УДК 62-755

А.Н. Горбенко, доц., канд. техн. наук
Керченский государственный морской технологический университет, г.Керчь

Точное решение задачи устойчивости пассивной автобалансировки ротора, совершающего плоско-параллельное движение, при частном расположении компенсирующих масс

В работе получено точное решение, в явном виде устанавливающее зависимость границы устойчивости автобалансировки от параметров ротора и автобалансира в рассматриваемом случае. Выполнен его анализ. Получено простое приближенное выражение для границы устойчивости.
ротор, автобалансировка, пассивный автобалансир, устойчивость

1. Постановка проблемы. Анализ существующих исследований. Цель работы.

Автобалансирующие устройства (АБУ) пассивного типа находят применение в роторных машинах (РМ) для снижения уровня их вибрации. Их практическое применение сталкивается с проблемой обеспечения устойчивости автобалансирующего режима движения механической системы (МС). В свою очередь, решение этой проблемы обусловливает необходимость развития аналитической теории АБУ.

В данной работе рассматривается проблема устойчивости автобалансировки простейшего ротора, совершающего плоско-параллельное движение. Анализ ограничивается частным случаем расположения компенсирующих масс (КМ) АБУ, при котором геометрический параметр D=0 (определение параметра см. ниже). Практическая целесообразность такого ограничения обусловлена следующим. В процессе эксплуатации РМ происходит неизбежный рост дисбаланса ротора, в результате чего изменяются автобалансирующие положения КМ в АБУ и значение D. Как следствие изменяются и границы устойчивости. Характер изменения границы устойчивости изучался в работах [1, 2, 3], где показано, что из всего возможного диапазона значений D=0…1 частный случай D=0 является наиболее опасным. При этом область устойчивости автобалансировки наиболее узкая. Таким образом, исследование этого частного случая дает наиболее важную информацию для эффективной эксплуатации АБУ, практически гарантирующую его устойчивость в течение заданного ресурса. Кроме того, рассмотрение частных случаев расширяет возможности аналитического исследования динамики МС и получения приближенных и даже точных выражений для границ устойчивости.

Целью данной работы является получение точного аналитического решения для границ устойчивости автобалансировки ротора с АБУ для случая D=0 и его анализ, а также получение приближенного решения.

2. Уравнения возмущенного движения

Рассмотрим однодисковый ротор на двух изотропных опорах. Статически неуравновешенный диск ротора расположен посередине между опорами и совершает плоское движение. В плоскости диска расположен автобалансир с КМ в виде шариков или маятников. Количество КМ n произвольное, но не менее двух. Число степеней свободы данной МС равно (2+n).

Данная механическая система характеризуется следующими физическими параметрами: ω – угловая скорость вращения ротора, рад/с; M – масса диска, кг; r – эксцентриситет, м; K – жесткость вала и его опор, приведенная к центру диска, Н/м; β_m, β – коэффициенты внешнего вязкого демпфирования ротора, кг·с$^{-1}$ и с$^{-1}$; p – критическая скорость вращения ротора без АБУ, рад/с; x, y – текущие координаты геометрического центра диска, м; m, n – масса одной КМ (кг) и их количество; R – радиус окружности движе-ния центров масс КМ в АБУ, м; h_φ – коэффициент внутреннего вязкого сопротивления движению КМ в АБУ, с$^{-1}$; α_j – постоянные угловые положения КМ относительно диска в режиме автобалансировки, рад; φ_j – текущая угловая координата j-й КМ относительно оси x, рад.

Устойчивость режима автобалансировки исследуем традиционным методом Ляпунова по первому приближению уравнений возмущенного движения. В работе [4] в рамках единого подхода получена система уравнений возмущенного движения для произвольной роторной машины с пассивным АБУ. Переход к предложенным там же «суммарным» обобщенным координатам КМ позволяет максимально сократить количество уравнений системы, причем независимо от числа КМ.

