7. *С.Кун*. Матричные процессоры на СБИС:-М.:Мир,1991.- 672 с.
8. . А. С. 1298737 (СССР). Устройство для сортировки чисел. *А.А. Мельник, И.Г. Цмоць* / Бюл. изобретений 1987, №11.
9. *І.Г. Цмоць, Є.М. Пасека, Д.Д. Зербіно*. Систолічний пристрій з вертикальним сортуванням потоків даних. Вісник НУ "Львівська політехніка" "Комп'ютерні науки та інформаційні технології" № 598. Львів 2007. С.31-36.

Поступила 2.10.2013р.

УДК 519.8

В.В. Поліщук, ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

АЛГОРИТМ РАНЖУВАННЯ АЛЬТЕРНАТИВ ЗА БАГАТЬМА КРИТЕРІЯМИ

У роботі розглядається новий ідейний підхід до задачі багатокритеріального вибору альтернатив, особливістю якого є можливість самостійного встановлення важливості критеріїв відносно заданих альтернатив, що знижує суб'єктивізм експертів.

Ключові слова: багатокритеріальний вибір, критерії, альтернативи, кредитування, матриця, оцінка.

Вступ

Для прийняття рішень у політичних, економічних, соціальних, військових та інших задачах виникає потреба у вирішенні задач багатокритеріального вибору та оцінці альтернативних рішень на основі визначеного набору критеріїв. Розв'язавши цю задачу, можна здійснити вибір більш обґрунтовано, ефективно використовуючи апріорну інформацію про вимоги та очікувані результати.

Із стрімким зростанням інформаційних технологій, розробки нових експертних методів для різних прикладних задач користуються великою популярністю. Прийняття рішення в реальних системах вимагає, як правило, оцінки цілої низки критеріїв. Особливу увагу приділяють на розробку математичного апарату, який би давав можливість, тою чи іншою мірою, зменшити суб'єктивний фактор експертів, розкривати нечітку інформацію, мати невелику кількість прозорих і чітких обчислень. У роботі запропонуємо метод, який дає можливість проранжувати альтернативний ряд рішень, при цьому не потребує попарних порівнянь альтернатив.

Математична модель

Розглянемо задачу вибору, яку опишемо за допомогою наступної математичної моделі. Множину альтернатив позначимо через X, і припустимо, що вона скінченна, тобто допустимі альтернативи можна перерахувати $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Позначимо $K = \{K_i, i = 1, 2, ..., m\}$ множину критеріїв ефективності, за допомогою яких проводиться оцінка кожної альтернативи із множини *X*. Задачу вибору можна сформулювати наступним чином: вибрати найкращу альтернативу із множини *X*, коли відомі на цій множині оцінки $K_i, i = 1, 2, ..., m$, де m – кількість оцінок. Модель задачі може бути представлена у вигляді таблиці:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
K_1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1n}
K_2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2n}
$\vdots$				
K_m	O_{m1}	O_{m2}	$\cdots$	O_{mn}

або матриці рішень:

$$O = (O_{ij}),\ i = 1,\ \ldots,\ m;\ j = 1,\ \ldots,\ n; \tag{1}$$

де O_{ij} – це оцінка *j*-ї альтернативи по *i*-му критерію.

Кожен стовпець матриці - це вектор, що характеризує альтернативу, а кожен рядок матриці - критерій. Оцінки по критеріях можуть бути різної природи: якісні, кількісні, лінгвістичні і т.д. Крім того, оцінки несуть у собі невизначеність, суб’єктивізм експертів. Нормалізацію оцінок будемо проводити за допомогою апарату нечіткої логіки і функцій належності [1]. Надалі будемо вважати, що матриця O нормалізована.

Опишемо алгоритм розв’язку задачі вибору найкращої альтернативи за допомогою наступних кроків.

1. Побудуємо матрицю A наступним чином:

$$A = O \times O^T, \tag{2}$$

де O^T - матриця транспонована до матриці O. Дана матриця буде розмірності $m \times m$ і характеризуватиме важливість критеріїв відносно альтернатив [2]. Елементи матриці A будемо позначати $a_{kr}, k = \overline{1,m}, r = \overline{1,m}.$ Крім того, матриця A є симетричною.

Елементи матриці O нормовані, тобто їх значення із інтервалу $[0;1]$. Добуток будь-яких двох елементів буде меншим одиниці, але при матричному множинні елементи матриці A будуть із інтервалу $[0; m]$, оскільки виникає сума m елементів. Тоді постає задача нормування елементів утвореної матриці. Пропонуємо узгодити елементи матриці A наступним чином:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}/m & a_{12}/m & ... & a_{1m}/m \\ a_{21}/m & a_{22}/m & ... & a_{2m}/m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}/m & a_{m2}/m & ... & a_{mm}/m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Елементи матриці A' позначимо $a'_{kr}, k=\overline{1,m}, r=\overline{1,m}$.

