УДК 378

Т.І. Савочкіна

МЕТОДОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ МЕТАМАТЕМАТИЧНИХ ТВЕРДЖЕНЬ В НАВЧАЛЬНИХ КУРСАХ ОСНОВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Проаналізовано твердження і поняття, пов'язані з аксіомою вибору і проблемою доведення; розкрито їх методологічне і методичне значення в навчальних курсах математики.

***Ключові слова**: метаматематика, аксіома вибору, проблема доведення.*

Проанализированы утверждения и понятия, связанные с аксиомой выбора и проблемой доказательства; раскрыто их методологическое и методическое значение в учебных курсах математики.

***Ключевые слова**: метаматематика, аксиома выбора, проблема доказательства.*

We conducted the analysis of assertions and notions related to the axiom of choice and problem of proof; their methodological and methodical value was exposed in the educational courses of mathematics.

***Key words**: metamathematics, axiom of choice, problem of proof.*

Постановка проблеми. Як відомо, основним предметом дослідження метаматематики є вивчення формальних математичних систем щодо несуперечності, категоричності і повноти [10; 11]. Метаматематика дає можливість зробити поглиблений аналіз застосування різноманітних методів як в дослідженні абстрактної математичної теорії, так і в процесі викладання відповідної навчальної дисципліни (наприклад, алгебри, геометрії і теорії функцій). Отже, необхідно дослідити шляхи застосування нефінітних методів доведення і аксіоми вибору в навчальних курсах основних математичних дисциплін (МД). Апарат метаматематики зумовлює появу нових засобів для дослідження конкретної математичної теорії або математичної проблеми, пов'язаної з обґрунтуванням математики [11, с. 6 –10]. Доцільно акцентувати увагу на основні якісно різні періоди появи метаматематичних тверджень (ідей) в математиці (а тому і в конкретній навчальній МД):

а) період «накопичення» різних сумнівних тверджень (парадоксів) D_1, D_2,..., D_k, які не знаходять обґрунтування в межах заданої теорії T;

б) період «ревізії» системи аксіом та правил «доведення», перехід до деякого розширення T_1 теорії T;

в) обґрунтування несуперечності теорії T в межах теорії T_1 («усунення» парадоксів D_1, D_2, ..., D_k);

г) дослідження теорії T на категоричність і повноту.

Вже у середині XIX ст. математичних фактів накопичилося стільки, що настав час звернутися до аналізу і переосмислення основ математики [8, с. 6 –12]. Так сформувалися теорії класів, математичних систем, алгоритмів та ін., які й стали важливими об'єктами дослідження нової наукової теорії – метаматематики. Зокрема, математики стали більш відповідальніше підходити до питань чіткості під час введення понять і побудови доведень. Проведені щодо цього дослідження основ алгебри, геометрії і математичного аналізу стали основою для задач, які заклали засади сучасної метаматематики [16, с. 10 –18; 20, с. 7 – 13]. Сучасна алгебра стала більш абстрактною, що вимагає певних трансформацій відповідного навчального курсу. У зв'язку з цим достатньо наголосити на появі теорій категорій, формацій, многовидів, булевих алгебр, абстрактної теорії алгебраїчних систем. Математичний аналіз в результаті метаматематичних досліджень збагатився новими ідеями і методами, що привело до появи нових дисциплін (функціональний аналіз, конструктивна теорія функцій, теорія диференціальних й інтегральних операторів та ін.). Слід також зазначити про появу абстрактної теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, математичну теорію катастроф. Нарешті метаматематичний аналіз основ евклідової геометрії привів до появи ряду неевклідових геометрій (гіперболічної, ріманової, проективної, простору постійної кривизни та ін.) [1, с. 5 – 350].

Дослідження у сфері метаматематики суттєво впливають і на побудову навчальних курсів МД. До особливостей викладання основних МД належить [17]:

1) розширення сфери застосування математичних методів;

2) поява нових математичних теорій, а тому і нових МД, яким притаманні нові узагальнюючі поняття і вищий ступінь абстракції;

3) розвиток методологічних і методичних досліджень у напрямі підвищення ефективності викладання основних МД;

4) застосування нових інформаційних технологій в навчальному процесі;

5) застосування фінітних і нефінітних методів доведень.

