \leq L \wedge z \geq 0\}$  будемо шукати у вигляді:

$$U(y, z) = U_0(y, z) + U^+(y, z), \quad (11)$$

$$U^0(y, z) = \exp \{ ik(y \cdot \sin \theta - z \cdot \cos \theta) \}, \quad (12)$$

$$U^+(y, z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{\gamma_n + h} \cdot \exp[-i\gamma_n z] \cdot \exp[i(p + \kappa \sin \theta)y], \quad (13)$$

$$p_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad \gamma_n = \sqrt{(p + \kappa \sin \theta)^2 - \kappa^2} = |p| \cdot \sqrt{1 + \frac{2\kappa \sin \theta}{p} - \left(\frac{\kappa \cos \theta}{p}\right)^2}, \quad (14)$$

$$\Re(\gamma_n) \geq 0, \quad \text{Im}(\gamma_n) \leq 0, \quad \gamma_0 = -i\kappa \cos \theta. \quad (15)$$

Поле в області  $\Omega^- = \{(y, z) : |y| \leq \frac{\pi}{2} \wedge -l \leq z \leq 0\}$  будемо шукати у вигляді:

$$U^-(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n^-} C_n Z_n(z) \cdot \omega(\sqrt{\lambda_n} y), \quad (16)$$

$$(\gamma_n^-)^2 = \lambda_n - \kappa^2, \quad (17)$$

$$Z_n(z) = \frac{\gamma_n \cdot [h \cdot sh(\gamma_n(z+l)) + \gamma_n \cdot ch(\gamma_n(z+l))]}{(\gamma_n^2 - h^2)sh(\gamma_n \cdot l)}, \quad (18)$$

$$Z_n'(0) - h \cdot Z_n(0) = \gamma_n, \quad Z_n'(-l) - h \cdot Z_n(-l) = 0, \quad (19)$$

$$\omega(\sqrt{\lambda_{2n}} y) = \cos(\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot y), \quad \omega(\sqrt{\lambda_{2n+1}} y) = \sin(\sqrt{\lambda_{2n+1}} \cdot y), \quad (20)$$

де  $\sqrt{\lambda_{2n}}, \sqrt{\lambda_{2n+1}}$  – корені дисперсійних рівнянь відповідно (21, 22):

$$\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) - h \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (21)$$

$$\sqrt{\lambda_{2n+1}} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + h \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (22)$$

Упровадимо позначення:

$$\zeta = \Re e(\sqrt{\lambda}), \quad \eta = \text{Im}(\sqrt{\lambda}), \quad h = |h| \cdot e^{i\beta}, \quad \sqrt{\lambda} = |\sqrt{\lambda}| \cdot e^{i\alpha}, \quad a = \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \right|, \quad \varphi = \beta - \alpha. \quad (23)$$

Ураховуючи властивості величин  $Z$  і (3), маємо

$$0 < \beta \leq \frac{\pi}{4}. \quad (24)$$

Рівняння (25) можна подати у вигляді

$$\text{ctg}\left(\sqrt{\lambda_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda_{2n}}}{h}. \quad (25)$$

Наслідком (21) є така рівність:

$$a \cdot \exp(-i\varphi) = a \cdot [\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)] = \text{ctg}\left(\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi\zeta)}{ch(\pi\eta) - \cos(\pi\zeta)} - i \cdot \frac{sh(\pi\eta)}{ch(\pi\eta) - \cos(\pi\zeta)}. \quad (26)$$

Для кожного з розв'язків рівняння (26) виконуються умови:

$$\eta = \text{Im}(\sqrt{\lambda}) \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta < \pi/4, \quad \sin(\pi\zeta) \geq 0. \quad (27)$$

Тому для коренів рівняння (21) виконується умова  $\zeta \in [0 + 2n, 1 + 2n]$ ,  $n \in N$ .

Рівняння (22) можна подати у вигляді

$$\text{tg}\left(\sqrt{\lambda_{2n+1}} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\lambda_{2n+1}}}{h}. \quad (28)$$

Наслідком (28) є така рівність:

$$\begin{aligned} -a \cdot \exp(-i\varphi) &= a \cdot [-\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = \\ &= \text{tg}\left(\sqrt{\lambda} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi\zeta)}{ch(\pi\eta) + \cos(\pi\zeta)} + i \cdot \frac{sh(\pi\eta)}{ch(\pi\eta) + \cos(\pi\zeta)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для кожного з розв'язків рівняння (33) виконуються умови:

$$\eta = \text{Im}(\sqrt{\lambda}) \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta < \pi/4, \quad \sin(\pi\zeta) \leq 0. \quad (30)$$

Тому для коренів рівняння (22) виконується умова  $\zeta \in [1 + 2n, 2 + 2n]$ ,  $n \in N$ .

