УДК 656.2.519.21

БОРОВИЦКАЯ А.О., к.ф.-м.н., доцент (ДонИЖТ)

Оценка интенсивности потока опасных событий по сети железных дорог

BOROVITSKAYA A.O., Cand.Sci.in Physics and Math, Associated Professor (DRTI)

The estimate of the intensity of hazardous events on the rail network

Постановка проблемы

Многочисленными исследованиями показано, что в реальных условиях транспортный процесс стохастичен, то есть носит вероятностный характер. Это проявляется в неравномерности и неоднородности транспортных потоков, разной продолжительности обслуживания единицы транспортного потока, случайном характере опасности возникновения крушений по сети железных дорог, продолжительности отказов технических устройств и других факторов. Поэтому в ряде случаев при определении пропускной способности ЕТС, объемов перевалки, для оценки рисков железнодорожных перевозок и т.д. применяют вероятностно-статистический подход или метод имитационного моделирования, основанный на закономерностях распределения случайной величины.

Научная база определения основных количественных показателей риска строится на основе статистической модели безопасности перевозок железнодорожным транспортом и статистического обоснования типа потока случайных событий. Это позволяет выбрать конкретную модель, описывающую состояние безопасности движения посредством получения количественных оценок показателей риска. Одним из общих определений, наиболее близко соответствующим требованиям гармонизации понятийного аппарата для оценки рисков железнодорожных перевозок является определение риска принятое в теории управления в социально-экономических системах. Последнее учитывает временной интервал и подтверждает необходимость учета вероятности возникновения опасного события и частоты опасных событий (интенсивности).

Традиционный подход в оценках рисков от воздействия природных (сейсмологические, штормы и смерчи, лавины и сели) и техногенных факторов опасности на возникновение крушений по сети железных дорог, основан на учёте полной информации о законах распределения случайных величин, участвующих в процессе оценки (интенсивность неблагоприятных событий, величина ущерба) и их параметров [1].

Рассмотрим систему статистических данных о крушениях и авариях, маркированную по времени, в формате итоговых просуммированных данных по годам, как одну реализацию некоего абстрактного пуассоновского процесса.

Основанием для применения такого подхода является то, что поток опасных событий при перевозках железнодорожным транспортом укладывается в рамки понятий теории случайных процессов. Кроме того, в пользу возможностей использования такой модели говорит то, что базовые показатели аварийности: количество крушений, количество сходов, столкновений, случаев брака являются характеристиками потоков с применением к ним процедуры случайного прореживания (как отражение процедуры контроля и исключения браков в процессе перевозок).

Следует отметить также, что общий поток опасных событий на железнодорожном транспорте складывается из частных потоков случайных событий по ряду причинных факторов по ряду дорог в составе «УкрЗализныци» в связи с чем возможно использование того фундаментального факта теории потоков, что сумма независимых пуассоновских потоков является также пуассоновским потоком.

Цель статьи

Целью данной работы является исследование свойств оценки интенсивности потока опасных событий, как статистической модели безопасности перевозок железнодорожным транспортом.

Изложение основного материала

Пусть мы наблюдаем точки (аварийные и опасные ситуации), занимающие случайное положение в пространстве независимо друг от друга; число точек, попадающих в любую пространственную область (или случайная точечная мера), распределяются по закону Пуассона. Тогда можно сказать, что мы наблюдаем на расширяющейся последовательности областей события пуассоновского поля [2], заданного на R^3. Если речь идет о значительном промежутке времени, то следует рассматривать поток опасных событий как пуассоновский поток случайных событий с переменной интенсивностью (частотой опасных событий). Предположим, что интенсивность неизвестна, однако является периодической функцией. Построим оценку функции интенсивности методом максимального правдоподобия и исследуем ее на состоятельность.

Введем следующие условия.

Пусть $(\Omega, \Im, P)$ - полное вероятностное пространство. В дальнейшем все случайные процессы и поля считаются заданными на этом пространстве.

(I) $N = N(B,\omega)$, $B \in \mathcal{B}(R^3)$, $\omega \in \Omega$ - пуассоновское поле на R^3 с неизвестной функцией интенсивности $\tilde{\lambda}_0 = \tilde{\lambda}_0(t)$, $t \in R^3$. Здесь $\mathcal{B}$ - борелевская σ - алгебра.