Аналіз актуальних досліджень. Питання, пов'язані із застосуванням метаматематики, розглядалися в роботах Є. Расєвої, Р. Сикорського, С. Кліні, Д. Гільберта, А. Робинсона, Е. Енглера, Р. Смальяна, Ю. Янова. Зазначимо, що теорія доведень в математиці є об'єктом самостійного дослідження (конструктивна математика) [14; 16; 18]. Однак йдеться не лише про метаматематичне дослідження поняття доведення твердження, а й про короткий опис сучасного наукового тлумачення цього поняття у конкретній навчальній МД. Для цього необхідно чітко уявити таке:

1) поняття твердження у формальній аксіоматичній теорії суттєво відрізняється від доведення теорем у навчальних курсах МД;

2) неприпустимо, на наш погляд, проводити свідомо неповне доведення теореми і видавати його за логічно обґрунтоване;

3) важливою є розробка методики навчання доведень тверджень із урахуванням специфіки конкретної МД.

Слід зазначити, що з розробки теорії доведення математичних тверджень фактично започаткувалося становлення метаматематики як самостійної наукової теорії [8]. Було детально і ґрунтовно проаналізовано суть математичного «доведення» і різноманітних проблем, пов'язаних з ним (континууму, несуперечності, нескінченності, застосування аксіоми вибору, нефінітних доведень, алгоритмічні проблеми та ін.). Щоб зберегти всі досягнення класичної математики, зокрема використання в доведеннях актуальної нескінченності, Д. Гільберт розробив програму побудови основ математики [8]. У ній він запропонував формалізувати всю математику, побудувати її як формальну аксіоматичну теорію. Така теорія є точним математичним об'єктом, який у свою чергу є предметом розгляду іншої вже змістовної теорії, котру Д. Гільберт назвав метаматематикою. У цій теорії (на початку її зародження) допускалися лише так звані фінітні методи доведення тверджень, тобто розгляд тільки скінченного числа конкретно заданих символів і конкретних тверджень про скінченні ланцюги цих символів. З огляду на це в математиці (за Гільбертом) не допускаються нефінітні методи доведень, зокрема неконструктивні доведення існування об'єктів. Завершальним і водночас центральним пунктом програми Гілберта є необхідність доведення несуперечності формальної математики. Проте програма Гілберта в цілому виявилася нездійсненною. Цей результат установив видатний математик К. Гедель. У своїх визначних теоремах про неповноту він довів принципіальну обмеженість методу формалізації [6, с. 230 – 265].

Зазначимо, що ця робота є продовженням досліджень започаткованих в роботі автора «Методологічні та педагогічні аспекти метаматематики» [17]. Крім того, фактичний матеріал, що містять підручники і навчальні посібники з основних МД університетів, використовується без указівок на джерела, тобто вважається відомим.

Мета статті – проаналізувати деякі ідеї метаматематики, пов'язані з аксіомою вибору та проблемою «доведення» в математичних теоріях і зокрема у відповідних навчальних МД; обґрунтувати доцільність методологічної і педагогічної характеристики означених проблем для навчального процесу.

Виклад основного матеріалу. Усе вищезазначене про предмет і метод метаматематики та закономірність її розвитку повністю стосується і проблеми доведення й аксіоми вибору (АВ) як однієї з найважливіших проблем математики та її різноманітних застосувань.

До основних методів формування конкретної математичної дисципліни (зокрема алгебри і теорії чисел) належать: змістовно-аксіоматичний, аксіоматичний, конструктивний методи та метод формалізації [6]. Аналіз застосувань означених методів в навчальному курсі МД доцільно проводити за такими п'ятьма напрямами.

Перший напрям містить питання доцільності відповідного математичного (логічного) рівня викладання на кожному етапі навчання для того, щоб цей рівень був досяжним для студентів і сприяв їх подальшому логічному розвитку.