У праці [6] доведено існування та єдиність коренів системи рівнянь (21–22) у кожній з областей  $\Re e \sqrt{\lambda} \in [n, 1 + n]$ . Таким чином, у кожній області  $\zeta \in [0 + 2n, 1 + 2n]$  знаходиться єдиний корінь рівняння (25), а в кожній області  $\zeta \in [1 + 2n, 2 + 2n]$  знаходиться єдиний корінь рівняння (26).

Упровадимо позначення  $\sqrt{\lambda_n} = n + \delta_n$ ,  $\omega_n = \Re e(\delta_n)$ . З рівнянь (21–22) отримуємо

$$\text{ctg}\left(\delta_n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{h}. \quad (31)$$

Якщо в кожній точці області  $\eta = \text{Im}(\sqrt{\lambda}) = \text{Im}(\delta) > M$  виконується хоча б одна нерівність:

$$\Re e[a \cdot \exp(-i\varphi)] = a \cdot \cos(\varphi) > \Re e\left[\text{ctg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{|\sin(\pi\omega)|}{ch(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)}, \quad (32)$$

$$\operatorname{Im}\left[a \cdot \exp(-i\varphi)\right] = a \cdot \sin(\varphi) < \operatorname{Im}\left[\operatorname{ctg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\operatorname{sh}(\pi\eta)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)}, \quad (33)$$

то в цій області не знаходяться корені рівнянь (21–22).

При виконанні однієї з двох умов:

$$a > \frac{1}{[\operatorname{ch}(\pi M) - \cos(\pi\zeta)] \cdot \cos(\beta)}, \quad a < \frac{\operatorname{sh}(\pi M)}{[\operatorname{ch}(\pi M) - \cos(\pi\zeta)] \cdot \sin(\beta)} \quad (34)$$

хоча б одна з двох нерівностей (32, 33) буде виконана. Хоча б одна з двох умов (32, 33) буде виконана при всіх значеннях  $a$ , якщо  $\operatorname{sh}(\pi M) > \operatorname{tg}(\beta)$ .

Таким чином, для всіх коренів дисперсійних рівнянь (21–22) виконується умова:

$$\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_n} < \frac{1}{\pi} \operatorname{arsh}[\operatorname{tg}(\beta)] = \frac{1}{\pi} \ln\left[\frac{\sin\beta + 1}{\cos\beta}\right]. \quad (35)$$

Ураховуючи (30), отримуємо:

$$\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_n} \leq 0,28055, \quad n \in N. \quad (36)$$

Відомо [7], що система власних і приєднаних функцій задачі Штурма–Ліувілля є повною на відріжку  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Аналіз рівнянь (21–22) показує, що необхідною умовою існування приєднаних функцій є

виконання рівності  $h^2 = -\sqrt{\lambda^2}$ . Ця рівність виконується, коли  $\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ , але це суперечить

(27, 30). Таким чином, множина приєднаних функцій є пустою і подання поля (16) в області  $\Omega^-$  є законним.

*Асимптотика коренів дисперсійного рівняння.* Корні рівняння (31) задовольняють такій рівності:

$$\frac{1}{a} \cdot \exp(i\varphi) = \frac{1}{a} \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)] = \operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) + \cos(\pi\omega)} + i \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) + \cos(\pi\omega)}. \quad (37)$$

За виконання умови

$$\frac{\cos(\varphi)}{a} \leq \frac{1}{a} < \frac{\sin(\pi\omega)}{2} \leq \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) + \cos(\pi\omega)} \quad (38)$$

у дисперсійних рівнянь (21–22) коренів немає. Таким чином, при великих значеннях  $a$  виконується умова

$$\zeta_n = \Re e(\sqrt{\lambda_n}) \in \left[n, n + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsin}\left(\frac{2}{a}\right)\right]. \quad (39)$$

Корні рівняння (31) також задовольняють рівності

$$a \cdot \exp(-i\varphi) = a \cdot [\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi)] = \operatorname{ctg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)} - i \cdot \frac{\operatorname{sh}(\pi\eta)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)}. \quad (40)$$

В області  $\operatorname{Im}(z) = \eta \geq M \wedge \sin(\pi\omega) \leq \frac{2}{a}$  за виконання умови

$$a \cdot \cos(\varphi) > a \cdot \cos(\beta) > a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{\frac{2}{a}}{\operatorname{ch}(\pi M) - 1} > \frac{\sin(\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\eta) - \cos(\pi\omega)} \quad (41)$$

не знаходяться корені дисперсійних рівнянь (10–11).

