УДК 62-231: 621.9.04

А.М. Кириченко, доц., канд. техн. наук, докторант
Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут”

Показники жорсткості верстатного обладнання з паралельною кінематикою

Розглянуто систему локальних та глобальних показників жорсткості верстатного обладнання з паралельною кінематикою, які характеризують жорсткість у певному положенні робочого органа та усьому робочому просторі. Застосування показників проаналізовано на прикладі порівняння компоновок гексаподів.
паралельна кінематика, жорсткість, показники

Вступ. Одним з найбільш перспективних напрямків розвитку сучасних технологій механічної обробки є використання технологічного обладнання з багатопоточними механізмами, зокрема верстатів з паралельною кінематикою, найбільш важливою перевагою яких у порівнянні з традиційними є відносно низька металоємність при співставній жорсткості конструкції, та внаслідок цього – більш високі динамічні показники. Використання верстатів паралельною кінематикою відкриває нові можливості реалізації складного просторового руху інструмента, застосування прогресивних стратегій обробки та інтенсифікації режимів різання, що дозволяє вирішити більшість задач, які ставляться сучасним багатономенклатурним серійним виробництвом.

Постановка задачі. Прикладене до механізму навантаження викликає зміни його геометрії, відомі як деформації або пружні переміщення. Здатність механічної системи витримувати навантаження без значних змін геометрії характеризується її жорсткістю. Жорсткість може бути визначена як величина прикладеної сили на одиницю пружного переміщення, або співвідношення сили, діючої на деформівне тіло, до викликаного нею переміщення [1].

Характеристики жорсткості можуть значно вплинути на точність, вантажну спроможність та динамічні показники обладнання з паралельною кінематикою. Недостатня жорсткість ланок або опор може викликати великі пружні переміщення робочого органа під дією зовнішніх сил та моментів, які негативно впливають як на точність, так і на вантажну спроможність. Таким чином, критерій жорсткості стає першочерговим у проектуванні обладнання з паралельною кінематикою для відповідного вибору матеріалів, геометричну форму та розміри елементів конструкції та взаємодії елементів між собою. Аналіз жорсткості може бути використаний для оцінки очікуваних показників вантажної спроможності і точності, для перевірки здійсненності певних технологічних задач.

Отже, жорсткість є одною з найбільш важливих характеристик обладнання з паралельною кінематикою, поряд з формою та розмірами робочого простору, наявністю і конфігурацією особливих положень, рухливістю і точністю положення робочого органа [2]. Показники жорсткості повинні уважно аналізуватись та прийматися до уваги при розробці верстатного обладнання з паралельною кінематикою, а визначення жорсткості є важливим етапом його проектування [3].

Матриця просторової жорсткості. Зв’язок між переміщенням робочого органа під навантаженням та величиною останнього встановлюється наступним співвідношенням

$$\mathbf{W} = K\,\mathbf{\Delta S}\,, \tag{1}$$

де K – матриця просторової жорсткості розмірністю 6×6, яка характеризує загальну жорсткість обладнання з паралельною кінематикою;

$\mathbf{\Delta S} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi)^T$ та $\mathbf{W} = (P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z)^T$ – вектори 6×1 пружних переміщень та зовнішнього навантаження, де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – зміна лінійних координат, $\Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi$ – зміна кутів Крилова робочого органу у обраній нерухомій системі координат;

P_x, P_y, P_z – складові сили, що діють на робочий орган у напрямках осей X, Y та Z відповідно;

M_x, M_y, M_z – складові моменти, що діють на робочий орган відносно осей X, Y та Z відповідно.

Якщо відома зворотна кінематична залежність механізму паралельної структури, можна записати

$$\boldsymbol{\theta} = G\,\mathbf{S}\,, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{\theta}$ – вектор розмірності n×1 координат приводів (де n – кількість ступенів вільності);

$\mathbf{S} = (x, y, z, \psi, \theta, \varphi)^T$ – вектор, що виражає положення та орієнтацію системи координат робочого органа по відношенню до нерухомої системи координат;

G – матриця n×6, яка описує зворотну кінематику механізму паралельної структури.