2. На другому кроці за допомогою матриці A' будемо знаходити важливість критеріїв.

Для елементів матриці A' визначимо середнє порядку t, або t-норму ($t \in R$) наступним чином:

$$M_t(v_k) = \sqrt[t]{\frac{\sum_{r=1}^{m}\left(a'_{kr}\right)^t}{m}}. \tag{4}$$

Для $t > 0$ виконується нерівність: $\min_r(a'_{kr}) \le M_t(v_k) \le \max_r(a'_{kr})$ [3].

Нехай, поставимо у формулі (4) замість t, кількість критеріїв – m, отримаємо:

$$M_m(v_k) = \sqrt[m]{\frac{\sum_{r=1}^{m}\left(a'_{kr}\right)^m}{m}}. \tag{5}$$

Оскільки, коли $\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{m} = 1$, тоді, не зменшуючи загальності, формулу (5) можемо представити у вигляді:

$$M_m(v_k) = \sqrt[m]{\sum_{r=1}^{m}\left(a'_{kr}\right)^m}. \tag{6}$$

У нашому випадку елементи матриці A' не перевищують одиниці, тоді величина $M_m(v_k)$ також буде з інтервалу $[0;1]$. У частинних випадках із формули (4) через граничний перехід можна до визначати такі величини [3]:

$M_{-1}(v_k) = \dfrac{m}{\sum_{r=1}^{m}\dfrac{1}{a'_{kr}}}$ – середнє гармонійне;

$M_0(v_k) = \sqrt[m]{\prod_{r=1}^{m} a'_{kr}}$ – середнє геометричне;

$M_1(v_k) = \dfrac{\sum_{r=1}^{m} a'_{kr}}{m}$ – середнє арифметичне;

$M_2(v_k) = \sqrt{\dfrac{\sum_{r=1}^{m}(a'_{kr})^2}{m}}$ – середнє квадратичне.

$\min_r(a'_{kr}) \le M_{-1}(v_k) \le M_0(v_k) \le M_1(v_k) \le M_2(v_k) \le \max_r(a'_{kr})$.

Оскільки кожна величина $M_m(v_k) \ge 0$, тоді покладемо:

$$w_k = M_m(v_k) / \sum_{h=1}^{m} M_m(v_h), \tag{7}$$

так, що $\sum_{k=1}^{m} w_k = 1$.

У результаті ми отримали вектор нормалізованих оцінок важливості критеріїв $W = (w_1, w_2, ..., w_m)$, або ваговий вектор.

3. Далі утворимо матрицю B, помноживши кожен стовпець матриці O, що характеризує оцінки альтернатив по критеріях на вектор оцінок їх важливості $W = (w_1, w_2, ..., w_m)$:

$$B = \begin{pmatrix} o_{11} \cdot w_1 & o_{12} \cdot w_1 & \dots & o_{1n} \cdot w_1 \\ o_{21} \cdot w_2 & o_{22} \cdot w_2 & \dots & o_{2n} \cdot w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{m1} \cdot w_m & o_{m2} \cdot w_m & \dots & o_{mn} \cdot w_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матриця B містить у собі отримані оцінки альтернатив по критеріях з врахування їх важливості.

4. На наступному кроці будуємо матрицю C, елементи якої характеризують деяку комплексну оцінку альтернатив (пари альтернатив) із врахуванням важливості критеріїв. Матрицю C отримаємо, перемноживши транспоновану матрицю O^T на матрицю B:

$$C = O^T \times B. \tag{9}$$

Утворена матриця буде розмірності $n \times n$, $C = (c_{ij}), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$ Елемент матриці c_{ij} відповідає парі альтернатив x_i, x_j, відповідно для будь яких $i, j = \overline{1,n}$. Максимальний елемент матриці C характеризує найкращу комбінацію пари альтернатив. Таким чином, побудована матриця C містить важливу інформацію, щодо оцінок альтернатив і містить у собі рекомендації для прийняття рішень.

Для ранжування окремих альтернатив переходимо до наступного кроку.

5. Приймати рішення щодо вибору альтернатив будемо наступним чином. Для кожної альтернативи просумуємо елементи матриці C по рядку і утворені оцінки нормалізуємо:

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, i = \overline{1,n}. \tag{10}$$

$$Z_i = \frac{s_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} s_i = 1. \tag{11}$$

Таким чином, вектор $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ – утворений ранжувальний ряд альтернатив. Найкращу альтернативу будемо вибирати, як максимальну оцінку – $Z^* = \max_i Z_i$.

Отже, ми показали методику, за допомогою якої можна будувати ранжувальний ряд альтернатив. Даний метод відрізняється від інших тому, що не потребує багато обчислень, сам будує оцінки важливостей критеріїв, на основі заданих альтернатив, що дозволяє знизити суб'єктивізм експертів.