Таким чином,  $\forall \operatorname{Re}\sqrt{\lambda_n} \geq ah$  усі корені рівнянь (25–26) задовольняють нерівності

$$\operatorname{Im}(\sqrt{\lambda_n}) \leq \frac{1}{\pi} \operatorname{arsh}\left(\frac{\sqrt[4]{2}}{a}\right) < \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sqrt[4]{2}}{a}\right). \quad (42)$$

Наслідком (43, 46) є оцінка

$$\delta_n = O\left(\frac{1}{a}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Рівняння (35) можна подати у вигляді

$$(n + \delta_n) \cdot \operatorname{tg}\left(\delta_n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = h \quad (44)$$

або

$$\delta_n = \left[ \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \delta \right] + \frac{2\delta}{\pi n} \cdot \operatorname{tg}\left(\delta \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2h}{\pi n}. \quad (45)$$

Із (45) випливає, що

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{2h}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Інтегральний вираз полів на межі поділу областей  $\Omega^-$  та  $\Omega^+$ . Ґрунтуючись на ідеях робіт [3,4,7], уведемо функцію:

$$F(y) = \frac{\partial U^+(y,0)}{\partial n} - h \cdot U^+(y,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta)y], \quad |y| \leq \frac{L}{2}, \quad (47)$$

яка має властивість

$$F(y) = 0, \quad y \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (48)$$

Згідно з визначенням функції  $F(y)$  маємо

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} F(t) \cdot \exp[-i(p_n + \kappa \sin \theta)t] dt, \quad (49)$$

$$U^+(y,0) = -\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] F(t) dt. \quad (50)$$

Ядро інтегрального оператора (50) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] = K^+(y,t) + \\ & + \exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left[ \frac{L}{\pi} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{\pi \cdot (y-t)}{L} \right| - 2\kappa i \sin \theta \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \cdot \int_0^{\frac{2\pi(y-t)}{L}} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right], \quad (51) \end{aligned}$$

де  $K^+(y,t) \in C^{1,\alpha} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  і має такий вигляд:

$$K^+(y,t) = -\exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_n + h} + \frac{1}{\gamma_{-n} + h} - \frac{2}{p_n} \right) \cdot \cos[p_n(y-t)] - \right. \\ \left. - i\kappa \cos \theta - i \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_n + h} - \frac{1}{\gamma_{-n} + h} + \frac{2\kappa \sin \theta}{p_n^2} \right) \cdot \sin[p_n(y-t)] \right\}. \quad (52)$$

Похідна функції  $K^+(y,t)$  має вигляд

$$-\frac{d}{dy} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n + h} \cdot \exp[i(p_n + \kappa \sin \theta) \cdot (y-t)] = \frac{dK^-(y,t)}{dy} + \\ + \exp[i\kappa \sin \theta \cdot (y-t)] \cdot \left( \operatorname{ctg} \left| \frac{\pi \cdot (y-t)}{L} \right| + \frac{\kappa^2 \sin^2 \theta}{2} \cdot \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \cdot \int_0^L \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds \right). \quad (53)$$

Наслідком (16–20,47) є такі рівності:

$$U^-(y,0) = \frac{\partial U^-(y,0)}{\partial n} - h \cdot U^-(y,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} C_n W_n \omega(\sqrt{\lambda_n} y), \quad W_n = Z_n(0), \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (54)$$

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} C_n \left[ Z_n'(0) - h Z_n(0) \right] \omega(\sqrt{\lambda_n} y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \omega(\sqrt{\lambda_n} y), \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (55)$$

$$C_n = \frac{2}{d \cdot [\omega(\lambda_n)]} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega(\lambda_n t) \cdot F(t) dt, \quad (56)$$

$$[\omega(\lambda_n)] = \frac{2}{d} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \omega^2(\lambda_n t) dt, \quad (57)$$

$$[\omega(\lambda_n)] = 1 + \frac{2h}{d \cdot (h^2 + \sqrt{\lambda_n^2})}. \quad (58)$$

Таким чином, урахувавши (54, 56), для  $U^-(y,0)$  можна отримати таке подання:

$$U^-(y,0) = \frac{2}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n \cdot \omega(\lambda_n y) \cdot \omega(\lambda_n t)}{\gamma_n [\omega(\lambda_n)]} \right] \cdot F(t) dt = \\ = \frac{1}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t-y))}{\gamma_n [\omega(\lambda_n)]} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t+y))}{\gamma_n [\omega(\lambda_n)]} \right] \cdot F(t) dt. \quad (59)$$

