

УДК 681.5. 075

Вершигора В.Г., к. ф.–м. н., доцент,

Гусак О. М.,

ПВНЗ «Буковинський університет», м. Чернівці

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДОЛОГІЇ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЛЮДИНИ–ОПЕРАТОРА

*У статті викладено новий погляд на методологію математичного моделювання. Запропоновано формальне визначення методу математичного моделювання, представлені деякі неформальні аспекти даної методології.*

*In the article a new look is expounded to methodology of mathematical design. Formal determination of method of mathematical design is offered, some informal aspects of this methodology are presented.*

**Постановка проблеми.** Сучасна епоха характеризується феноменом глобалізації. Одним з його аспектів є інформаційна індустрія. Існують різного роду висловлювання [1] про те, що в наш час йде будівництво глобального інформаційного суспільства. У цьому сенсі можна говорити про інформаційні технології отримання нових знань, їх накопичення і використання. Методологію математичного моделювання та обчислювального експерименту, що розглядаються в даній статті, можна віднести до подібного роду інформаційних технологій. У своїх найбільш розвинених формах метод математичного моделювання зародився у фізиці, точніше, в математичній фізиці, далі він поступово дрейфував у бік біології та суспільних дисциплін.

Терміни "моделювання" і "математичне моделювання" посідають особливе місце в методології сучасної науки. Традиційно в науці та інженерії виходять з уявлення про модель як про деяку мінімальну і одночасно нетривіальну конструкцію, яка дозволяє зробити значущі висновки про предмет дослідження [2]. Використання електронно–обчислювальної техніки значно розширило можливості моделювання, дозволяючи створювати віртуальну реальність.

**Метою даної статті** є розгляд можливості застосування методики математичного моделювання в ході обчислювального експерименту, опис та визначення лінійної математичної моделі людини–оператора та окреслення перспектив подальшого розвитку інтерактивного інтерфейсу і його активного використання в моделі предметної області «суб'єкт–модельєр».

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Аналіз сучасних тенденцій в методології наукового знання демонструє значне посилення ролі методу математичного моделювання. Широке його використання призвело до нагальної потреби усвідомлення внутрішніх закономірностей зародження і розвитку моделей.

Наведемо ряд висловлювань. У роботі [3] математичне моделювання називають "новою науковою технологією, новою методологією наукових

досліджень, пошуку та прогнозу". У більш широкому плані, "моделювання претендує на методологічну фундаментальність, що не поступається теорії та експерименту чи на форму інтелектуально–пізнавальної діяльності людини в світі електронно–обчислювальних машин" [4]. Поява і широке впровадження комп'ютерів в якості незамінного інструменту наукового процесу призвело до зворотного впливу обчислювальної ідеології на математичне моделювання, як в частині теорії, так і в частині експерименту. В роботах, що присвячені постановці математичного експерименту, доводиться необхідність створення специфічної машинної математики, розробляється математична теорія вимірювально–обчислювальних систем [7], що дозволяє сформулювати критерії адекватності моделей. Сучасний розвиток інформаційних технологій дозволяє використовувати термін "інтелектуальна майстерня", де персональний комп'ютер відіграє роль своєрідного верстата, що дозволяє працювати з об'єктивним знанням. У більш широкому сенсі комп'ютер – пристрій, що породжує віртуальну реальність [5, 6].

В цілому переживання тієї чи іншої віртуальної реальності [9, 10] з боку людини–оператора досягається на шляху застосування методів математичного моделювання, обчислювального експерименту і програмування. Крім того, враховуються дуже важливі особливості, які можна віднести до психології конкретної людини–оператора [12].

Створення тієї чи іншої моделі, явища чи процесу у формі віртуальної реальності вимагає особливого ставлення до інтерфейсу її реалізації на комп'ютері. У загальному випадку цей інтерфейс включає адекватну візуалізацію, звуковий супровід, а також, що менш доступно, імітацію інших сенсорних подразників з метою повного втілення віртуальної реальності, коли в оператора не залишається способу розрізнити штучну і материнську дійсність.