(II) Для фиксированных положительных чисел τ_1, τ_2, τ_3

$$\tilde{\lambda}_0\left(t_1 + n_1\tau_1, t_2 + n_2\tau_2, t_2 + n_2\tau_3\right) = \\ = \tilde{\lambda}_0\left(t_1, t_2, t_3\right), \\ \forall t_1, t_2, t_3 \in R \;\; \forall n_1, n_2, n_3 \in Z.$$

Это условие является аналогом периодичности функции интенсивности пуассоновского процесса. Обозначим

$$\Delta_0 := \prod_{i=1}^{3}[0, \tau_i].$$

(III) Функция $\tilde{\lambda}_0$ во внутренних точках бруса Δ_0 совпадает с функцией $\lambda_0 : \Delta_0 \to R$, причем λ_0 принадлежит K – заданному компактному в пространстве $\left(C(\Delta_0), \|\cdot\|_\infty\right)$ множеству, состоящему из неотрицательных функций.

Здесь и далее $\|f\|_\infty := \max\limits_{t \in \Delta_0} |f(t)|$ – равномерная норма в пространстве непрерывных функций на Δ_0. Положим

$$\lambda_*(t) := \min\left\{\lambda(t) \middle| \lambda \in K\right\} \text{ для } t \in \Delta_0,$$

и

$$M_k := \max\left\{\lambda(t) \middle| t \in \Delta_0, \lambda \in K\right\}.$$

(IV) Выполняется неравенство

$$\int_{\Delta_0} \frac{dt}{\lambda_*(t)} < +\infty$$

(здесь и далее используется интеграл Лебега).

(V) В R^3 задана возрастающая последовательность ограниченных борелевских множеств $\{G_k$, k≥1}, причем G_1 имеет положительную меру Лебега.

Пусть $\tilde{N}$ - другое пуассоновское поле на R^3 с функцией интенсивности $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t)$, которая удовлетворяет условию периодичности (II); пусть также $\tilde{\lambda}$ совпадает во внутренних точках Δ_0 с непрерывной функцией $\lambda \in K$.

В работе [3] показано, что для построения оценки максимального правдоподобия (ОМП) по наблюдениям событий поля N на множестве G_k достаточно рассмотреть функционал

$$Q_k(\lambda) := -\frac{1}{mesG_k} \int\limits_{G_k} \tilde{\lambda}(t)dt + \\ + \frac{1}{mesG_k} \int\limits_{G_k} \ln \tilde{\lambda}(t)dN(t), \lambda \in K. \quad (1)$$

Тут и далее $mesG_k$ обозначает меру Лебега множества G_k.

Оценкой максимального правдоподобия (ОМП) функции интенсивности пуассоновского поля $\{N(B,\omega) \mid B \in \mathcal{B} \quad (G_k)\}$ является распределенный в K случайный элемент $\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k(\omega) \in K$, где $k \geq 1$ и $\omega \in \Omega_1,\ \Omega_1 \subset \Omega_0, P(\Omega_1) = 1$, удовлетворяющий соотношению:

$$Q_k(\hat{\lambda}_k) = \max_{\lambda \in K} Q_k(\lambda). \quad (2)$$

Строгая состоятельность оценки

Чтобы записать функционал (1) в более удобной форме, рассмотрим покрытие множеств G_k «элементарными клетками»:

$\Delta_i : \prod_{k=1}^{3} [i_k \tau_k, (i_k + 1)\tau_k],$ где

$$\tau := (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in R^3, i : (i_1, i_2, i_3) \in Z^3, \\ i\tau := (i_1\tau_1, i_2\tau_2, i_3\tau_3).$$

Введем дополнительные обозначения. Пусть

- $n(k) := \#\{i \in Z^3 : \Delta_i \subset G_k\}$ - количество «элементарных клеток», которые полностью лежат в области G_k;

- $n_1(k) := \#\{i \in Z^3 : \Delta_i \cap G_k \neq \emptyset\}$ - количество «элементарных клеток», которые имеют с областью G_k непустое пересечение;

- $N_i(B) := N(B + i\tau), \quad B \in (\Delta_0),\ i \in Z^3$.

