УДК 539.3

Є. М. Дончик, О. В.Ярижко

ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ КОНТАКТНОМУ УДАРІ

Проведено аналітичне дослідження напружено-деформованого стану циліндричної оболонки при контактному ударі з урахуванням хвильових процесів. Розв'язок отримано за допомогою інтегральних перетворень за часом і розкладання в ряди Фур'є по координатах.

Постановка проблеми. При дослідженні напружено-деформованого стану оболонкових елементів конструкцій при локальному імпульсному навантаженні велике значення мають задачі контактної ударної взаємодії таких конструкцій з твердими тілами. Необхідність досліджень цих процесів виникає у зв'язку з поширеністю такого роду навантаження оболонкових конструкцій у сучасному машинобудуванні, а також слабкою вивченістю проблеми, зокрема для замкнутих циліндричних оболонок.

Аналіз останніх досліджень. Серед теорій, що описують контактний удар твердими тілами по різних конструкціях, найбільшого поширення набула теорія удару С. П. Тимошенка [1]. Вона дала новий напрям у розвитку теорії про удар і була покладена в основу багатьох досліджень, таких, як дослідження А. В. Гольдсміта [2], Н. А. Кільчевського [3] та ін. Як зазначає Гольдсміт, характер зміни сили і деформацій у часі може бути достатньо добре представлений цією теорією при врахуванні деформацій стиснення за Герцем, поки контактне зминання значно менше товщини досліджуваного об'єкта і коли тривалість контакту більша часу поширення (по висоті перетину) пружних хвиль.

Мета статті. Отримання параметрів напружено-деформованого стану пружних циліндричних оболонок, використовуючи теорію удару С. П. Тимошенка.

Виклад основного матеріалу. Будемо проводити дослідження напружено-деформованого стану замкнутих пружних циліндричних оболонок кінцевої довжини при контактному ударі сферичним твердим тілом на основі функціонального рівняння удару С. П. Тимошенка [1], що враховує зближення падаючого тіла з оболонкою при стисненні у місці контакту:

$$v_0 t - \frac{1}{M}\int_0^t\int_0^{t_1} P(t)dtdt_1 = w(x_0, y_0, t) + \alpha(P), \tag{1}$$

де w – нормальне переміщення серединою поверхні оболонки у центрі удару; α – втискування у місці удару; v_0– швидкість зіткнення; $P(t)$ – зусилля контактної взаємодії ударника з перешкодою.

Ліва частина рівняння (1) є переміщенням тіла масою M, що має у момент зіткнення з оболонкою швидкість $v_0 = \sqrt{2gH}$, де g– прискорення вільного падіння; H– висота падіння тіла.

Зближення a падаючого тіла з циліндричною оболонкою визначатимемо залежністю Герца, застосовність і точність якої для циліндричних оболонок перевірялася у дослідженні [4]:

$$\alpha = kP^{2/3}, \tag{2}$$

де $k = \sqrt[3]{\frac{9(1-\mu^2)^2}{4R_y E^2}}$.

Для інтегрування рівняння (1) ділимо період T_l на 2S інтервалів $\tau = T_l/2S$. Припустимо, що у кожному інтервалі часу $(q-1)\tau < t < q\tau$ сила $P(t)$ змінюється за лінійним законом (див. рис. 1):

$$P(t) = P_q - (P_q - P_{q-1})\left(q - \frac{t}{\tau}\right). \tag{3}$$

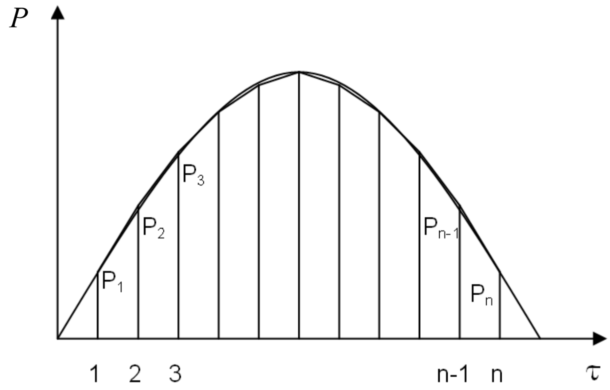

Рис. 1. Залежність сили *P* від часу

Обчислюючи значення лівої частини рівняння (1) у припущенні, що тиск змінюється згідно із законом (3), отримуємо для переміщення падаючого тіла $y_ш$ у момент часу $t = q\tau$

$$y_ш(q\tau) = v_0 q\tau - \frac{\tau^2}{6M}\sum_{k=1}^{q}(P_k - P_{k-1})[(q-k)^3 - (q-(k-1))^3].$$