Нові тенденції розвитку методу математичного моделювання особливо чітко виявляються в таких галузях як історія, політика, економіка, соціологія, екологія [8 – 11]. Прикладом служить ряд досліджень, представлених на розгляд Римському клубу – міжнародній неурядовій організації, що об'єднує в своїх рядах вчених, громадських діячів і ділових людей більш, ніж з 30 країн світу, стурбованих перспективами розвитку людства [13]. Ці дослідження відзначені абсолютно новою якістю. Основною їх особливістю є обґрунтування необхідності глобальної експертизи розвитку, зростання, прогнозу та контролю тієї цілісності, яка представляється у вигляді єдиного математичного моделювання та обчислювального експерименту світового господарства. Ці перші спроби призвели до фундаментальних труднощів неоднозначного тлумачення цілісності таких понять як права людини, економічна доцільність, екзистенційні, месіанські мотиви релігійного фундаменталізму та ін. В результаті була сформульована загальна концепція глобального моделювання [6], яка дозволяє підвести визначену наукову базу під ці розробки. У зв'язку з глобалістикою і математичним моделюванням особливо важливою виявилася роль системного підходу, системного способу мислення, системної методології [2 – 5].

Системний підхід по відношенню до математичного моделювання виступає в двох аспектах: як метатеорія і як елемент методології [9].

Для організовано складних об'єктів при описі їх мовою системної теорії характерно ще більше зближення елементної бази з цілісними властивостями аж до повного злиття. Саме в цьому криється основна складність, що виражається в тому, що ідентифікація елементів і цілісних властивостей організовано складних об'єктів стає в значній мірі актом суб'єктивного свавілля дослідника. З цього приводу існує дві точки зору. Песимістична виражається на прикладі біології у вигляді теорії віталізму, яка припускає наявність нематеріальної життєвої сили в будь-якому живому організмі і розглядає складно організований об'єкт, за термінологією Канта, як «річ у собі». Оптимістичний підхід доводить, що компонента суб'єктивізму при певних обмеженнях обов'язково входить в пізнавальний процес вивчення складно організованого об'єкту. Остання точка зору відповідальна за феномен багатомодельності та інтерактивний характер взаємодії в моделі «суб'єкт – оператор». У ряді предметних областей (історія, політика, економіка і деякі інші області) цей феномен супроводжується пропозицією величезного числа моделей.

Методологічний аспект системного підходу дозволяє розглядати пізнавальний процес через призму розгортання цілого як системи взаємопов'язаних елементів і згортання їх назад в ціле. Схематично це виглядає так: «ціле – система елементів – ціле». Для цього ланцюжка введено спеціальний термін – "елементарний акт моделювання" [8]. Елементарний акт моделювання – це мінімальна методологічна конструкція, в рамках якої можливі висловлювання онтологічного плану, тобто такі висловлювання, в яких робляться твердження про природу елемента і цілісності предметної області.

Моделювання у своєму розвитку пройшло п'ять стадій, остання з яких – стадія глобального моделювання – стала закономірним етапом еволюції методу моделювання [7]. Системне моделювання характеризується наступними рисами:

- 1) представленням об'єкта дослідження у вигляді системи;
- 2) багатомодельністю;
- 3) ітеративною побудовою системної моделі;
- 4) інтерактивністю.

Суб'єкт (оператор) покликаний об'єднати у своїй діяльності формалізоване і неформалізоване знання [8].

Таким чином, під математичним моделюванням розуміють специфічну людську діяльність, що розгортається поетапно (онтологізм, гносеологізм, методологізм) в конкретній пізнавальній ситуації і яка веде до створення надмоделі, що є системним поєднанням окремих елементарних актів моделювання.

Дихотомія «модель – надмодель», укладена у визначенні методу моделювання, схожа на аналогічні конструкції, що з'являються при вивченні структури наукових теорій (А. Койре, І. Лакатос, К. Поппер, Ст. Тулмін, Дж. Холтон, П. Фейєрабенд, а також В. С. Стьюпін, В. А. Лекторский і ряд інших вчених) [4–6]. Сенс подібних дихотомій зводиться до того, щоб визначити і

формалізувати присутність суб'єкта (суб'єкта–модельєра, суб'єкта–оператора) у науковій теорії.