Для рассматриваемой МС ротора с АБУ система уравнений возмущенного движения принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &M_\Sigma\,\{\delta\ddot{q}\}+\beta_m\,\{\delta\dot{q}\}+K\,\{\delta q\}+mR\{\ddot{f}_a\}=\{0\};\\ &\{\ddot{f}_a\}+\left(h_\varphi[E]-2\omega[E_c]\right)\{\dot{f}_a\}-\left(\omega^2[E]+h_\varphi\omega[E_c]\right)\{f_a\}+\frac{1}{2R}[T]\,[d_c]\,[T]^{-1}\{\delta\ddot{q}\}=0\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\{\delta q\}=\begin{Bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{Bmatrix};\quad \{f_a\}=\begin{Bmatrix}f_{as}\\ f_{ac}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\sum\limits_{j=1}^{n}\psi_j\sin(\omega t+\alpha_j)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\psi_j\cos(\omega t+\alpha_j)\end{Bmatrix};\quad M_\Sigma=M+nm\,;$$

$$[d_c]=\begin{bmatrix}(n-D_c) & -D_s\\ -D_s & (n+D_c)\end{bmatrix};\quad D_c=\sum_{j=1}^{n}\cos 2\alpha_j\,;\quad D_s=\sum_{j=1}^{n}\sin 2\alpha_j\,;\quad D=\frac{1}{n^2}\left(D_c^2+D_s^2\right);$$

$$[E]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\quad [E_c]=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix};\quad [T(t)]=\begin{bmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{bmatrix};$$

$\{\delta q\}$ – вектор вариаций обобщенных координат диска;

$\{f_a\}$ – вектор вариаций суммарных обобщенных координат КМ;

$[d_c]$ – геометрическая матрица, характеризующая автобалансирующие расположения КМ.

Здесь параметр D обобщенно характеризует геометрию автобалансирующего расположения КМ в автобалансире. Его составляющие D_c и D_s входят в систему (1).

Из (1) видно, что в общем случае уравнения возмущенного движения имеют периодические коэффициенты, что существенно затрудняет их аналитическое исследование. Поэтому в подавляющем большенстве исследованиях устойчивости АБУ осуществлялся переход к уравнениям с постоянными коэффициентами во вращающейся системе координат. Однако, при частном значении параметров $D_c = D_s = 0$ и, следовательно D=0, периодические матрицы $[T(t)]$ и $[T(t)]^{-1}$ в (1) сокращаются и все коэффициенты системы становятся постоянными, что позволяет исключить дополнительный этап трудоемкого преобразования. В этом случае уравнения возмущенного движения (1) принимают вид:

$$\begin{aligned}&\{\delta\ddot{q}\}+\beta\,\{\delta\dot{q}\}+p^2\,\{\delta q\}+\mu R\{\ddot{f}_a\}=\{0\};\\&\{\ddot{f}_a\}+(h_\varphi[E]-2\omega[E_c])\{\dot{f}_a\}-(\omega^2[E]+h_\varphi\omega[E_c])\{f_a\}+\frac{n}{2R}\{\delta\ddot{q}\}=0.\end{aligned}\qquad(2)$$

где

$\beta=\dfrac{\beta_m}{M_\Sigma}$; $\quad p^2=\dfrac{K}{M_\Sigma}$; $\quad \mu=\dfrac{m}{M_\Sigma}$; μ – относительная масса одной КМ.

3. Характеристическое уравнение и его формы

Характеристическое уравнение (ХУ), соответствующее системе (2), после преобразований выпишем в форме определителя от блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix}(\lambda^2+\beta\lambda+p^2)[E] & \mu R\lambda^2[E]\\ \dfrac{n}{2R}\lambda^2[E] & (\lambda^2+h_\varphi\lambda-\omega^2)[E]-\omega(2\lambda+h_\varphi)[E_c]\end{vmatrix}=0,\qquad(3)$$

где λ – собственное число МС.

Здесь определитель состоит из четырех блоков размером (2,2) каждый. Диагональные блоки соответствуют подсистеме ротора и подсистеме КМ АБУ, а внедиагональные блоки характеризуют взаимосвязь между подсистемами МС.