Нормальне переміщення серединної поверхні оболонки у центрі удару знайдемо з розв'язання таких рівнянь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1-\nu^2}{Eh}\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1-\nu^2}{Eh}\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$K\frac{1-\nu}{2}\left(\nabla^2 w + \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{R}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}\right) = \frac{1-\nu^2}{Eh}\left(\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + P\right); \tag{4}$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \beta_x}{\partial x \partial y}\right) - K\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x\right) = \frac{1-\nu^2}{Eh}\rho h \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2};$$

$$\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 \beta_y}{\partial x \partial y}\right) - K\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y\right) = \frac{1-\nu^2}{Eh}\rho h \frac{\partial^2 \beta_y}{\partial t^2}.$$

Виключаючи з наведеної вище системи всі компоненти вектора зсуву, окрім однієї, отримуємо рівняння такого вигляду:

$$\Bigg[\left(\Delta - \frac{d^2}{dt^2}\right)^2\left(\Delta - \frac{1}{K}\frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta - \frac{2}{1-\nu}\frac{d^2}{dt^2}\right) - \left(\Delta - \frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta - \frac{2}{1-\nu}\frac{d^2}{dt^2}\right)\times$$
$$\times\left(\Delta - \frac{1+K}{1+K^2(1+12R^3/h^3)}\frac{d^2}{dt^2}\right)\frac{1+K^2(1+12R^3/h^3)}{1+K} - \left(\Delta - \frac{d^2}{dt^2} - K\right)\times \tag{5}$$
$$\times\left\{\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (2+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right\}\Bigg]w =$$
$$= \frac{1-\nu^2}{E}\frac{R^2}{h^2}\left(\Delta - \frac{d^2}{dt^2} - K\right)\left(\Delta - \frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta - \frac{2}{1-\nu}\frac{d^2}{dt^2}\right)P.$$

Тут $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $K = K_1 \frac{1-\nu}{2} \approx 0{,}35$; $K_1 = \frac{\pi^2}{12}$ ·

Переходячи до операторів за часом, рішення для шарнірно обпертої оболонки можна шукати у вигляді

$$w(x,y,p) = \sum_m \sum_n a_{m\,n}(p) \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi y}{s}, \tag{6}$$

де l – відстань від точки дії навантаження до закріплення; s – довжина кола.

Складова імпульсного (ударного) навантаження набере вигляду

$$P(x,y,p) = \sum_m \sum_n q_{m\,n}(p) \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi y}{s}, \tag{7}$$

$$a_{m\,n}(p) = \frac{L^{(2)}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)} \cdot q_{m\,n}(p). \tag{8}$$

Припустимо, що складова імпульсного (ударного) навантаження розподілена по площі плями контакту радіусом c згідно із законом:

$$P(x,y,t) = P(t)\sqrt{1-(x/c)^2-(y/c)^2}. \tag{9}$$

Тоді

$$\begin{aligned} q_{m\,n}(p) &= \frac{8}{sl}\iint_F P(x,y,p)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{s}dxdy = \\ &= \frac{8P(p)}{csl}\iint_F \sqrt{c^2-x^2-y^2}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{s}dxdy, \end{aligned} \tag{10}$$

де F – площа плями контакту радіусом c.

Для обчислення інтеграла (10) необхідно використовувати функції Бесселя:

$$\cos\eta = \left(\frac{\pi}{2}\eta\right)^{1/2} J_{-1/2}(\eta);\quad \sin\eta = \left(\frac{\pi}{2}\eta\right)^{1/2} J_{1/2}(\eta), \tag{11}$$

інтеграл Пуассона:

$$J_n(x) = \frac{2(x/2)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\cos^{2n}\varphi\, d\varphi \tag{12}$$

та інтеграл Соніна:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} J_m(x\sin\varphi) J_n(y\cos\varphi)\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi d\varphi = \\ &= \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{m+n+1}{2}}} J_{m+n+1}(x^2+y^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Тепер подвійний інтеграл (10) можна записати у вигляді $(d_1^2 = c^2 - y^2)$

$$A_{m\,n} = 4\int_0^c \cos\frac{n\pi y}{s}dy \int_0^{d_1} \sqrt{d_1^2 - x^2}\cos\frac{m\pi x}{l}dx.$$