Пуассоновские поля $\{N_i, i \in Z^3\}$ независимы и вследствие условия (ii) порождают одинаковое распределение в пространстве точечных мер на Δ_0.

Ниже используется аддитивность интеграла Лебега. При этом то обстоятельство, что множества Δ_i могут иметь общие точки, не является препятствием, поскольку $\forall\, i \in Z^3 : P\{N(\partial\Delta_i) = 0\} = 1$, поэтому нижеследующие рассуждения корректны. Функционал (1) запишется в виде

$$Q_k(\lambda) = -\frac{n(k) \cdot mes\Delta_0}{mesG_k} \cdot \frac{1}{mes\Delta_0} \cdot \int\limits_{\Delta_0} \lambda(t)dt + \\ + \frac{n(k) \cdot mes\Delta_0}{mesG_k} \cdot \frac{1}{n(k) \cdot mes\Delta_0} \times \\ \times \sum_{i:\Delta_i \subset G_k} \int\limits_{\Delta_0} \ln \lambda(t)dN_i(t) + R_k(\lambda), \quad (3)$$

где

$$R_k(\lambda) := -\frac{1}{mesG_k} \cdot \int\limits_{G_k \backslash G_k^0} \tilde{\lambda}(t)dt + \\ + \frac{1}{mesG_k} \cdot \sum_{i:\Delta_i \subset G_k^1 \backslash G_k^0} \int\limits_{\Delta_i \cap G_k} \ln \tilde{\lambda}(t)dN(t). \quad (4)$$

$$G_k^0 := \bigcup_{i:\Delta_i \subset G_k} \Delta_i, \quad G_k^1 := \bigcup_{i:\Delta_i \cap G_k \neq \emptyset} \Delta_i.$$

Введем ограничения на область наблюдений.

(VI) $mesG_k \to \infty$ и $mesG_k^1 / mesG_k^0 \to 1, \quad k \to \infty.$

Это в точности означает, что $\{G_k\}$ стремятся к бесконечности по Ван Хову [4], с.8.

Теорема. Пусть выполнены условия (I) – (VI). Тогда с вероятностью 1

$$\max_{t \in \Delta_0} \left| \hat{\lambda}_k(t) - \lambda_0(t) \right| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Из вида $R_k(\lambda)$ в (4), условий (VI), (IV) и усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) можно доказать, что п.н.

$$\sup_{\lambda\in K}|R_k(\lambda)|\to 0,\quad k\to\infty. \qquad (5)$$

Далее проверяются общие условия состоятельности оценок [5], с.76. Приведем эти условия и проверим их выполнение.

Пусть s_0 - это истинное значение функции интенсивности, $s_0\in K$. Для строгой состоятельности ОМП, определяемой соотношением (2), достаточно проверить следующее:

1) Для некоторого фиксированного элемента $s_0\in K$ при каждом $s\in K$ справедливо соотношение $P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(s,\omega)=\Phi(s,s_0)\right\}=1$ с некоторой действительной функцией $\Phi(s,s_0)$, $s\in K$, непрерывной на K и такой, что

$$\Phi(s;s_0)<\Phi(s_0;s_0),\quad s\neq s_0$$

(т.е. точка максимума предельного функционала $\Phi(s,s_0)$ существует и единственная).

2) Для любого $\delta>0$ существует $\gamma_0>0$ и функция $c(\gamma)$, $\gamma>0$; $c(\gamma)\to 0$, $\gamma\to 0$, такие, что для любого элемента $s^/\in K$ при любом $0<\gamma<\gamma_0$ выполняется соотношение

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{(\|s-s^/\|<\gamma;\,\|s-s_0\|\geq\delta)}\left|Q_n(s)-Q_n(s^/)\right|\leq c(\gamma)\right\}=1.$$

В силу УЗБЧ и из соотношений (3), (5) для фиксированного $\lambda\in K$ с вероятностью единица при $k\to\infty$ получаем

$$Q_k(\lambda)\ \to -\frac{1}{mes\Delta_0}\int\limits_{\Delta_0}\lambda(t)dt+$$

$$+\frac{1}{mes\Delta_0}\int\limits_{\Delta_0}\lambda_0(t)\ln\lambda(t)dt\ :\Phi(\lambda,\lambda_0).$$

Последняя функция и является предельным функционалом для $Q_k(\lambda)$.