Використовуючи розклад (2) у ряд Тейлора та беручи до уваги лише перший член, можна записати

$$\mathbf{\Delta\boldsymbol{\theta}} = J\,\mathbf{\Delta S}\,, \tag{3}$$

де $\mathbf{\Delta\boldsymbol{\theta}}$ – вектор прирощення координат приводів; $\mathbf{\Delta S}$ – вектор прирощення координат $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$;

J – якобіан (матриця Якобі), що може бути записаний у вигляді

$$J = [J_1, J_2, \ldots, J_6], \tag{4}$$

де

$$J_1 = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial\theta_6}{\partial x}\right)^T;\; J_2 = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial\theta_6}{\partial y}\right)^T;\; J_3 = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial z}, \ldots, \frac{\partial\theta_6}{\partial z}\right)^T;$$

$$J_4 = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}, \ldots, \frac{\partial\theta_6}{\partial\alpha}\right)^T;\; J_5 = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}, \ldots, \frac{\partial\theta_6}{\partial\beta}\right)^T;\; J_6 = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\gamma}, \ldots, \frac{\partial\theta_6}{\partial\gamma}\right)^T.$$

Згідно з [4], силові співвідношення механізму можна характеризувати за допомогою якобіана, тобто

$$\mathbf{W} = J^T\,\mathbf{F}\,, \tag{5}$$

де $\mathbf{F} = [F_1, \ldots, F_n]^T$ – вектор сил, що діють у кожній ланці;

J^T – транспонований якобіан (3).

Нехтуючи деформаціями ланок, можна записати

$$\mathbf{F} = K_\theta\,\mathbf{\Delta\boldsymbol{\theta}}\,, \tag{6}$$

де K_θ – діагональна матриця, ненульовими елементами якої є параметри зосередженої жорсткості ланок. Тоді з (3) та (6) випливає

$$\mathbf{F} = K_\theta\,J\,\mathbf{\Delta S}\,. \tag{7}$$

Перемножуючи обидві сторони рівняння (7) на J^T та підставляючи у (5), маємо

$$\mathbf{W} = J^T K_\theta \, J \, \Delta\mathbf{S}. \qquad (8)$$

Тоді матриця просторової жорсткості з врахуванням (1) може бути визначена як

$$K = J^T K_\theta \, J . \qquad (9)$$

Розглянемо шестикоординатний просторовий механізм паралельної структури з ланками змінної довжини (рис. 1). З основою механізму зв'язана абсолютна система координат з початком координат у точці O, а з рухомою платформою з'єднана відносна рухома система координат з початком у точці O_1.

Центри шарнірів основи розміщені в точках A_i, центри шарнірів рухомої платформи – в точках B_i. Довжина штанг позначається ρ_i, одиничний вектор штанг $\mathbf{n}_i$. Координати точок A_i в абсолютній системі координат основи дорівнюють (xa_i, ya_i, za_i), координати точок B_i у рухомій системі дорівнюють (x_i, y_i, z_i), координати початку координат рухомої системи О в нерухомій – (x_o, y_o, z_o).