**Постановка завдання.** Людина – елемент автоматизованих систем різного призначення, його характеристики справляють істотний вплив на стійкість і якість функціонування автоматизованої системи. Оцінити вплив людини–оператора на стійкість і якість функціонування системи можна за допомогою моделювання останньої на персональному комп'ютері. Тому актуальною є задача отримання математичної моделі людини–оператора [11–12].

Математична модель людини–оператора повинна враховувати психофізіологічні характеристики людини, а також вплив різного роду зовнішніх факторів на діяльність оператора і її результати [1 – 3].

**Виклад основного матеріалу дослідження.**

Для побудови математичної моделі діяльності людини–оператора, в системах яких оператор виконує функції розпізнавання, стеження або наведення, застосовуються методи теорії автоматичного управління.

Математичний опис, необхідний для дослідження систем керування, виконується у вигляді складних диференціальних, інтегральних або алгебраїчних рівнянь. Для переходу від диференціальних рівнянь високого порядку до алгебраїчних використовують перетворення Лапласа [8]. При цьому у вихідних рівняннях здійснюється заміна реальних змінних і їхніх похідних відповідними зображеннями. Змінна  $t$  має фізичний зміст часу, а функція  $x(t)$  визначає реакцію системи на зовнішнє збурення.

Вказаний метод є найбільш цінним методом аналізу і синтезу при вивченні перехідних процесів в уставленому режимі для лінійних стаціонарних (з постійними параметрами) систем.[8, 9]

Співвідношення:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

називають прямим перетворенням Лапласа. Комплексна змінна  $s = \beta_0 + j\omega$  називається оператором Лапласа, де  $\omega$  –кутова частота,  $\beta_0$  – деяке додатне постійне число. Функція комплексної змінної  $X(s)$  називається зображенням сигналу  $x(t)$  по Лапласу.

Скорочено операція визначення зображення за оригіналом записується:

$$X(s) = L\{x(t)\}, \quad (2)$$

де  $L$  – оператор перетворення Лапласа. Практично над усіма функціями часу можливо виконати перетворення Лапласа. Для знаходження оригіналу функції за її зображенням використовують співвідношення оберненого перетворення Лапласа

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta_0 - j\omega}^{\beta_0 + j\omega} X(s)e^{st} ds, \quad (3)$$

або

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}, \quad (4)$$

де  $L^{-1}$  – оператор оберненого перетворення Лапласа.

Якщо рівняння, що пов'язує вхідний  $X_{\text{вх}}(t)$  та вихідний  $X_{\text{вих}}(t)$  сигнали є лінійними, то систему можна розглядати як лінійну динамічну ланку, рівняння якої має загальний вигляд:

$$a_0 \frac{d^n X_{\text{вих}}(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X_{\text{вих}}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d X_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_n X_{\text{вих}}(t) = b_0 \frac{d^m X_{\text{вх}}(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} X_{\text{вх}}(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{d X_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_m X_{\text{вх}}(t), \quad (5)$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  – постійні коефіцієнти,  $m \leq n$ .

Піддамо рівняння (5) перетворенню Лапласа. Будемо вважати початкові умови нульовими і замінимо оригінали сигналів їх зображеннями за Лапласом.

$$X_{\text{вх}}(s) = L\{X_{\text{вх}}(t)\}, X_{\text{вих}}(s) = L\{X_{\text{вих}}(t)\} \quad (6)$$

Використавши теорему перетворення Лапласа та диференціювання, отримаємо рівняння, що пов'язує зображення вхідного та вихідного сигналу:

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) X_{\text{вих}}(s) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m) X_{\text{вх}}(s) \quad (7)$$

Звідси відношення зображень вихідного та вхідного сигналів:

$$\frac{X_{\text{вих}}(s)}{X_{\text{вх}}(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (8)$$

Даний вираз не залежить від зображень сигналів, а визначається лише параметрами самої динамічної ланки  $a_i, b_i$  та має вигляд дробнораціональної функції.