Важно отметить, что ХУ (3) имеет вид существенно более простой, чем традиционный ХУ после перехода к вращающимся координатам. Это дает возможность довести анализ устойчивости до точного решения.

Используя известные свойства блочных определителей [5-7 и др.], ХУ (3) может быть представлено в следующем эквивалентном виде:

$$\left|(\lambda^2+\beta\lambda+p^2)\left\{(\lambda^2+h_\varphi\lambda-\omega^2)[E]-\omega(2\lambda+h_\varphi)[E_c]\right\}-\frac{1}{2}n\mu\lambda^4[E]\right|=0$$

или

$$\left|\left(\lambda^2+h_\varphi\lambda-\omega^2-\frac{1}{2}n\mu L(\lambda)\right)[E]-\omega(2\lambda+h_\varphi)[E_c]\right|=0\quad \text{при } (\lambda^2+\beta\lambda+p^2)\neq 0,\ (4),$$

где

$$L(\lambda)=\frac{\lambda^4}{\lambda^2+\beta\lambda+p^2}\ .$$

Здесь размер определителя ХУ понижен с (4,4) до (2,2).

Раскрывая определитель (4), получаем

$$\left(\lambda^2+h_\varphi\lambda-\omega^2-\frac{1}{2}n\mu L(\lambda)\right)^2+\omega^2(2\lambda+h_\varphi)^2=0,$$

откуда ХУ принимает вид алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами:

$$\lambda^2+(h_\varphi+2ik\omega)\lambda-\omega^2+ih_\varphi k\omega-\frac{1}{2}n\mu\,L(\lambda)=0;\quad k=\pm1.\qquad(5)$$

4. Точное аналитическое решение для границ устойчивости

Проанализируем ХУ (5), применяя идею известного метода *D*-разбиения.

На границах устойчивости вещественная часть одного или нескольких собственных чисел равна нулю, т.е. имеют место равенства

$$\lambda = \lambda_s = i\omega_s\,; \quad \mathrm{Re}(\lambda_s) = 0\,; \quad \mathrm{Im}(\lambda_s) = \omega_s\,. \tag{6}$$

Далее подставляем (6) в (5) и после отделения вещественной и мнимой частей ХУ получаем следующую систему уравнений, справедливую для границ устойчивости:

$$(\omega_s + k\omega_Г)^2 + \frac{1}{2}n\mu\,\mathrm{Re}(L_s) = 0\,; \tag{7}$$

$$h_\varphi(\omega_s + k\omega_Г) - \frac{1}{2}n\mu\,\mathrm{Im}(L_s) = 0\,, \tag{8}$$

где

$$L_s = L(\lambda_s); \quad \mathrm{Re}(L_s) = -\frac{(\omega_s^2 - p^2)\omega_s^4}{(\omega_s^2 - p^2)^2 + \beta^2\omega_s^2}\,; \quad \mathrm{Im}(L_s) = -\frac{\beta\,\omega_s^5}{(\omega_s^2 - p^2)^2 + \beta^2\omega_s^2}\,. \tag{9}$$

Система уравнений (7), (8) может быть приведена к системе равенств нулю двух полиномов относительно ω_s:

$$\begin{gathered}\left(h_\varphi^2 - \frac{1}{2}n\mu\beta^2\right)\omega_s^6 - h_\varphi^2(3p^2 - \beta^2)\omega_s^4 + p^2h_\varphi^2(3p^2 - \beta^2)\omega_s^2 - h_\varphi^2p^6 = 0\,;\\ (\beta + h_\varphi)\omega_s^2 + \beta\,k\omega_Г\,\omega_s - h_\varphi p^2 = 0\,.\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь первое уравнение получено путем исключения из (7), (8) величины $(\omega_s + k\omega_Г)$ с последующей подстановкой $\mathrm{Re}(L_s)$ и $\mathrm{Im}(L_s)$ из (9). Второе уравнение получено на основе рассмотрения отношения $\mathrm{Re}(L_s)/\mathrm{Im}(L_s)$.