Приклад роботи методу

Математичну модель задачі вибору розглянемо на прикладі вибору підприємства для надання кредиту. Нехай у банк поступило шість заявок від підприємств. Підприємства будемо розглядати як альтернативи, серед яких ОПР має обрати одне для видачі кредиту. Їх критеріальні оцінки подано у вигляді наступної таблиці:

i	x_1		x_2		x_3		x_4	
	K_i	K_i – *нормоване*	K_i	K_i – *нормоване*	K_i	K_i – *нормоване*	K_i	K_i – *нормоване*
1	0,26	1	0,11	0	0,21	0,08	0,23	0,28
2	0,4	0	1,1	1	0,6	0,08	0,7	0,32
3	1,1	0,13	1,7	0,93	2,4	0,13	2,2	0,4
4	1,1	0,9	2,3	0	0,5	0,5	1,7	0,3
5	0,1	0,2	0,9	0,2	0,8	0,4	0,5	1

Матриця рішень O наступна:

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}08 & 0{,}28 \\ 0 & 1 & 0{,}08 & 0{,}32 \\ 0{,}13 & 0{,}93 & 0{,}13 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$$

На першому етапі побудуємо матрицю за формулою (2):

$$A = O \times O^T = \begin{pmatrix} 1{,}08 & 0{,}10 & 0{,}25 & 1{,}02 & 0{,}51 \\ 0{,}10 & 1{,}11 & 1{,}07 & 0{,}14 & 0{,}55 \\ 0{,}25 & 1{,}07 & 1{,}06 & 0{,}30 & 0{,}66 \\ 1{,}02 & 0{,}14 & 0{,}30 & 1{,}15 & 0{,}68 \\ 0{,}51 & 0{,}55 & 0{,}66 & 0{,}68 & 1{,}24 \end{pmatrix}.$$

За формулою (3) знаходимо матрицю A':

$$A' = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}02 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}02 & 0{,}22 & 0{,}21 & 0{,}03 & 0{,}11 \\ 0{,}05 & 0{,}21 & 0{,}21 & 0{,}06 & 0{,}13 \\ 0{,}20 & 0{,}03 & 0{,}06 & 0{,}23 & 0{,}14 \\ 0{,}10 & 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}14 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо значення ваг параметрів за відповідними формулами (6) і (7):

$$v = (0{,}243;\ 0{,}251;\ 0{,}247;\ 0{,}254;\ 0{,}254), \quad w = (0{,}195;\ 0{,}201;\ 0{,}198;\ 0{,}203;\ 0{,}203).$$

Після цього утворимо матрицю B за формулою (8):

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}195 & 0{,}000 & 0{,}016 & 0{,}055 \\ 0{,}000 & 0{,}201 & 0{,}016 & 0{,}064 \\ 0{,}026 & 0{,}184 & 0{,}026 & 0{,}079 \\ 0{,}183 & 0{,}000 & 0{,}102 & 0{,}061 \\ 0{,}041 & 0{,}041 & 0{,}081 & 0{,}203 \end{pmatrix}.$$

На наступному етапі перемножуємо матриці O^T і B:

$$C = O^T \times B = \begin{pmatrix} 0{,}37 & 0{,}03 & 0{,}13 & 0{,}16 \\ 0{,}03 & 0{,}38 & 0{,}06 & 0{,}18 \\ 0{,}13 & 0{,}06 & 0{,}09 & 0{,}13 \\ 0{,}16 & 0{,}18 & 0{,}13 & 0{,}29 \end{pmatrix}.$$

На останньому кроці будуємо ранжувальний ряд (11):

$$Z = (0{,}276;\ 0{,}259;\ 0{,}161;\ 0{,}304).$$

Альтернативи упорядковуємо по спаданню: $x_4;\ x_1;\ x_2;\ x_3$. Робимо висновок, що найкраще підприємство – x_4 **.**

Висновки

У роботі запропоновано ідейний підхід до задачі багатокритеріального вибору альтернатив. Особливістю є те, що дана математична модель встановлює оцінки важливості критеріїв відносно альтернатив, знижуючи суб'єктивізм експертів, не потребує попарних порівнянь альтернатив та багато обчислень. Математичну модель можна застосувати, як для вибору найкращої альтернативи, так і для вибору найкращої комбінації альтернатив. Як приклад застосування моделі показано на економічній задачі вибору підприємства для надання банком кредиту.

1. *Маляр М.М.* Нечітка модель оцінки фінансової кредитоспроможності підприємств/ Маляр М.М., Поліщук В.В.// Східно-Європейський журнал передових технологій. Сер. Математика і кібернетика – фундаментальні і прикладні аспекти. – Харків, 2012. - №3/4(57). – С.8-16.

2. *Маляр Н.Н.* Подход к определению приоритетов альтернатив для задач многокритериального выбора / Н.Н. Маляр // Проблемы управления и информатике. №4. – 2011. - С. 63-67.

3. *Беккенбах Є.* Неравенства/ Беккенбах Є., Беллман Р./ Мир – М., 1965. – 276 с.

Поступила 25.9.2013р.