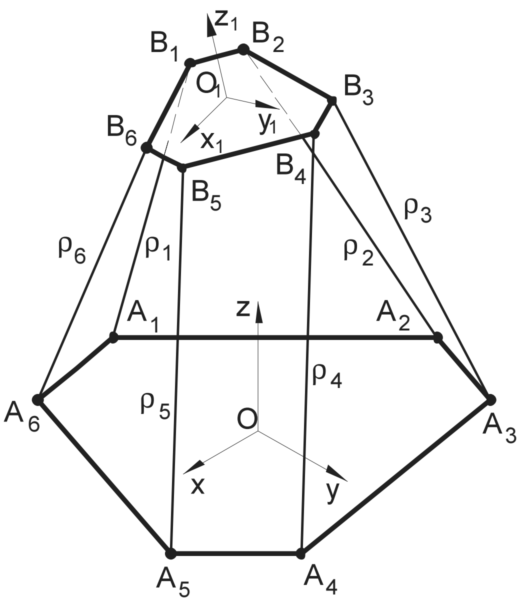


Рисунок 1 – Система координат гексапода

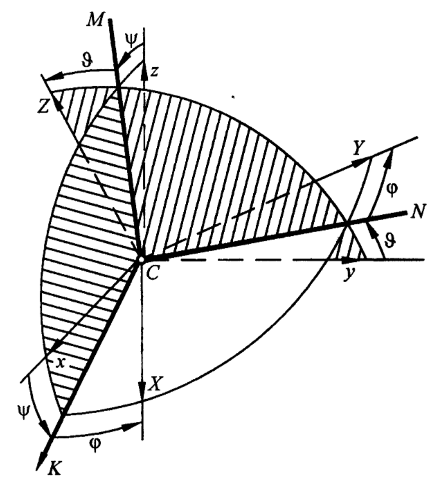


Рисунок 2 – Послідовність кутів Крилова

Якщо орієнтація рухомої платформи визначається кутами Крилова ψ, ϑ, φ (рис. 2), то координати шарнірів рухомої платформи B_i в системі координат основи

$$\begin{pmatrix} xb_i \\ yb_i \\ zb_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta \\ \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\varphi\sin\vartheta & \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\sin\vartheta & -\sin\psi\cos\vartheta \\ \sin\psi\sin\varphi - \cos\psi\cos\varphi\sin\vartheta & \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\psi\cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} . \qquad (10)$$

Довжина ρ_i штанг механізму дорівнює

$$\rho_i = \sqrt{(xa_i - xb_i)^2 + (ya_i - yb_i)^2 + (za_i - zb_i)^2} \, . \qquad (11)$$

У [4] показано, що якобіан механізму паралельної структури визначається як матриця, складена з векторів плюкерових координат ліній штанг

$$J = [U'_1 \cdots U'_6]^T, \qquad (12)$$

де $\overline{U_i}$ – нормалізований вектор плюкерових (променевих) координат ліній штанг

$$\overline{U}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \overline{OB_i} \times \mathbf{n}_i \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Одиничний вектор штанги в системі координат основи дорівнює

$$\mathbf{n}_i = \frac{\overline{A_i B_i}}{\rho_i}, \tag{14}$$

Оскільки вектор $\overline{OB_i}$ дорівнює $\left(xb_i \;\; yb_i \;\; zb_i\right)^T$, нормалізований вектор плюкерових координат ліній штанг можна записати у вигляді

$$U'_i = \frac{1}{\rho_i}\left(xn_i \quad yn_i \quad zn_i \quad xm_i \quad ym_i \quad zm_i\right)^T, \tag{15}$$

де $\begin{pmatrix} xn_i \\ yn_i \\ zn_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xb_i \\ yb_i \\ zb_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xa_i \\ ya_i \\ za_i \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} xm_i \\ ym_i \\ zm_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xb_i \\ yb_i \\ zb_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xn_i \\ yn_i \\ zn_i \end{pmatrix}$.

За відомими параметри зосередженої жорсткості ланок з шарнірними опорами обчислюємо матрицю жорсткості згідно з (9). Одержавши матрицю жорсткості механізму паралельної структури, необхідно мати можливість порівнювати різні матриці та оцінювати характеристики жорсткості системи взагалі. Хоча матриця жорсткості і несе повну інформацію про параметри жорсткості механізму, використання її з метою оцінки та порівняння жорсткості одного механізму в різних положеннях або різних механізмів досить ускладнене.

Тому для оцінки жорсткості механізмів паралельної структури зручніше використовувати додаткові показники – як локальні, що характеризують жорсткість у поточному положенні та орієнтації робочого органа, так і глобальні, що характеризують жорсткість у всьому робочому просторі.

Локальні показники жорсткості. У якості локальних показників можна використовувати, наприклад, математичні властивості матриці жорсткості – детермінант (визначник), слід, власні значення та власні вектори.

Детермінант матриці жорсткості K обчислюється як

$$|K| = (-1)^6 + S_1(-1)^5 + S_2(-1)^4 + S_3(-1)^3 + S_4(-1)^2 + S_5(-1) + S_6, \tag{16}$$

де $S_i \;(i = 1, 2, \ldots, 6)$ – сума головних мінорів порядку i матриці K.