Напрям другий передбачає дослідження можливостей вивчення основних методів побудови математичної теорії (а тому і МД) на конкретному розділі математики у певному методичному аспекті, враховуючи рівень математичної підготовки студентів. Він містить: вибір навчального предмету; теми, які найбільш доцільні для ознайомлення із сучасною методологією побудови конкретної МД; розробку методики її викладання.

Третій напрям вирішує питання метаматематичного характеру. Важливо більше уваги приділяти побудові конкретних аксіоматичних (формалізованих) теорій. Зокрема, бажано розкрити зміст проблем нескінченності (ПА), несуперечності (ПБ) і континууму (ПВ). Тобто, необхідно провести методологічний і педагогічний аналіз деяких ідей метаматематики, пов'язаних з проблемами (ПА), (ПБ), (ПВ) у навчальних курсах алгебри, геометрії і математичного аналізу. Питання, пов'язані з неевклідовими геометріями, з формалізацією математичної логіки й арифметики, ознайомлення студентів з аксіомою вибору і її еквівалентами, сприятимуть фаховій підготовці вчителів математики. Слід зазначити, що перехід від змістовного викладання математики (наприклад, теорії груп, теорії алгоритмів або теорії ймовірностей) до формального пояснюється як перехід від аксіоматизації змісту до аксіоматизації форми – математичної мови, на якій викладено цей зміст.

Щодо четвертого напряму достатньо зауважити, що використання нефінітних методів дає можливість в навчальному курсі значно спростити доведення ряду важливих теорем математики. Так, наприклад, відома теорема про повноту числення висловлень є рівносильною теоремі Стоуна про зображення булевої алгебри [7]. Теорему Геделя про повноту числення предикатів можна отримати як результат застосування теореми Бера про множини першої категорії в топологічних просторах [10, с. 9 – 16].

П'ятий напрям стосується побудови різноманітних моделей (інтерпретацій) математичної теорії та їх застосувань в навчальних МД; обґрунтування доцільності (з огляду на педагогіку) використання конкретної моделі в навчальному процесі. Так, наприклад, у навчальному процесі розглядаються моделі векторного простору над фіксованим полем *P*; моделі функціонального простору; метричного простору; ймовірнісного простору; проективного простору; теорії булевих алгебр. Зазначимо як приклад, що для теорії булевих алгебр існують такі інтерпретації (моделі): алгебра подій, алгебра висловлень, алгебра множин. У свою чергу, алгебра подій як ймовірнісній простір має класичну, дискретну, геометричну і теоретико-множинну моделі. Слід також зауважити, що, коли розглядається скінченний ймовірнісний простір *M*, поняття класичної моделі зводиться до теоретико-множинної моделі, оскільки всякий скінченний простір *M* ізоморфний алгебрі всіх підмножин деякої підмножини *A* (як *A* достатньо взяти множину всіх елементарних подій алгебри *M*). Це активно використовується для розв'язування задач на обчислення ймовірності подій, коли всі ці елементарні події рівноможливі. Наведені приклади свідчать, що одна математична теорія T_1 може бути моделлю для іншої теорії T_2. Отже, поняття математичної моделі є відносним.

Згідно з основними вимогами метаматематики для того, щоб побудована математична теорія *T* (а тому і відповідна МД) мала певне значення для теорії *T*, повинна існувати хоча б одна модель (інтерпретація), яка реалізує цю теорію [10]. Одна й та сама математична теорія може реалізуватися у різних моделях. Наведемо приклади:

а) теорія лінійного простору *V* розмірності $n = 3$ над заданим полем *F* має наступні інтерпретації (моделі), які детально вивчаються в навчальному курсі лінійної алгебри: арифметична модель R_3 над полем дійсних чисел *R*, простір паралельних перенесень Π_3, простір направлених відрізків T_3;

б) у курсі функціонального аналізу об'єктом дослідження є теорія абстрактного гільбертового простору *H*, основними моделями якого є: простір l_2 – множина всіх послідовностей $\{z_n\}$, $n \in N$, комплексних чисел z_n, таких, що наступний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ є збіжним; простір $L_2[0;1]$ – простір комплексних функцій, визначених і вимірних на відрізку [0;1] й інтегрованих в квадраті [12];

в) у курсі алгебри прикладами моделей теорії груп є групи симетрій правильних многогранників, числові групи, групи підстановок [19];

г) у навчальному курсі геометрії досліджуються такі моделі гіперболічної площини: Пуанкаре та Келі-Клейна [1].