Відношення зображень вихідного та вхідного сигналів називають функцією передачі динамічної ланки. Функція передачі – це один із способів математичного опису лінійної динамічної системи.

Загальний вигляд функції передачі:

$$W_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)} \quad (9)$$

де  $B_m(s)$  та  $A_n(s)$  – алгебраїчні поліноми порядку  $m$  та  $n$ ,  $\tau$  – постійне запізнення.

Якщо виконати підстановку  $s = i\omega$ , де  $\omega$  – кутова частота вхідного сигналу, то функцію передачі можна записати у комплексному вигляді:

$$W_m(i\omega) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)} e^{-s\tau} \quad (10)$$

Розглянемо процес обробки вхідного сигналу людиною–оператором.

На схемі (рис.1) людина представлена функцією передачі  $W_m(s)$  і джерелом так званого залишку (ремнанти  $r(t)$ ) – збурення, яке вносить в систему оператор під час роботи.

Ремнанта – це та частина вихідного сигналу, яка не може бути отримана лінійним перетворенням вхідного сигналу.

До джерел, що породжує залишок, відносять наступне:

1. Оператор реагує не тільки на сигнал, на який повинен реагувати, але й на деякий інший сигнал.

2. Нелінійна частина реакції на вхідний сигнал.

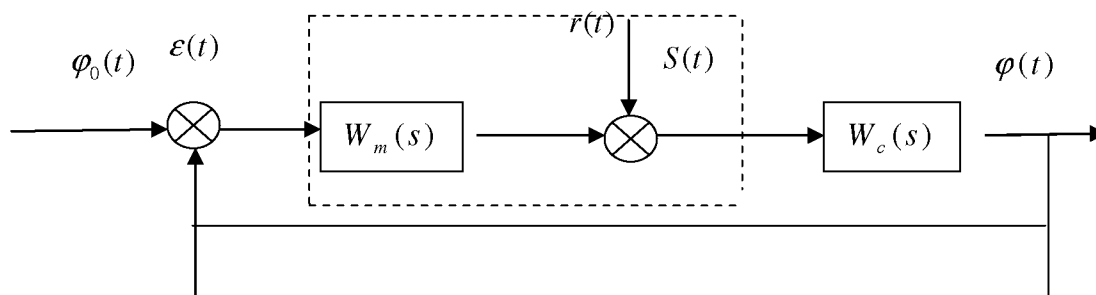


Рис. 1. Схема процесу слідкування за вхідним сигналом з участю людини–оператора.

3. Власний шум оператора, який не має ні лінійного, ні нелінійного зв'язку з вхідним сигналом.

4. Змінність параметрів функції передачі оператора. Функція передачі описує усереднений для даного досвіду або для серії дослідів результат. Для коротких інтервалів часу, а також для окремих дослідів можливі відхилення величин параметрів від середніх значень. Викликана цим розбіжність значень лінійної реакції в порівнянні з усередненою реакцією міститиметься в залишку.

Послідовно з людиною–оператором на рис.1 включений лінійний об'єкт управління з функцією передачі  $W_c(s)$ . Вхідна і вихідна величини замкненої системи позначені відповідно через  $\varphi_0(t)$  та  $\varphi(t)$ , спектральна щільність сигналу –  $I(s)$ . Вхідним сигналом для людини є помилка  $\varepsilon(t) = \varphi_0(t) - \varphi(t)$ .