Коли матриця жорсткості вироджена, детермінант дорівнює нулю, і зворотна матриця жорсткості не може бути обчислена, що відповідає особливим положенням механізму паралельної структури. Також детермінант матриці жорсткості K інваріантний в перетвореннях подібності, а отже, він не залежить від вибору системи координат. Таким чином, детермінант матриці жорсткості може бути показником для дослідження впливу конструктивних параметрів на жорсткість механізму паралельної структури, оскільки його досить легко розрахувати та він може вказувати на особливі положення і вироджену жорсткість механізму.

Слід $Tr(K)$ матриці жорсткості обчислюється як

$$\mathrm{tr}\, K = \sum_{i=1}^{n} K_{ii}. \tag{17}$$

Слід представляє собою суму елементів пружної жорсткості вздовж напрямків осей координат. Але не всі елементи мають однакову розмірність, і таким чином слід не несе повного фізичного змісту. Можливе вирішення цієї проблеми – визначення безрозмірної або постійно-розмірної матриці жорсткості. Проте, це вимагає введення характеристичної довжини L, вибір якої суттєво впливає на результат і тому є досить складним питанням.

У якості локальних показників можуть виступати певні характеристики матриці жорсткості. Зокрема, вельми корисні для фізичної інтерпретації локальної жорсткості власні значення та власні вектори матриці жорсткості.

Власні значення матриці K можна обчислити як корені характеристичного поліному

$$(-\lambda)^6 + S_1(-\lambda)^5 + S_2(-\lambda)^4 + S_3(-\lambda)^3 + S_4(-\lambda)^2 + S_5(-\lambda) + S_6 = 0\,. \tag{18}$$

Кожному власному значенню λ відповідає ненульовий власний вектор $\mathbf{\upsilon}$, що задовольняє співвідношенню

$$K\mathbf{\upsilon} = \lambda\mathbf{\upsilon}\,.$$

В дослідженнях обладнання з механізмами паралельної структури власні значення привертають особливу увагу, використовуючись для визначення еліпсоїда маніпулятивності (маніпулятивність визначає здатність механізму рухатися рівномірно у всіх напрямках [1]), у дослідженні стабільності та у системах управління. Фактично, власні вектори пов'язані з максимальними та мінімальними власними значеннями і визначають напрямки відповідно максимальної та мінімальної жорсткості. Крім того, невелика різниця між власними значеннями дозволяє казати про меншу анізотропію жорсткості у певному положенні механізму. Розклад на власні значення ускладнюється залежністю від координат та несумісністю одиниць вимірювання (внаслідок додавання обертальних та поступальних частин матриці Якобі у рівняння власних значень). Крім того, власні значення не можна напряму порівнювати, якщо вони мають різні власні вектори. Хоча власні значення та власні вектори не можуть відігравати роль єдиного узагальненого показника жорсткості, але їх величини можуть використовуватися для графічного представлення локальної жорсткості у вигляді еліпсів та еліпсоїдів жорсткості.

Локальний показник жорсткості можна прямо пов'язати з матрицею жорсткості за допомогою матричних норм [5], подібних абсолютному значенню для реальних чисел або модулю комплексних чисел. Норма матриці жорсткості K може бути корисна в якості характеристики жорсткості, оскільки показує, наскільки матриця жорсткості відрізняється від нуля.

Найбільш загальним визначенням норми матриці є p-норма, яку можна записати у вигляді

$$\|K\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| K_{i,j} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{19}$$

При значенні $p = 1$ одержуємо першу норму (L1-норму), яка обчислюється як максимальна сума модулів елементів у стовпчиках матриці жорсткості

$$\|K\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \left| K_{ij} \right|. \tag{20}$$

Нескінченна норма (при $p = \infty$) – максимальна сума модулів елементів у рядках матриці жорсткості

$$\|K\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| K_{ij} \right|. \tag{21}$$

Друга норма, відома також як L2-норма або Евклідова норма, дорівнює квадратному кореню з найбільшого позитивного власного числа добутку матриці на транспоновану спряжену матрицю

$$\|K\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(K\overline{K}^T\right)}\,. \tag{22}$$

Ця норма також зветься спектральною нормою та інваріантна при зміні системи координат. Вона виражає спектральний радіус, довжина якого пов'язана з величиною жорсткості у найбільш жорсткому напрямку. Можна визначити подібну норму, пов’язану з мінімальним власним числом, яка буде виражати жорсткість у найбільш податливому напрямку.