В систему (10) входят две неизвестные величины: искомая граница устойчивости $\omega_Г$ (по скорости вращения ротора) и частота собственных колебаний МС (соответствующая той форме собственных колебаний, по которой происходит потеря устойчивости). Важная особенность полученной системы (10) состоит в том, что величина $\omega_Г$ присутствует только в одном из коэффициентов второго уравнения. Это дает возможность после исключения ω_s из системы (10) получить уравнение для $\omega_Г$ минимальной степени. Для исключения ω_s удобно воспользоваться понятием результанта, известного из курса высшей алгебры [7].

После выполнения указанных преобразований приходим к бикубическому уравнению относительной границы устойчивости автобалансировки:

$$c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0\,, \tag{11}$$

где

$$x = \omega_Г^2\,;\; c_0 = \beta^2\left(h_\varphi^2 - \frac{1}{2}n\mu\beta^2\right);$$

$$c_1 = -\beta^2h_\varphi\left[h_\varphi\left(3p^2 - \beta^2 - 2h_\varphi(h_\varphi + \beta)\right) + \frac{1}{2}n\mu\left(\beta^2h_\varphi + 3p^2h_\varphi + 6p^2\beta\right)\right];$$

$$c_2 = \beta h_\varphi^2\left[\beta\left(p^2(3p^2 - \beta^2) + h_\varphi^2(h_\varphi + \beta)^2\right) - \frac{1}{2}n\mu p^2\left(4\beta^2h_\varphi + 6p^2h_\varphi + 3\beta h_\varphi^2 + 9p^2\beta\right)\right];$$

$$c_3 = -p^2h_\varphi^2\left[\beta\left(h_\varphi(h_\varphi + \beta) + p^2\right) + \frac{1}{2}n\mu h_\varphi p^2\right]^2.$$

Отсюда получаем точные аналитические выражения, определяющие в явном виде границы устойчивости:

$$\omega_{Г1}^2 = A + B\,;\quad \omega_{Г2,3}^2 = -\frac{1}{2}(A+B) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(A-B)\,, \tag{12}$$

где

$$A = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{Q}}\,;\quad B = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{Q}}\,;\quad Q = \left(\frac{1}{3}p\right)^3 + \left(\frac{1}{2}q\right)^2\,;$$

$$p = \frac{1}{c_0^2}\left(-\frac{1}{3}c_1^2 + c_0c_2\right);\quad q = \frac{1}{c_0^3}\left(\frac{2}{27}c_1^3 - \frac{1}{3}c_0c_1c_2 + c_0^2c_3\right);$$

Согласно решению Кардано при $Q>0$ среди трех корней кубического уравнения (11) имеется один действительный корень x_1 и два комплексно сопряженных корня $x_{2,3}$, а при $Q\le 0$ – три действительных корня (при $Q=0$ имеется кратный корень).

Анализ показывает, что при характерных диапазонах значений параметров МС β, n, μ, h_φ (см. [1-3]) величина Q положительна. Этот же анализ выявил, что коэффициенты c_1, c_2, c_3 не изменяют своего знака, в то время как коэффициент c_0 может быть как положительным, так и отрицательным. Последнее дает возможность применить правило знаков Декарта [7] для анализа количества положительных и отрицательных корней кубического уравнения (11).

Анализ полученного решения позволяет сделать заключение, что при характерных значениях параметров МС и $D=0$ возможны следующие два случая.

1. Существует одна (нижняя) граница устойчивости автобалансировки $\omega_{Г1}$. При этом $c_0>0$, $Q>0$, $x_1 = \omega_{Г1}^2 > 0$.

2. Граница устойчивости отсутствует. При этом $c_0<0$, $Q>0$, $x_1 = \omega_{Г1}^2 < 0$. В этом случае автобалансировочный режим движения неустойчив при любой частоте вращения ротора и параметрах МС.

Критическим фактором, разделяющим первый и второй случаи является знак коэффициента c_0.