Вихідна величина сигналу, обробленого людиною–оператором,  $S(t)$  складається з вхідного сигналу, перетвореного оператором, представленим у вигляді функції передачі  $W_m(s)$  та залишку  $r(t)$ :

$$S(t) = L^{-1}\{W_m(s)\varepsilon(s)\} + r(t) \quad (11)$$

Тоді вихідна величина системи буде визначатися наступним виразом:

$$\varphi(t) = L^{-1}\{W_c(s)W_m(s)\varepsilon(s) + W_c(s)r(s)\} \quad (12)$$

Залежність усіх змінних від вхідного сигналу і залишку має вигляд:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1 + W_m(s)W_c(s)} \varphi_0(s) + \frac{W_c(s)}{1 + W_m(s)W_c(s)} r(s); \quad (13)$$

$$I(s) = \frac{W_m(s)}{1 + W_m(s)W_c(s)} \varphi_0(s) + \frac{W_c(s)}{1 + W_m(s)W_c(s)} r(s); \quad (14)$$

$$\varphi(s) = \frac{W_m(s)W_c(s)}{1 + W_m(s)W_c(s)} \varphi_0(s) + \frac{W_c(s)}{1 + W_m(s)W_c(s)} r(s); \quad (15)$$

Надалі задача визначення математичної моделі людини–оператора зводиться до підбору таких величин коефіцієнтів поліномів та запізнення, при яких розрахункова комплексна функція передачі  $W_m(i\omega)$  із задовільною для цілей даного конкретного дослідження точністю співпадає з характеристикою, отриманою в ході проведення експерименту. При цьому, намагаються обмежитися поліномами можливо більш низького порядку.

Методи визначення параметрів функції передачі  $W_m(s)$  людини–оператора засновані на використанні формул спектрального аналізу. Вихідний матеріал

отримують дослідним шляхом в умовах, коли вхідний сигнал системи, тобто закон руху цілі  $\varphi_0(t)$  є випадковою стаціонарною функцією часу і процес слідування набув встановленого характеру.

За експериментальними записами змінних величин розраховують в одних методах тільки модуль частотної характеристики, тобто амплітудно–частотну характеристику, а в інших методах – частотну характеристику повністю, тобто і амплітудно–частотну і фазову частотну характеристики.

Проаналізуємо спектральний метод визначення амплітудно–частотної характеристики, що пов'язує спектральні щільності сигналів на вході та виході лінійної системи.

Якщо на вхід стаціонарної системи, що володіє функцією передачі  $W_m(s)$ , надходить стаціонарна випадкова величина  $X(t)$ , що має спектральну щільність  $I_x(\omega)$ , то у встановленому режимі спектральна щільність  $I_y(\omega)$  вихідного сигналу  $Y(t)$  дорівнює:

$$I_y(\omega) = I_x(\omega)|W(i\omega)|^2, \quad (16)$$

де модуль частотної характеристики  $|W(i\omega)|$  являє собою амплітудно–частотну характеристику системи.

У теорії автоматичного управління формула (8) використовується для аналізу проходження випадкового сигналу через відому динамічну систему. В інженерно–психологічних дослідженнях вона дозволяє знайти амплітудно–частотну характеристику людини–оператора за отриманими із експериментальних даних спектральними щільностями вхідного та вихідного сигналів.

У позначеннях, що вказані на рис.1, вираз для спектральної щільності запишеться у вигляді:

$$|W_m(i\omega)| = \sqrt{I_s(\omega)/I_e(\omega)}, \quad (17)$$

де  $I_s(\omega)$  – спектральна щільність величини, а  $I_e(\omega)$  – спектральна щільність помилки слідування.

Спектральний метод визначення амплітудно–частотної та фазової частотної характеристик використовує взаємну спектральну щільність сигналів і на виході і на вході моделі людини–оператора. Якщо на вхід лінійної стаціонарної системи подається стаціонарний випадковий сигнал, то в сталому режимі взаємна спектральна щільність вихідного і вхідного сигналів дорівнює добутку спектральної щільності вхідного сигналу на частотну характеристику системи:

$$I_{yx}(\omega) = I_x(\omega)W(i\omega), \quad (18)$$

де  $S_{yx}(\omega)$  – взаємна спектральна щільність вихідного та вхідного сигналів, що є комплексною величиною,  $I_x(\omega)$  спектральна щільність вхідного сигналу,  $W(i\omega)$  – частотна характеристика системи.