Норма Фробеніуса, яку часто називають власне нормою матриці, відома як квадратний корінь з суми квадратів елементів матриці K. Може бути виражена у вигляді

$$\|K\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{i,j}{}^2} = \sqrt{Tr\left(KK^T\right)}. \tag{23}$$

Максимальна норма – максимальна величина елемента матриці жорсткості

$$\|K\|_{\max} = \max_{i,j}\left|K_{ij}\right|. \tag{24}$$

Найбільша перевага цієї норми в тому, що вона не потребує обчислень, які ведуть до похибок округлення.

Умовне число матриці жорсткості [5] також можна використати як локальний показник жорсткості. Умовне число обчислюється як

$$\kappa(K) = \|K\|\left\|K^{-1}\right\|. \tag{25}$$

Беручи за основу Евклідову норму, можна записати

$$\kappa_F(K) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}, \tag{26}$$

де $\lambda_{\min}$ та $\lambda_{\max}$ – мінімальне та максимальне власне число матриці $K\,K^{-1}$. Мінімальна величина умовного числа дорівнює одиниці, а при виродженій матриці воно наближується до нескінченності.

Глобальні показники жорсткості. Локальні показники жорсткості непридатні ані для точного аналізу конструкцій, ані для порівняння різних конструкцій. Навіть якщо механізм паралельної структури має достатню жорсткість у певному положенні, він може мати недостатню жорсткість у інших положеннях. Отже, необхідно оцінити характеристики жорсткості в усіх точках робочого простору механізму або визначити єдиний глобальний показник жорсткості в усьому робочому просторі.

Обчислення пружних переміщень в усьому робочому просторі для заданого навантаження може бути корисним для порівняння різних механізмів паралельної структури. Кількісно визначені пружні переміщення у робочому просторі можна також використати для обчислення середнього значення та стандартного відхилення пружних переміщень, що дозволяє оцінити середній показник жорсткості та показує, наскільки жорсткість змінюється всередині робочого простору. Середнє значення та стандартне відхилення повинні бути якомога меншими, що вказує на малі пружні переміщення та малу зміну показників жорсткості в робочому просторі.

Глобальний показник жорсткості механізмів паралельної структури може бути визначений за допомогою графічних методів, основаних на побудові кривих, що з’єднують положення з однаковим локальним показником жорсткості (ізолінії або ізоповерхні жорсткості). Проте, кількість ізоліній або ізоповерхонь, які можна побудувати графічно, обмежена, а кілька кривих або поверхонь звичайно недостатньо характеризують глобальні характеристики жорсткості механізму паралельної структури, що значно обмежує ефективність даного методу.

Глобальні показники жорсткості можуть бути визначені у математичній формі використанням мінімуму, максимуму, середнього значення локального показника жорсткості. Наприклад, можна обчислити глобальний показник як

$$j_d = \min\left|K\right|. \tag{27}$$

Якщо j_d дорівнює нулю, в робочому просторі існує хоча б одне особливе положення, що необхідно усунути на стадії проектування.

Якщо конструктивна вимога полягає у забезпеченні ізотропної жорсткості, глобальний показник жорсткості можна одержати як інтеграл умовного числа матриці жорсткості в усьому робочому просторі

$$j_C = \frac{\int \kappa(K)dV}{L^3}, \tag{28}$$

де V – об'єм робочого простору;

L – характеристична довжина.

Аналогічно в знаменнику можна використати об'єм робочого простору V.

Інший глобальний показник жорсткості можна одержати з рівняння (22) у вигляді

$$j_{MN} = \frac{\int \max\limits_i \sqrt{\lambda_i}\, dV}{L^3}. \tag{29}$$

Цей глобальний показник можна використовувати для одержання максимальної жорсткості у одному або кількох напрямках. Подібний показник можна визначити мінімумом власних значень

$$j_{mN} = \frac{\int \min\limits_i \sqrt{\lambda_i}\, dV}{L^3}. \tag{30}$$

Він дозволяє виявити та усунути слабкі місця по жорсткості у певних напрямках. Глобальний показник можна визначити також як різницю між j_{MN} та j_{mN}

$$j_{RN} = \frac{\int \max\limits_i \sqrt{\lambda_i}\, dV - \int \min\limits_i \sqrt{\lambda_i}\, dV}{L^3}. \tag{31}$$

Такий показник несе інформацію про діапазон зміни жорсткості у робочому просторі механізму паралельної структури.