Оскільки два лінійних простори однакової розмірності над одним і тим самим полем ізоморфні, то теорія таких просторів категорична. Крім того, в курсі функціонального аналізу доводиться теорема, що всякі два сепарабельні гільбертові простори ізоморфні, а тому теорія таких просторів також категорична [12]. Оскільки існують дві скінченні не ізоморфні групи одного і того самого порядку, то теорія скінченних груп некатегорична [19]. Теорія гіперболічної площини, як відомо, є категоричною теорією [1].

При побудові конкретної математичної теорії (а також відповідної навчальної МД) важливого значення набувають питання, пов'язані із поняттям доведення теореми (твердження). Зазначимо, що доведення теореми в заданій МД можна здійснювати лише на змістовно-аксіоматичному рівні. Про чітке доведення може йтися лише в межах побудови формальної математичної теорії (або її частини в математичній логіці, або в навчальному курсі числових систем). З огляду на це, математична теорія T має вигляд: $T = \{L\ P, \Sigma, \text{ПД}\}$, де L – логічна система, P – множина основних понять та індивідуальних предметів (елементів); Σ – фіксована система аксіом, ПД – правила виведення, за допомогою яких будується доведення теорем теорії T [6]. Побудована таким способом конкретна математична дисципліна має достатньо високий ступінь формалізації. У такій МД доведення теореми має чітко визначений характер. Так, доведенням в теорії T уважають скінченний ланцюг формул (тверджень): $D_1, D_2, \ldots, D_n$ теорії T, для якої кожне твердження D_i є або аксіомою, або зумовлене попередніми за правилами виведення із ПД. Якщо існує хоча б один такий ланцюг $\{D_i\}$, який закінчується твердженням D (тобто $D_n = D$), то за означенням D є теоремою теорії T. У зв'язку з аналізом поняття «доведення» в математичній теорії T доцільно (в навчальному курсі МД) звернути увагу на те, що існують такі твердження, для яких невідомо, чи вони є істинними, чи хибними. Так, наприклад, в навчальному курсі теорії чисел бажано розглянути дві проблеми [15]: 1) проблема Гольдбаха-Ейлера – всяке парне число $n > 2$ можна подати у вигляді суми двох простих чисел; 2) гіпотеза про існування нескінченної множини простих чисел серед чисел виду $M_n = 2^n - 1$, де n – натуральне.

Щодо першої проблеми зазначимо, що безпосередня перевірка дає позитивний результат. Так, наприклад, маємо: 2010 = 2003 + 7, 15050 = 5077 + 9973. Однак загального доведення означеної проблеми не знайдено і закономірності розкладу чисел не виявлено. Можливо взагалі ніякої закономірності не існує, а гіпотеза є справедливою. Відносно другої проблеми слід зауважити, що прості числа виду M_n називаються простими числами Мерсена [15]. Серед чисел M_n є як прості, так і складені. Наприклад, число $M_{11} = 2047 = 2^{11} - 1 = 23{\cdot}89$ – складене, а число $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$ – просте. У 2008 р. було встановлено, що число M_n, де $n = 43112609$ є простим і воно найбільше з усіх відомих простих чисел на даний момент.