Перетворимо вираз

$$\frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} t)}{\gamma_n [\omega(\lambda_n)]} = \frac{\cos(nt)}{n} + \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(nt) + Q_n(t), \quad (60)$$

$$Q_n(t) = \left[ \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} t)}{\gamma_n [\omega(\lambda_n)]} - \frac{\cos(nt)}{n} - \frac{2ht}{n^2 \cdot \pi} \sin(nt) \right], \quad (61)$$

$$Q_n(t) = O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (62)$$

Ядро інтегрального виразу (59), яке позначимо  $K^-(y, t)$  з урахуванням формул:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \right|, \quad (63)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = -\int_0^x \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2} = -\int_0^x \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{s}{2} \right| ds, \quad (64)$$

має вигляд

$$\begin{aligned} K^-(y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t-y))}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{W_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}(t+y))}{\gamma_n[\omega(\lambda_n)]} = \\ &= -\ln \left| 2 \cdot \sin \frac{t-y}{2} \right| - \frac{2h(t-y)}{\pi} \int_0^{t-y} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t-y) - \\ &- \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{t+y}{2} \right| - \frac{2h(t+y)}{\pi} \int_0^{t+y} \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{s}{2} \right| ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_n(t+y). \end{aligned} \quad (65)$$

Похідна функції  $K^-(y, t)$  по змінній  $y$  має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dK^-(y, t)}{dy} &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t-y}{2} - \frac{2h}{\pi} \left\{ -\int_0^{t-y} \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{s}{2} \right| ds - (t-y) \cdot \ln \left| 2 \cdot \sin \frac{y-t}{2} \right| \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{t+y}{2} - \frac{2h}{\pi} \left\{ \int_0^{t+y} \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{s}{2} \right| ds + (t+y) \cdot \ln \left| 2 \cdot \cos \frac{y+t}{2} \right| \right\} + \\ &+ \frac{d}{dy} \left( \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t-y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Q_n(t+y) \right). \end{aligned} \quad (66)$$

Із граничних умов, урахуваючи (50, 51, 59, 65), отримуємо таке інтегральне рівняння:

$$U_0^+(y, 0) + \frac{1}{L} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^+(y, t) \cdot F(t) dt = \frac{1}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^-(y, t) \cdot F(t) dt, \quad (67)$$

яке еквівалентне до системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР):

$$\frac{dU_0^+(y, 0)}{dy} + \frac{1}{L} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dK^+(y, t)}{dy} \cdot F(t) dt = \frac{1}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dK^-(y, t)}{dy} \cdot F(t) dt, \quad y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (68)$$

$$U_0^+(y_0, 0) + \frac{1}{L} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^+(y_0, t) \cdot F(t) dt = \frac{1}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} K^-(y_0, t) \cdot F(t) dt, \quad (69)$$

де  $y_0$  – фіксована точка інтервалу  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Система рівнянь (68–69) аналогічна до ССІР, яка зустрічалася при розв'язанні задач дифракції на ідеально провідних структурах [3], ефективним методом розв'язання яких є метод дискретних особливостей.

### **Висновки**

1. Побудовано новий алгоритм чисельного розв'язання задачі дифракції електромагнітних хвиль на не ідеально провідній гребінці.
2. Запропоновано новий спосіб подання інтегральних виразів полів, який спрощує чисельне розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь.

### **Список використаних джерел**

1. Ильинский А. С. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями / А. С. Ильинский, Г. Я. Слепян. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 232 с.
2. Кравченко В. Ф. Поверхностный импеданс сверхпроводников и его применение в физике и технике / В. Ф. Кравченко, А. Б. Казаров. // Радиотехника. Зарубежная радиоэлектроника. –1997. – № 11. – С. 59–78.
3. Гандель Ю.В. Парные сумматорные и сингулярные интегральные уравнения в задачах дифракции: теория и численные методы: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Х. : Изд-во Харьк. ун-та. – 1994. – 359 с.
4. Gandel' Yu. V., Kravchenko V. F., Morozova N. N. Electromagnetic Wave Diffraction on a Lattice of Thin Superconducting Bands // Electromagnetic Waves & Electron Systems. – 1997. – Vol. 2, No. 1
5. Душкін В.Д. Решение двухмерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов / В. Д. Душкін // Доп. НАН України. – 1999. – № 9. – С. 11–15.
6. Душкін В. Д. Нахождение комплексных собственных значений задачи Штурма–Лиувилля, которая возникает при решении задач дифракции / В. Д. Душкін // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления, 2007. – № 775. Вып. 7. – С. 152–158.
7. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. / В. А. Марченко. – Киев : Наук. думка, 1972. – 220 с.

*Стаття надійшла до редакції 29.12.2008 р.*