Для оцінки рівня жорсткості можна визначити її середні й мінімальні значення по координатних напрямках і по компонуванню в цілому. Середні рівні жорсткості по координатних напрямках і компонуванню обчислюються як

$$\overline{j_x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} j_{xi}, \ \overline{j_y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} j_{yi}, \ \overline{j_z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} j_{zi}, \ \overline{j} = \frac{1}{3}\left(\overline{j_x} + \overline{j_y} + \overline{j_z}\right), \tag{32}$$

де n – кількість контрольних точок, які вибираються таким чином, щоб одержати повну інформацію про жорсткість у робочому просторі верстата, наприклад розміщуються у вигляді сітки з певним кроком. При наявності багатьох ступенів вільності робочого органа (більше 3) слід врахувати цей факт, визначаючи жорсткість у кожному положенні для кількох різних орієнтацій робочого органа (набору кутів Крилова).

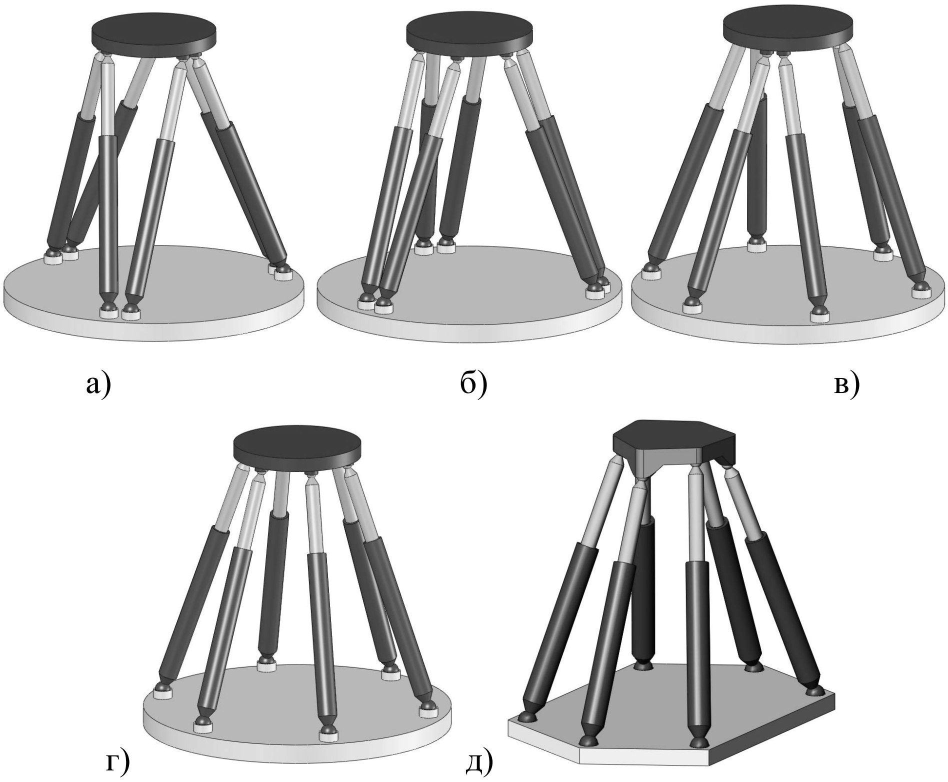
Розкид жорсткості по осям координат визначається середньоквадратичними відхиленнями

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(j_{xi} - \overline{j_x}\right)^2}, \ \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(j_{yi} - \overline{j_y}\right)^2}, \ \sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(j_{zi} - \overline{j_z}\right)^2}, \tag{33}$$

і коефіцієнтами варіації

$$\upsilon_x = \sigma_x / \overline{j_x}, \ \upsilon_y = \sigma_y / \overline{j_y}, \ \upsilon_z = \sigma_z / \overline{j_z}. \tag{34}$$

Приклад використання показників жорсткості. Для встановлення придатності розглянутих показників просторової жорсткості розглянемо кілька варіантів компоновок верстатів-гексаподів з різним розташуванням шарнірів (різною кількістю груп шарнірів) на рухомій та нерухомій платформах (рис. 3). Діаметри окружностей розміщення шарнірів основи складають 1 м, рухомої платформи 0,35 м, жорсткість ланок – 100 Н/мкм.