Підставляючи значення $x=d_1 \sin\varphi$ та використовуючи інтеграл Пуассона для $n=1$ і вираз (11), отримуємо

$$A_{m\,n}=4\int_0^c\cos\frac{n\pi y}{s}dy\int_0^{\pi/2}d_1^2\cos^2\varphi\cos\left(\frac{m\pi}{l}d_1\sin\varphi\right)d\varphi=$$
$$=4\int_0^c d_1^2\cos\frac{n\pi y}{s}dy\int_0^{\pi/2}\cos\left(\frac{m\pi}{l}d_1\sin\varphi\right)\cos^2\varphi d\varphi=$$
$$=4\frac{\sqrt{\pi}\cdot l\cdot\Gamma(3/2)}{m\pi}\int_0^c d_1\left(\frac{\pi}{2}\frac{n\pi y}{s}\right)^{1/2}J_{-1/2}\left(\frac{n\pi y}{s}\right)J_1\left(\frac{m\pi}{l}d_1\right)dy.$$

Прийнявши $y=d\sin t$ і скориставшись формулою (13), отримаємо для m = – ½, n = 1 (коли $d_1=c\cos t,\ dy=c\cos t dt$, а межі інтегрування від 0 до $\pi/2$)

$$A_{m\,n}=4\frac{l\cdot\Gamma(3/2)}{m\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}c\cos t\left(\frac{\pi^2nc\sin t}{2s}\right)^{1/2}J_{-1/2}\left(\frac{n\pi}{s}c\sin t\right)J_1\left(\frac{m\pi}{l}c\cos t\right)c\cos t dt=$$
$$=4\frac{l\cdot\Gamma(3/2)}{m\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}J_{-1/2}\left(\frac{n\pi}{s}c\sin t\right)J_1\left(\frac{m\pi}{l}c\cos t\right)\sin^{1/2}t\cos^2 t\frac{c^{3/2}\pi n}{2s}dt=$$
$$=4\frac{n}{m}\frac{c^{3/2}l\sqrt{\pi}\Gamma(3/2)}{2s}\frac{J_{3/2}\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{s}\right)^2+\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2}}{\sqrt{\frac{nmc^2\pi^2}{sl}}\left(\left(\frac{n\pi c}{s}\right)^2+\left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2\right)^{3/4}}.$$

Якщо запишемо $J_{3/2}$ через його кінцевий тригонометричний вираз

$$J_{3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\frac{1}{x}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right),$$

то подвійний інтеграл (10) набере вигляду

$$A_{m\,n}=4\frac{n}{m}\frac{c^{3/2}l\pi}{4s}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)\left(\frac{\cos\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\sqrt[4]{n^2l^2+m^2s^2}\sqrt{\frac{\pi c}{sl}}}-\frac{\sin\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\left(\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}\right)^{3/2}}\right).$$

Остаточні вирази для коефіцієнтів $q_{m\,n}(p)$ і $a_{m\,n}(p)$ мають такий вигляд:

$$q_{m\,n}(p)=-\frac{8nc^{1/2}\sqrt{2}}{ms^2}\left(\frac{\cos\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\sqrt[4]{n^2l^2+m^2s^2}\sqrt{\frac{\pi c}{sl}}}-\frac{\sin\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\left(\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}\right)^{3/2}}\right)P(p),\qquad(14)$$

$$a_{m\,n}(p)=\frac{L^{(2)*}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)}\cdot P(p),\qquad(15)$$

де

$$L^{(2)*}(m,n,p)=-\frac{8nc^{1/2}\sqrt{2}}{ms^2}\frac{1-\nu^2}{E}\frac{R^2}{h^2}\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2}{s^2}-p^2-K\right)\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2}{s^2}-p^2\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2}{s^2}-\frac{2}{1-\nu}p^2\right)\left(\frac{\cos\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\sqrt[4]{n^2l^2+m^2s^2}\sqrt{\frac{\pi c}{sl}}}-\frac{\sin\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\left(\frac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}\right)^{3/2}}\right).$$

Для знаходження оригіналів виразу (15) скористаємося теоремою про згортку:

$$a_{m\,n}(t) = L^{-1}\left[\frac{L^{(2*)}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)}\right] * L^{-1}\left[P(p)\right] = \int_0^t \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{S_j(t-t_1)} \cdot P(t_1)dt_1, \qquad (16)$$

де

$$L^{-1}\left[\frac{L^{(2*)}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)}\right] = \sum_{j=1}^{8} \frac{L^{(2)}(m,n,s_j)}{\prod_{q=1}^{8}(s_j - s_q + \delta_{jq})} e^{s_j \cdot t} = \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{s_j \cdot t};$$

$(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ – корені бічетвертого порядку $L^{(1)}(m,n,p) = 0$.