Функционал $\Phi(\cdot,\lambda_0)$ принимает вещественные значения и непрерывен на K. Также можно показать, что при $\lambda\neq\lambda_0$ выполняется условие $\Phi(\lambda\cdot,\lambda_0)<\Phi(\lambda_0,\lambda_0)$.

Рассмотрим разность

$$\left|Q_k(\lambda_1)-Q_k(\lambda_2)\right|\leq$$
$$\leq\frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\cdot\frac{1}{mes\Delta_0}\cdot\int\limits_{\Delta_0}\left|\lambda_1-\lambda_2\right|dt+$$
$$+\frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\cdot\frac{1}{n(k)\cdot mes\Delta_0}\times$$
$$\times\sum_{i:\Delta_i\subset G_k}\int\limits_{\Delta_0}\left|\ln\lambda_1-\ln\lambda_2\right|dN_i(t)+$$
$$+\left|R_k(\lambda_1)-R_k(\lambda_2)\right|.$$

Применим теорему Лагранжа для разности $\left|\ln\lambda_1-\ln\lambda_2\right|$, тогда для каждого $\gamma>0$ имеем

$$\sup_{(\lambda_1,\lambda_2\in K,\,\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty<\gamma)}\left|Q_k(\lambda_1)-Q_k(\lambda_2)\right|\leq$$
$$\leq\frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\left(\frac{1}{mes\Delta_0}\cdot\int\limits_{\Delta_0}\gamma dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n(k)\cdot mes\Delta_0}\cdot\sum_{i:\Delta_i\subset G_k}\int\limits_{\Delta_0}\frac{\gamma}{\lambda_*(t)}dN_i(t)\right)+$$
$$+\sup_{(\lambda_1,\lambda_2\in K,\,\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty<\gamma)}\left|R_k(\lambda_1)-R_k(\lambda_2)\right|.$$

$$\sup_{(\lambda_1,\lambda_2\in K,\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty<\gamma)} |Q_k(\lambda_1)-Q_k(\lambda_2)| \le$$

$$\le \frac{n(k)\cdot mes\Delta_0}{mesG_k}\cdot\gamma\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{n(k)\cdot mes\Delta_0}\cdot\sum_{i:\Delta_i\subset G_k}\int_{\Delta_0}\frac{1}{\lambda_*(t)}dN_i(t)\right)+$$

$$+\sup_{(\lambda_1,\lambda_2\in K,\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty<\gamma)}|R_k(\lambda_1)-R_k(\lambda_2)|.$$

Из соотношения (5) получаем, что $\sup_{\lambda_1,\lambda_2\in K}|R_k(\lambda_1)-R_k(\lambda_2)|\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда, из УЗБЧ при условии (VI) для каждого $\gamma>0$ имеем

$$P\left\{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sup_{(\lambda_1,\lambda_2\in K,\|\lambda_1-\lambda_2\|_\infty<\gamma)}|Q_k(\lambda_1)-Q_k(\lambda_2)|\le\right.$$

$$\left.\le\gamma\left(1+\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_*}dt\right)\right\}=1.$$

В качестве функции выбираем

$$c(\gamma)=\gamma\left(1+\frac{1}{mes\Delta_0}\int_{\Delta_0}\frac{\lambda_0}{\lambda_*}dt\right).$$

Оба условия состоятельности оценки выполнены. Теорема доказана.

Выводы

Для определения количественных показателей риска железнодорожных перевозок предложена статистическая модель для обоснования типа потока опасных событий, который рассматривается как пуассоновский поток случайных событий с переменной интенсивностью (частотой опасных событий). Для неизвестной периодической функции интенсивности рассмотренного пуассоновского поля получены достаточные условия строгой состоятельности ее оценки максимального правдоподобия. Следующим этапом исследования являются асимптотические свойства ОМП функции интенсивности (асимптотическая нормальность, скорость сходимости), повышение качества построенной оценки.