а) N×S=3×3; б) N×S=3×6; в) N×S=6×3; г) N×S=6×6; д) модифікована 6×6

Рисунок 3 – Компоновочні схеми верстатів-гексаподів структури:

Аналіз локальних показників жорсткості компоновок (табл. 1) показує, що в центральному положенні рухомої платформи дві з компоновок мають вироджену матрицю жорсткості (і отже знаходяться в особливому положенні), причому для структури 3×3 ранг матриці дорівнює 3, тобто у центральному положенні існують 3 „зайві” ступені вільності робочого органа.

Таблиця 1 – Локальні показники жорсткості компоновок

Показник	3×3	3×6	6×3	6×6	Мод. 6×6
Ранг матриці жорсткості	6	6	6	3	5
Визначник матриці жорсткості	$2{,}19\times10^{44}$	$2{,}06\times10^{43}$	$2{,}06\times10^{43}$	0	$6{,}5\times10^{26}$
Слід матриці жорсткості, $\times10^{6}$	566	598	598	611	642
L1-норма, $\times10^{6}$	335	375	375	391	398
L2-норма, $\times10^{6}$	335	375	375	391	395
Нескінченна норма, $\times10^{6}$	335	375	375	391	398
Норма Фробеніуса, $\times10^{6}$	369	405	405	421	441
Максимальна норма, $\times10^{6}$	335	375	375	391	395
Умовне число матриці жорсткості	96	237	237	$5{,}61\times10^{35}$	$1{,}38\times10^{17}$

Слід та різноманітні норми матриці жорсткості для різних компоновок знаходяться у одному діапазоні і практично не відрізняються, тобто за цими показниками проводити порівняння різних варіантів структури фактично не представляється можливим.

Найбільша рівномірність жорсткості (яка оцінюється умовним числом матриці жорсткості) властива структурі 3×3, найменша – 6×6. Умовне число матриці жорсткості має дуже великий порядок для компоновок з виродженою матрицею жорсткості, і має порядок кількох сотень для компоновок з нормальною рівномірністю жорсткості. Це свідчить про придатність умовного числа матриці жорсткості в якості показника для порівняння рівномірності жорсткості компоновок.

Глобальні показники жорсткості розглянутих компоновок наведені у табл. 2 (для робочого простору 500×500×500 мм із центром у точці (0, 0, 750 мм) у системі координат нерухомої платформи в характерних точках з кроком 50 мм).

Таблиця 2 – Глобальні показники жорсткості компоновок

Показник	Позначення	Компоновка				
		3×3	3×6	6×3	6×6	Мод. 6×6
Середня жорсткість, $\times 10^6$ Н/м	$\overline{j_x}$	74,4	68,4	68,4	66,1	89,2
	$\overline{j_y}$	74,4	68,4	68,4	66,1	64,4
	$\overline{j_z}$	283	302	302	310	304
Загальна середня жорсткість, $\times 10^6$ Н/м	$\overline{j}$	144	146	146	147	153
Розкид жорсткості, $\times 10^6$ Н/м	σ_x	27,9	32,2	32,2	34,3	35,2
	σ_y	27,9	32,2	32,2	34,3	46,6
	σ_z	31,2	40,5	40,4	44,7	52,0
Коефіцієнт варіації	υ_x	0,375	0,470	0,470	0,518	0,395
	υ_y	0,375	0,471	0,470	0,518	0,724
	υ_z	0,110	0,134	0,134	0,144	0,171
Мінімальна жорсткість, $\times 10^6$ Н/м	$j_x^{\min}$	23,5	16,0	16,2	15,2	28,6
	$j_y^{\min}$	26,0	18,3	18,3	15,2	6,00
	$j_z^{\min}$	159	156	156	162	137
Показник рівномірності	j_C	231	586	1210	–	$2{,}82\times 10^{16}$
Середнє мінімальне власне число, $\times 10^6$	j_{mN}	1,81	0,828	0,458	0	0,011
Середнє максимальне власне число, $\times 10^6$	j_{MN}	348	380	379	392	407

Найменша середня жорсткість у напрямку осі Z властива компоновці 3×3, а для інших вона приблизно однакова; найбільша середня жорсткість у напрямку осі X властива модифікованій компоновці 6×6, у напрямку осі Y – компоновці 3×3.