Інтегруючи частинами (16) і враховуючи закон зміни контактної сили *P(t)* (3), отримуємо для $t = q\tau$:

1) якщо комплексні корені $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ мають і дійсну, і уявну частини, не рівні нулю, то

$$a_{m\,n}(q\tau) = \int_0^{q\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{S_j(q\tau - t_1)} \cdot P(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{a_j(q\tau - t_1)} \cdot (\cos a_j(q\tau - t1) + i\sin b_j(q\tau - t_1)) \cdot P(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{q} A_j \left\{ P_k \left[\frac{U_{k,j}}{D_j}\left(1 + \frac{b_j}{a_j}\right) + \left(H_{k-1,j} - H_{k,j}\right)\left(\frac{1}{D_j} - \frac{b_j}{D_j a_j \delta}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{U_{k,j}}{D_j} - \frac{U_{k-1,j}}{D_j}\right)\left(\frac{a_j}{D_j\delta} - \frac{b_j^2}{D_j a_j \delta} + \frac{2b_j}{D_j\delta}\right) - \frac{H_{k,j}}{a_j}\right] - P_{k-1}\left[\frac{U_{k-1,j}}{D_j}\left(1 + \frac{b_j}{a_j}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \left(H_{k-1,j} - H_{k,j}\right)\left(\frac{b_j}{D_j a_j \delta} - \frac{1}{D_j}\right) + \left(\frac{U_{k,j}}{D_j} - \frac{U_{k-1,j}}{D_j}\right)\left(\frac{a_j}{D_j\delta} - \frac{b_j^2}{D_j a_j \delta} + \frac{2b_j}{D_j\delta}\right) - \frac{H_{k-1,j}}{a_j}\right]\right\},$$

де $U_{k-1,j} = e^{a_j\tau(q-(k-1))}\left[b_j \cos b_j\tau(m-(k-1)) - a_j \sin b_j\tau(m-(k-1))\right]$; $H_{k,j} = e^{a_j\tau(q-k)}\cos b_j\tau(m-k)$;

$H_{k-1,j} = e^{a_j\tau(q-(k-1))}\cos b_j\tau(m-(k-1))$; $D_j = a_j^2 + b_j^2$;

2) якщо комплексні корені $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ мають тільки дійсну частину, не рівну нулю, то

$$a_{m\,n}(q\tau) = \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{S_j(q\tau - t_1)} \cdot P(t_1)dt_1 = \sum_{k=1}^{q} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{a_j(q\tau - t_1)} \cdot P(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{q} A_j \left\{ P_k \left[\frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-(k-1))} - \frac{1}{a_j} e^{a_j\tau(q-k)} - \frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-k)} \right] + \right.$$

$$\left. + P_{k-1}\left[\frac{1}{a_j} e^{a_j\tau(q-(k-1))} - \frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-(k-1))} + \frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-k)} \right]\right\};$$

3) якщо комплексні корені $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ мають тільки уявну частину, не рівну нулю, то

$$a_{m\,n}(q\tau)=\int\limits_{0}^{\tau}\sum_{j=1}^{8}A_j\cdot e^{S_j(q\tau-t_1)}\cdot P(t_1)dt_1=$$

$$=\sum_{k=1}^{q}\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau}\sum_{j=1}^{8}A_j\cdot(\cos a_j(q\tau-t1)+i\sin b_j(q\tau-t_1))\cdot P(t_1)dt_1=$$

$$=\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{q}A_j\left\{P_k\left[\frac{\cos b_j\tau(q-k)-\sin b_j\tau(q-k)}{b_j}+\frac{\cos b_j\tau(q-k)+\sin b_j\tau(q-k)}{b_j^2\tau}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\cos b_j\tau(q-(k-1))+\sin b_j\tau(q-(k-1))}{b_j^2\tau}\right]+P_{k-1}\left[\frac{\sin b_j\tau(q-(k-1))-\cos b_j\tau(q-(k-1))}{b_j}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\cos b_j\tau(q-k)+\sin b_j\tau(q-k)}{b_j^2\tau}+\frac{\cos b_j\tau(q-(k-1))+\sin b_j\tau(q-(k-1))}{b_j^2\tau}\right]\right\}.$$

