УДК 519.21

В.В. Гончаров, доц., канд. фіз.-мат. наук, С.Я. Гончарова, доц., канд. фіз.-мат. наук
Кіровоградський національний технічний університет

Стохастична стійкість імпульсного процесу переносу з швидкістю, що залежить від стану випадкового середовища

Досліджується стохастична стійкість імпульсного процесу переносу в напівмарковському випадковому середовищі.
імпульсний процес переносу, напівмарковський процес, стохастична стійкість

Провідною метою даної роботи є подальший розвиток напівмарковських випадкових еволюцій та еволюційних систем.

Досліджується стохастична стійкість імпульсного процесу переносу в напівмарковському випадковому середовищі, що має інтерпретацію напівмарковської випадкової еволюції.

Такі процеси є природними абстрактними моделями різних фізичних процесів, що протікають під впливом випадкових факторів зовнішнього середовища. Стохастичними процесами переносу описуються, наприклад, процеси коливань гармонійного осцилятора, процеси поширення хвиль в брусах.

Проблеми стохастичної стійкості напівмарковських поцесів розглядались в [1], [2].

Нехай (Ω, F, P) імовірнісний простір, на якому розглядатимемо випадкові величини із значеннями у вимірному просторі (X, X).

Нехай $z(t)$ є розв'язком інтегрального рівняння

$$z(t) = z + \int_T^t \upsilon(z(s), x(s))ds - \sum_{k=\nu(T)}^{\nu(t)} a(x_k), \tag{1}$$

де $t \ge T > 0$,

$0 < z < \infty$ – числовий параметр;

$\upsilon(z, x)$ – функція неперервна, невід'ємна, неперервно диференційовна по z, обмежена по x при кожному $z \in R$ і така, що $\upsilon(0, x) = 0$, $\forall x \in X$, та $0 \le \upsilon'_z(z, x) \le K$, $K > 0$;

$a(x)$ – невід'ємна, вимірна, обмежена функція на X;

$x(t)$ – напівмарковський процес, такий, що

$$x(t) = x_{\nu(t)}, \tag{2}$$

$$\nu(t) = \max\{n: \tau_n \le t\}, \quad \tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad n \ge 0, \quad \tau_0 = 0, \tag{3}$$

де τ_n – моменти відновлення;

θ_k – невід'ємні випадкові величини, що задають інтервали між моментами відновлення.

Означення. Нульовий стан імпульсного процесу переносу $z(t)$, визначеного в (1), є стійким з імовірністю 1, якщо $\forall x(T) = x \quad \forall \rho > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\rho, \varepsilon, x) > 0$: $0 < z < \delta$:

$$P_{z,\,x,\,T}\left\{\sup_{T\le t<+\infty}\left|z(t)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\rho\,,$$

де $P_{z,\,x,\,T}$ – умовна ймовірність при початковому стані $(z,\,x,\,T)$.

Теорема [1]. *Нехай для деякого фіксованого* $\mu>0$ *виконуються умови:*

A1) *функція* $V(z,\,x,\,t)$ *є невід'ємною та неперервною на відкритій множині* $A_\mu=\{(z,\,x,\,t)\colon\; V(z,\,x,\,t)<\mu\}$ *для деякого фіксованого* $\mu>0$;

A2) *оператор* L_μ *є інфінітезимальним оператором зупиненого процесу*

$$(z(t\wedge\tau_\mu),\,x(t\wedge\tau_\mu),\,\gamma(t\wedge\tau_\mu))\,,$$

де $\gamma(t)=t-\tau_{\nu(t)},\;\; t\ge T\ge 0;\;\; \tau_\mu=\inf\left\{t\;(z(t),\;x(t),\;\gamma(t))\notin A_\mu\right\}$;

A3) $V(z,\,x,\,t)\in\mathrm{Dom}(L_\mu)$ *та* $\dfrac{d}{dz}V$ *є неперервною та обмеженою по* z *функцією в множині* A_μ *та*

$$L_\mu V(z,\,x,\,t)\le 0 \quad \text{в} \quad A_\mu\,, \tag{4}$$

де оператор L_μ *визначений в умові A2)*;

множина A_μ *визначена в A1);*

$V(0,\,x,\,t)=0\,,\;\forall x\in X\,,\; t\ge T>0\,;$

$\forall\varepsilon_2>0\;\;\exists\varepsilon_1>0\colon\; z>\varepsilon_1\colon\; V(z,\,x,\,t)\ge\varepsilon_2\,,\;(z,\,x,\,t)\in A_\mu\,.$

Тоді нульове положення імпульсного процесу переносу $z(t)$, *визначеного в (1), є стійким з імовірністю 1.*

Обмежимося випадком, коли в рівнянні (1) функція $\upsilon(z,x)=\upsilon(x)$, де $0<\upsilon(x)<\infty,\;\;\forall x\in X$, неперервна функція.

В якості допоміжної стохастичної функції Ляпунова візьмемо функцію

$$V(z,\,x,\,t)=e^{-t}\cdot\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot z^2\,.$$

Покажемо, що функція $V(z,\,x,\,t)$ задовольняє умовам теореми:

1) $V(z,\,x,\,t)=e^{-t}\cdot\left(\operatorname{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot z^2$ – невід'ємна та неперервна на деякій відкритій множині

$$A_\mu=\left\{(z,\,x,\,t)\colon\; V(z,\,x,\,t)=e^{-t}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)z^2<\mu\right\}.$$

Звідси випливає, що

$$0<z<\sqrt{\frac{\mu e^t}{\operatorname{arctg}x+\dfrac{\pi}{2}}}$$

для деякого фіксованого $\mu>0$.