Таким образом, можно сформулировать следующий критерий – автобалансировка ротора не может быть устойчива ни при какой частоте вращения если

$$D = 0 \quad и \quad h_\varphi^2 \le \frac{1}{2}n\mu\beta^2 \quad или \quad K_b = \frac{1}{2}n\mu\frac{\beta^2}{h_\varphi^2} \ge 1\,. \tag{13}$$

Отметим, что формально существует также возможность существования трех и двух границ устойчивости. Однако эти случаи соответствуют нетипичным (или даже физически невозможным) значениям параметров МС и требуют отдельного анализа.

5. Приближенное аналитическое решение для границ устойчивости

Вернемся к системе уравнений (10). Для подавляющего большинства РМ имеет место соотношение $\beta^2 \ll 3p^2$. Принимая, что $(3p^2-\beta^2)\approx 3p^2$, из точной системы (10) приходим к приближенным уравнения вида:

$$\begin{gathered}(\omega_s^2 - p^2)^3 - K_b\,\omega_s^6 = 0\,;\\ (1+\gamma_b)\omega_s^2 + k\omega_Г\,\omega_s - \gamma_b p^2 = 0\,,\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\gamma_b = \frac{h_\varphi}{\beta}\,;\quad K_b = \frac{1}{2}n\mu\frac{\beta^2}{h_\varphi^2} = \frac{1}{2}n\mu\frac{1}{\gamma_b^2}\,.$$

Здесь первое уравнение существенно упростилось в сравнении с исходным вариантом, что позволяет получить из (14) аналитическое решение в явной форме.

Приближенная формула для границы устойчивости автобалансировки, полученная из (14), имеет вид:

$$\omega_{Г} = \pm p \frac{1+\gamma_b \sqrt[3]{K_b}}{\sqrt{1-\sqrt[3]{K_b}}} \text{ или через параметры МС: } \omega_{Г} = \pm p \frac{\sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} n\mu h_{\varphi}}}{\sqrt{\sqrt[3]{h_{\varphi}^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{2} n\mu \beta^2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{h_{\varphi}}{\beta}}. \quad (15)$$

Полученная формула имеет наглядный вид и отражает свойство отсутствия устойчивости при условии (13). Ее погрешность не превышает 8 % согласно численным расчетам при характерных диапазонах значений параметров МС.

Заключение

1. Показано, что рассматриваемая задача допускает точное аналитическое решение (12), которое в явном виде определяет зависимость границы устойчивости автобалансировки от значений параметров ротора и АБУ.

2. Установлено, что в пространстве параметров МС существует область (13), в пределах которой невозможно обеспечить устойчивость автобалансировки ни при какой частоте вращения ротора.

3. Полученная приближенная формула наглядно отражает влияние параметров ротора и АБУ на границу устойчивости и обладает приемлемой точностью.

Список литературы

1. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і видрозахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352 с.
2. Горбенко А.Н. Об устойчивости автобалансировки ротора с помощью шариков // Проблемы прочности – 2003. – № 3 (363). – С. 120-129.
3. Горбенко А.Н. Изменение границы устойчивости автобалансировки ротора шарами в процессе эксплуатации // Авиационно-космическая техника и технология: Научно-технический журнал. – Харьков: "Харьковский авиационный институт". – 2008. – Вып. 8 (55). - С. 156-159.
4. Горбенко А.Н. Основы общего подхода к анализу устойчивости роторных машин с пассивным автобалансиром / Керченский гос. морской технол. ун-т. - Керчь, 2008. - 52с. - Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 07.07.2008, №108 – Ук, 2008.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
6. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техника, 1977. – 768 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

У роботі отримано точне рішення, що встановлює в явному вигляді залежність межі стійкості автобалансування від параметрів ротора і автобалансира в даному випадку. Виконаний його аналіз. Отримано просте наближене вираження для межі стійкості..

An exact solution is got, that in an obvious kind setting dependence of border of stability of autobalancing from the parameters of rotor and autobalancer in examined case. His analysis is executed. Simple approximate expression is got for the border of stability.