Список литературы:

1. Мартынюк И.В., Попов О.Н., Флегонтов Н.С. О разработке принципов и методов оценки рисков возникновения чрезвычайных ситуаций на железнодорожном транспорте // Труды Третьей науч.-практ. конф. «Безопасность движения поездов». – М., 2002. – С. II-21.
2. Reiss R. D. A Course on Point Processes. - Springer, New Yourk, 1993. – 255 p.
3. Кукуш О. Г., Степанищева А. О., Асимптотичні властивості непараметричної оцінки інтенсивності неоднорідного пуассонового поля // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2001. - Вип. 65. - С. 97-109.
4. Леоненко Н. Н., Иванов А. В., Статистический анализ случайных полей. – К.: Выща школа, 1986. - 216 с.
5. Дороговцев А. Я., Теория оценок параметров случайных процессов. – К.: Выща школа, 1982. – 203 с.

Spisok literatury:

1. Martynjuk I.V., Popov O.N., Flegontov N.S. O razrabotke printsypov i metodov otsenki riskov vozniknovenija chrezvychajnykh situatsyj na zheleznodorozhnom transporte // Trudy Tret`ej nauch.-pract.konf. “Bezopasnost’ dvizhenija poezdov”. – M., 2002. – C.11-21.
2. Reiss R. D. A Course on Point Processes. - Springer, New Yourk, 1993. – 255 p.
3. Kukush O.G., Stepanishcheva A.O. Asimptotychni vlastyvosti neparametrichnoji otsinky intensyvnosti neodnoridnoho puassonivs`kogo polja // Teorija imovirnostej ta matematychna statystyka. – 2001. – Vyp.65. – C.97-109.

4. Leonenko N.N., Ivanov A.V. Statisticheskij analiz sluchajnykh polej. – K.: Vyshcha shkola, 1986. – 216 c.

5. Dorogovtsev A.Ya. Teorija otsenok parametrov sluchajnykh protsessov. – K.: Vyshcha shkola, 1982. – 203 c.

Аннотации:

Проведено исследование свойств оценки максимального правдоподобия функции интенсивности (частоты опасных событий) неоднородного пуассоновского поля, как статистической модели безопасности перевозок железнодорожным транспортом.

Сделан вывод о строгой состоятельности рассматриваемой оценки.

Ключевые слова: пуассоновское поле, функция интенсивности, оценка максимального правдоподобия, состоятельность оценки.

Проведено дослідження властивостей оцінки максимальної вірогідності функції інтенсивності (частоти небезпечних подій) неоднорідного пуассонівського поля, як статичної моделі безпеки перевезень залізничним транспортом.

Зроблено висновок про строгу консистентність даної оцінки.

Ключові слова: пуассонівське поле, функція інтенсивності, оцінка максимальної вірогідності, консистентність оцінки.

A study of properties of the maximum likelihood estimate of the intensity function (frequency of dangerous events) of a nonhomogeneous Poisson field as a statistical model railway transportation safety.

The consistency of this estimate are investigated.

Keywords: Poisson field, the intensity function, the maximum likelihood estimate, the consistency of the estimate.

УДК 656.071

БОСОВ А.А., д.т.н., профессор (ДНУЗТ)
ЛОЗА П.А., к.т.н., доцент (ДНУЗТ)

Построение индекса произвольного процесса

Bosov A., Dr. Eng., Professor (DNURT)
Loza P., PhD in Eng., Associated Professor (DNURT)

Creation of an index of arbitrary process

Введение

Многие процессы или явления, протекающие во времени, характеризуются несколькими показателями, и тогда возникает задача, с помощью линейных преобразований, определить такие показатели, которые между собой не коррелировали, но незначительное их число с достаточной степенью точности описывало бы исходный процесс.

Данная задача решается с помощью метода главных компонент. В предлагаемой работе осуществляется объединения двух методов: метода главных компонент и метода анализа иерархий, что позволяет избавиться от субъективизма экспертов в методе анализа иерархий.

Основной материал

Пусть в любой момент времени некоторый процесс характеризуется набором показателей $x_i, i=\overline{1,n}$.

Тогда возникает задача введения некоторого индекса, который бы с опреде-