2) Оператор L_μ є інфінітезимальним оператором зупиненого процесу

$$(z(t\wedge\tau_\mu),\,x(t\wedge\tau_\mu),\,\gamma(t\wedge\tau_\mu))$$

і

$$L_\mu f(z,\,x,\,t)=\upsilon(x)\frac{df}{dz}+\int_X P(x,\,dy)f(z-a(y),\,y,\,t)-f(z,\,x,\,t)+$$

$$+\frac{df}{dt}+\frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)}\left[\int_X P(x,dy)f(y,T)-f(x,t)\right],$$

де $P(x,A)=\mathsf{P}\{x_{n+1}\in A/x_n=x\}$;

$G_x(t)=\mathsf{P}\{\theta_{n+1}\le t/x_n=x\}$, $x_n\in X, A\in \mathsf{X}$, $t\ge 0$;

$Pa(x)=\int_X P(x,dy)a(y)$;

$g_x(t)=\frac{dG_x(t)}{dt}$;

$\bar{G}_x(t)=1-G_x(t)$,

$\forall f\in C^1(R_+\times X\times R_+)$, $\forall t\ge T>0$.

3) $V(z,x,t)\in \mathrm{Dom}(L_\mu)$ та

$$\frac{dV(z,x,t)}{dz}=2ze^{-t}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)$$

є неперервною та обмеженою по z функцією на A_μ.

4) Умова (4)

$$L_\mu V(z,x,t)=e^{-t}\left\{2z\upsilon(x)\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)+P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)(z-a(x))^2-\right.$$
$$\left.-2\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)z^2+\frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)}\left[Pe^{-T+t}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)z^2-\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)z^2\right]\right\}\le 0$$

рівносильна нерівності

$$L_\mu V(z,x,t)=\left[P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)-2\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)}Pe^{-T+t}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)\right]z^2+2\left[\upsilon(x)\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)-P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)a(x)\right]z+$$
$$+P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)a^2(x)\le 0.$$

Остання нерівність виконується при наступних умовах:

а) $g_x(t)<\infty$ і $\frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)}<e^{-t}$, тоді

$\forall d_1>0\quad \exists t=t_0\ge T>0:\ \forall t>t_0\quad \frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)}e^{-T+t}<d_1$;

б) $$L_\mu V(z,x,t)=\left[(1+d_1)P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)-2\operatorname{arctg}x-\pi\right]z^2+2\left[\upsilon(x)\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)a(x)\right]z+P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)a^2(x)\le 0 \qquad (5)$$

(так як $\frac{g_x(t)}{\bar{G}_x(t)}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)>0$);

в) $0<(1+d_1)P\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)-2\operatorname{arctg}x-\pi<d_2$ і константу d_2 вибираємо так, щоб дискримінант квадратного рівняння, відповідного нерівності (5), був додатним для всіх

$(z, x, t) \in A_\mu$;

г) $0 < z_1 \le z \le z_2 < \sqrt{\dfrac{\mu\, e^t}{\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}}}$,

де $z_{1,2} = \dfrac{-\upsilon(x)\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right) + P\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right)a(x) \mp \sqrt{D(x)}}{(1+d_1)P\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 2\operatorname{arctg} x - \pi}$,

$$D(x) = \left[\upsilon(x)\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) - P\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)a(x)\right]^2 - \left[(1+d_1)P\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - 2\operatorname{arctg} x - \pi\right] \cdot P\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)a^2(x).$$

5) $V(0, x, t) = e^{-t} b(x) \cdot 0 = 0, \ \forall x \in X, \ t \ge T > 0$.

6) $\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists \varepsilon_1 > 0$ таке, що якщо $z > \varepsilon_1$:

$$V(z, x, t) = e^{-t}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot z^2 \ge e^{-t}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \varepsilon_1^2 \ge e^{-t}\pi\varepsilon_1^{\,2} > 0, \ (z, x, t) \in A_\mu.$$

Вибираємо

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 e^t}{\pi}}.$$

Отже, якщо вибрати $V(z, x, t) = e^{-t} \cdot (\operatorname{arctg} x + \pi/2) \cdot z^2$, то завжди існує множина A_μ, визначена в А1), де виконуються умови теореми, і нульове положення імпульсного процесу переносу $z(t)$, визначеного в (1), є стійким з імовірністю 1. При цьому початкове значення параметра z треба вибрати з проміжку $(\max(\varepsilon_1, z_1); z_2]$.

Одержаний результат є наслідком досліджень стохастичної стійкості імпульсних процесів переносу в напівмарковському випадковому середовищі [1], [2], так як стосується імпульсного процесу переносу з швидкістю, що залежить від стану випадкового напівмарковського середовища.

Запропонований метод доведення стійкості імпульсних процесів переносу з використанням допоміжної функції Ляпунова можна застосувати до доведення стійкості різноманітних механічних систем, зокрема гіроскопічних .

Список літератури

1. Свіщук А.В., Гончарова С.Я. Стійкість напівмарковських процесів ризику // Доп. НАН України – 1999.–№7. – С. 30–34.
2. Гончарова С.Я. Стохастична стійкість напівмарковського процесу. – Вісник Київського університету / Фіз.-мат. науки. – К.: 2007. – Вип. 4. – С. 18–20.

Исследуется стохастическая устойчивость импульсного процесса переноса в полумарковськой случайной среде.

The stochastic stability of impulse process of transfer in semi-Markov chance environment is investigated.