Нормальне переміщення серединної поверхні оболонки набере вигляду

$$w(x,y,q\tau)=\sum_m\sum_n a_{m\,n}(q\tau)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{s}.$$

Значення Pq визначається з рівняння $y_ш(q\tau)=w(x_0,y_0,q\tau)+\alpha(q\tau)$ крок за кроком, починаючи з першого інтервалу часу τ, для якого $P_0=0$, $P(q\tau)=P_q$ за схемою, наведеною у [5].

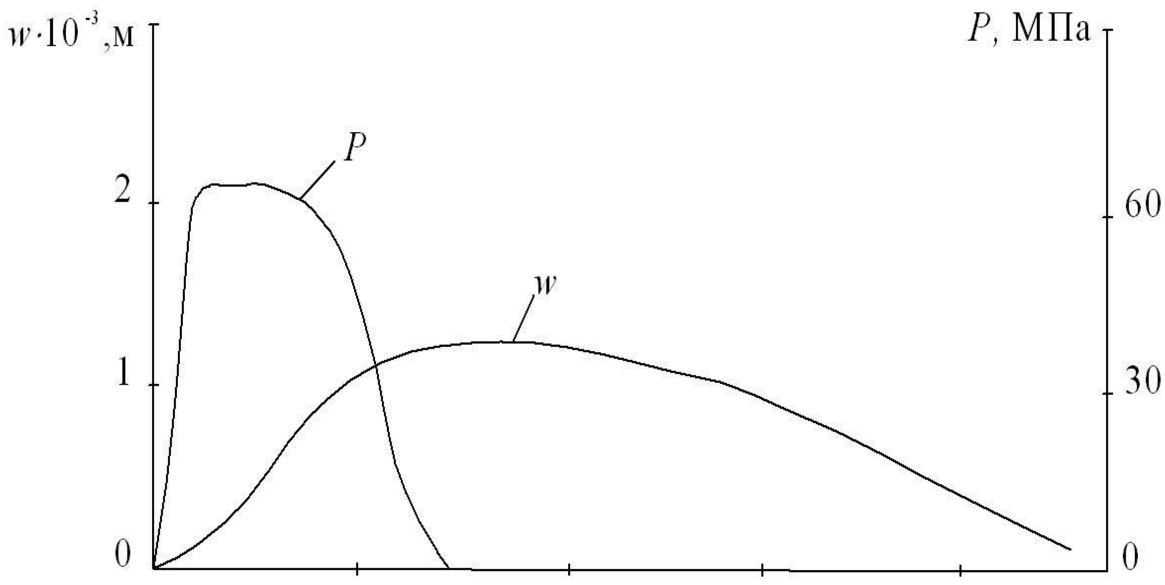

Рис. 2. Контактний тиск і прогин циліндричної сталевої оболонки
(l_0 = 1,5м; l/a = 0,032*;* a = 0,125м*;* M = 0,85 кг)

Висновки

При розгляді удару сталевою кулею радіусом R_0, що падає з висоти H=1,0 м на шарнірно обперту по торцях сталеву циліндричну оболонку радіусом $R_ц$, завдовжки l_0 і товщиною δ = 0,005 м, отримані параметри НДС: контактний ударний тиск і нормальні зсуви у центрі удару (рис. 2).

Отримано аналітичний розв'язок функціонального рівняння удару з урахуванням хвильових процесів. Розв'язок може бути використаний при аналізі динамічного напружено-деформованого стану і міцності елементів військової техніки та інших машин.

Список використаних джерел

1. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М. ; Л. : Физматгиз, 1959. – 439 с.

2. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – М. : Изд-во лит. по строительству, 1965. – 448 с.

3. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н. А. Кильчевский. – К. : Наук. думка, 1976. – 317 с.

4. Потележко В. П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании / В. П. Потележко, А. П. Филиппов // Прикл. механика. – 1967. – № 1. – С.67–72.

5. Голоскоков Е. Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е. Г. Голосков. – К. : Наук. думка, 1977. – 340 с.

Стаття надійшла до редакції 14.01.2009 р.