Дослідження цих проблем продовжується і нині. Доцільно зауважити, що другу гіпотезу інтуїціоністи вважають такою, що не може бути ні істинною, ні хибною, вона належить до нової категорії «сумнівних» істин. Однак, з огляду на історію математики, категорія «сумнівних» істин є поняттям відносним, про що йдеться в історії проблеми континууму і проблеми існування алгоритму для розв'язування діофантових рівнянь [2; 5]. Проблема континууму та аксіома вибору відіграють важливу роль як безпосередньо при побудові математичної теорії, так і під час викладання окремих математичних дисциплін. Метаматематичні і методологічні аспекти проблеми континууму досліджено в роботі автора «Методологічні та педагогічні аспекти метаматематики», а тому у подальшому основним об'єктом нашого дослідження є аксіома вибору (АВ). Сформулюємо аксіому вибору так: нехай $\{A_i\}$, де $i \in I$,– сімейство множин A_i, які попарно не перетинаються і $A = \bigcup_i A_i$. Тоді існує функція φ: $\{A_i\} \to A$ така, що для кожного індекса $i \in I$ значення $\varphi(A_i) \in A_i$. Дослідження логічних основ АВ та законність її застосування належить до складних і суперечливих питань обґрунтування теорії множин. Однак, як показала практика, обійтися без цієї аксіоми неможливо (зокрема під час викладання МД). Так, наприклад, відомі закони $\alpha + \alpha = \alpha$ і $\alpha^2 = \alpha$ для нескінченного кардинального числа α неможливо довести без використання аксіоми вибору [3, с. 270]. Ця аксіома необхідна для встановлення таких фактів із навчального курсу теорії функцій:

кожна нескінченна множина містить зчисленну підмножину; всяку непусту множину можна цілком упорядкувати; всякий ланцюг елементів упорядкованої множини міститься в деякому максимальному ланцюгові; якщо всякий ланцюг L упорядкованої множини M має верхню грань, то всякий елемент $a \in M$ «міститься» в деякому максимальному елементі [13, с. 27 – 30].

Зазначимо, що застосування аксіоми вибору є характерною ознакою нефінітних доведень в математиці. Проілюструємо цей факт на таких прикладах. Розглянемо нескінченну множину $B \subset R$ і нехай вона має точну верхню межу $\theta \notin B$. У навчальному курсі доводиться, що існує послідовність $\{a_n\}$, яка збіжна до θ і всі члени якої належать B. Фактично розглядається сімейство підмножин $\{B_n\}$, де $B_n = B \cap (\theta - \frac{1}{n}; \theta]$, $n \in N$. Далі стверджується, що у кожній із множин B_n можна вибрати по одному елементу b_n. Однак останній факт обґрунтувати без аксіоми вибору неможливо. Розглянемо ще один приклад з навчального курсу функціонального аналізу. Нехай нам потрібно обчислити $\sqrt{2009}$ з точністю до 0,0001. У обчислювальній математиці розроблено метод послідовних наближень, за допомогою якого можна діставати наближення (з наперед заданою точністю) до відомої нерухомої точки, яка є точним розв'язком рівняння $x^2 - 2009 = 0$. Цей метод базується на принципі відображень стиску – фундаментальній теоремі функціонального аналізу (теорема С. Банаха [12, с. 147 – 149]). Ми розглядаємо оператор $Ax = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2009}{x}\right)$, який відображає проміжок $T = [44{,}8; 44{,}9]$ в себе. Оскільки A – оператор стиску, то за теоремою Банаха існує точка $x_0 \in T$, що $Ax_0 = x_0$. Покладемо $x_1 = 44{,}8$ і для $n \geq 1$ нехай $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2009}{x_n}\right)$. Тоді $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, а тому значення x_0 можна обчислити з наперед заданою точністю, використовуючи послідовність $\{x_n\}$. Однак доведення теореми Банаха є нефінітним, воно суттєво ґрунтується на аксіомі вибору. Крім того зазначимо, що застосування аксіоми вибору дає можливість установити існування множин, які не мають міри за Лебегом [12]. Особливо слід звернути увагу, що аксіома вибору суттєво використовується в доведеннях математичних тверджень методом трансфінітної індукції [3]. Нарешті, слід зауважити, що під час викладання основних МД доцільно звертати увагу студентів на застосування тверджень, які рівносильні аксіомі вибору і які розкривають її логічне і методичне значення. До таких тверджень (зокрема) належать: теорема Цермело, теорема Хаусдорфа, теорема Куратовського-Цорна [13, с. 27 – 30]. Нехай Σ – система аксіом теорії множин T (наприклад, система аксіом Геделя-Бернайса або система Цермело-Френкеля [10]). Покладемо $\Sigma = \Sigma_1 \cup \{AB\}$, де AB – аксіома вибору, і нехай T_1 – теорія множин, що визначається системою аксіом Σ_1. У межах теорії T (із припущення несуперечності теорії T_1) було встановлено несуперечність і незалежність AB [6].