Застосуємо (18) до (11), не виділяючи залишок (ремнанту) із складу вихідного сигналу, отримуємо робочу формулу цього методу:

$$W_m(i\omega) = \frac{I_{se}(\omega)}{I_e(\omega)}, \quad (19)$$

де  $I_{se}(\omega)$  – взаємна спектральна щільність сигналу  $S(t)$  і помилки  $\varepsilon(t)$ .

### **Висновки:**

1. У статті запропоновано застосування методики математичного моделювання для визначення параметрів лінійної математичної моделі в інженерно–психологічних дослідженнях.
2. Вперше запропоновано представлення лінійної математичної моделі людини–оператора у вигляді функції передачі:

$$W_m(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)}$$

де  $B_m(s)$  та  $A_n(s)$  – алгебраїчні поліноми порядку  $m$  та  $n$ ,  $\tau$  – постійне запізнення.

3. Описані алгоритми знаходження параметрів функції передачі  $W_m(s)$  людини–оператора.
4. Вперше було запропоновано алгоритм знаходження амплітудно–частотної та фазової частотної характеристик моделі людини–оператора за отриманою із експериментальних даних спектральною щільністю вхідного та вихідного сигналів.
5. Амплітудно–частотна характеристика людини–оператора визначається співвідношенням спектральної щільності сигналу на виході системи і сигналу на її вході.
6. У порівнянні з загальними методиками математичного моделювання, наведений у статті алгоритм є більш конкретним, що дозволяє наблизитися до розуміння особливостей психологічної складової людини–оператора, а також оптимізувати операторську діяльність.

### **Література**

1. Плехотников К. Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Методология и практика / Плехотников К. Э. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
2. Пытьев Ю. П. Методы математического моделирования измерительно–вычислительных систем / Пытьев Ю. П. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.–384 с.
3. Никандров В.В. Психофизика и психофизические методы / Никандров В.В.– СПб.: Речь, 2005. – 192 с.
4. Смолян Г. Л. Феномен персональной ЭВМ: философско–методологический аспект. / Смолян Г. Л., Шошников К. Б. ( Вопр. философии. 1986. № 6. С. 42–55.)
5. Носов Н. А. Виртуальная психология / Носов Н. А. – М.: Аграф, 2000. – 432 с.
6. Акчурин И. А. Виртуальные миры и человеческое познание. Концепция виртуальных миров и научное познание / Акчурин И. А. СПб.: РХГИ, 2000.



(Рефераты по науке и технике).

7. Краснощеков П. С. Принципы построения моделей. Математическое моделирование / Краснощеков П. С., Петров А. А. – М.: Изд-во МГУ, 1983. –264 с.

8. Бусленко, Н.П. Моделирование сложных систем / Н.П. Бусленко. – М.: Наука, 1977.

9. Математическое моделирование исторических процессов: материалы II Международной конференции / М.: Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, 2007.

10. Бодров В.А. Психология и надежность: Человек в системах управления техникой / Бодров В.А. – М.: Ин-т психологии РАН, 1998. – 176с.

11. Математическое моделирование социальной и экономической динамики: материалы II Международной конференции (Москва, 20–22 июня, 2007 г) / М.: Российский университет дружбы народов, 2007.

12. Шмельова Т. Ф. Моделювання поведінкової діяльності людини – оператора в авіаційній соціотехнічній системі [Електронний ресурс] / Т. Ф. Шмельова // Системи обробки інформації . – 2012. –Вип. 2. –С. 145–154. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/soi\\_2012\\_2\\_30.pdf](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/soi_2012_2_30.pdf).

13. Семак О. Професійно важливі якості як основа успішності та надійності діяльності людини–оператора [Електронний ресурс] / О. Семак // Збірник наукових праць: філософія, соціологія, психологія. – 2011. – Вип. 16(2). – С.65 - 73. – Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/j-pdf/znpfsp\\_2011\\_16\(2\)\\_10.pdf](http://nbuv.gov.ua/j-pdf/znpfsp_2011_16(2)_10.pdf).