Так, з одного боку відмова від аксіоми вибору при побудові математичної теорії T суттєво «збіднює» теоретико-множинні побудови. З іншого – критика теорії множин T і спроби обійтися без аксіоми вибору привели до появи таких визначних теорій, як теорія рекурсивних функцій і такого важливого поняття як обчислюване число [14].

Висновки і перспективи подальших досліджень. Отже, ми провели дослідження особливостей побудови навчального курсу МД, пов'язаних з деякими метаматематичними аспектами, зокрема, розкрили методологічне і педагогічне значення аксіоми вибору і проблеми «доведення» в математиці. Також обґрунтували той факт, що метаматематичні твердження в навчальному процесі універсальні і є ефективними носіями міжпредметних зв'язків основних МД. Під час дослідження встановлено, що аналіз метаматематичних проблем розкриває більш досконалу логічну і математичну структуру навчального курсу, сприяє поглибленню професійної підготовки майбутніх магістрів математики. В перспективі подальших досліджень у цій сфері можуть бути трансформації навчальних курсів МД.

Література

1. *Александров А.Д.* Основания геометрии. / А.Д. Александров – М.: «Наука», 1987. – 388 с.
2. *Александров П.С.* Проблемы Гильберта. / П.С. Александров – М.: «Наука», 1969. – 239 с.
3. *Биркгоф Г.* Теория решеток. / Г. Биркгоф – М.: «Наука», 1984. – 568 с.
4. *Болибрух А.А.* Проблемы Гильберта (100 лет спустя). / А.А. Болибрух – М.: МЦНМО, 1999. – 24 с.
5. *Варпаховский Ф.Л., Колмогоров А.Н.* О решении десятой проблемы Гильберта // Квант, 1970. – №7. – С. 39 – 44.
6. *Вивальнюк Л.М.* Числові системи. / Л.М. Вивальнюк, В.К. Григоренко, С.С. Левіщенко – К.: «Вища школа», 1988. – 271 с.
7. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. / Д.А. Владимиров – М.: «Наука», 1969. – 318 с.

8. *Гильберт Д.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. / Д. Гильберт, П. Бернайс – М.: «Наука», 1979. – 557 с.
9. *Гихман И.И.* Теория вероятности и математическая статистика. / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко – К.: «Вища школа», 1988. – 440 с.
10. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. / С.К. Клини – Изд.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 528 с.
11. *Колмогоров А.М.* Елементи теорії функцій и функціонального аналізу. / А.М. Колмогоров, С.В. Фомін – К.: «Вища школа», 1974. – 543 с.
12. *Курош А.Г.* Курс лекций по общей алгебре. / А.Г. Курош – М.: «Изд. иностр. лит.», 1962. – 396 с.
13. *Марков А.А.* Теория алгоритмов. / А.А. Марков, Л.М. Нагорний – М.: «Наука», 1984. – 432 с.
14. *Постников М.М.* Введение в теорию алгебраических чисел. / М.М. Постников – М.: «Наука», 1982. – 240 с.
15. *Расёва Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. / Е. Расёва, Р. Сикорский – М.: «Наука», 1972. – 591 с.
16. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. / А. Робинсон – М.: «Наука», 1967. – 189 с.
17. *Савочкіна Т.І.* Методологічні та педагогічні аспекти метаматематики // Збірник наукових праць. Педагогічні науки. – В.49. – Херсон: Видавництво ХДУ, 2008. – С. 301 – 308.
18. *Смальян Р.* Теорія формальних систем. / Р. Смальян – М.: «Наука», 1981. – 208 с.
19. *Холл М.* Теория групп. / М. Холл – М: Изд. иностр. лит., 1962. – 468 с.
20. *Энглер Э.* Метаматематика элементарной математики. / Э. Энглер – М.: «Мир», 1987. – 146 с.
21. *Янов Ю.И.* Математика, метаматематика и истина. / Ю.И. Янов – М.: Препринт, Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2006. – 32 с.