Найбільшу загальну середню жорсткість має модифікована компоновка 6×6, для решти вона знаходиться на одному рівні. Найменший розкид жорсткості у напрямках усіх координатних осей має компоновка 3×3, максимальний – модифікована компоновка 6×6. Найкращі показники мінімальної жорсткості у робочому просторі має компоновка 3×3, найгірші (за всіма напрямками, окрім осі X) – модифікована компоновка 6×6.

Найменший показник рівномірності жорсткості (що відповідає кращій рівномірності) має компоновка 3×3, найвищі показники – компоновки 6×6 з виродженою жорсткістю. Найбільша величина середнього мінімального власного числа матриці жорсткості (найбільша мінімальна жорсткість) для компоновки 3×3, найменша – для компоновок 6×6. Найбільшу середню величину максимальної жорсткості у робочому просторі має модифікована компоновка 6×6.

Таким чином, серед розглянутих локальних показників жорсткості:

– визначник матриці жорсткості – нульовий у випадку особливих положень і виродженості жорсткості;

– ранг матриці жорсткості – вказує на виродженість жорсткості, несе інформацію про „зайві” ступені вільності (менше 6 вказує на особливі положення);

– умовне число матриці жорсткості – характеризує рівномірність жорсткості (менше – краще);

– власні значення матриці жорсткості – дають інформацію про головні жорсткості (більше – краще, наявність нульових значень вказує на особливі положення);

– слід та норми матриці жорсткості не несуть значної інформації про характер матриці жорсткості та не дозволяють проводити порівняння різних компоновок.

Серед глобальних показників жорсткості у робочому просторі найбільш ефективні:

– середня жорсткість по координатним напрямкам та загальна середня жорсткість (більше – краще);

– розкид жорсткості та коефіцієнт варіації по координатним напрямкам, характеризує рівномірність жорсткості у робочому просторі (менше – краще);

– мінімальні значення жорсткості по координатним напрямкам (більше – краще);

– показник рівномірності жорсткості на основі середнього умовного числа матриці жорсткості (менше – краще);

– середнє мінімальне (максимальне) власне число матриці жорсткості у робочому просторі – вказує на найменші (найбільші) величини жорсткості (більше – краще).

Висновки

1. Загальна жорсткість обладнання з паралельною кінематикою характеризується матрицею просторової жорсткості, яка несе повну інформацію про параметри жорсткості механізму. Оскільки використання її з метою оцінки та порівняння жорсткості одного механізму в різних положенням або різних механізмів досить незручне, для оцінки жорсткості механізмів паралельної структури використовуються різні додаткові показники – як локальні, що характеризують жорсткість у поточному положенні та орієнтації робочого органа, так і глобальні, що характеризують жорсткість у всьому робочому просторі.

2. Встановлено, що серед розглянутих локальних показників жорсткості доцільно використовувати визначник та ранг матриці жорсткості в якості індикаторів виродженості жорсткості та особливих положень; умовне число матриці жорсткості характеризує рівномірність жорсткості; власні значення матриці жорсткості дають інформацію про головні жорсткості. Слід та норми матриці жорсткості не несуть значної інформації про характер матриці жорсткості та не дозволяють проводити порівняння різних компоновок.

3. Серед глобальних показників жорсткості у робочому просторі найбільш ефективними для оцінки координатної жорсткості є середні та мінімальні значення жорсткості по координатним напрямкам; рівномірність координатної жорсткості характеризується середньоквадратичним відхиленням жорсткості у напрямках координатних осей; загальна рівномірність – середнім умовним числом матриці жорсткості; мінімальну та максимальну загальну жорсткість компоновки у робочому просторі характеризує середнє мінімальне (максимальне) власне число матриці жорсткості.

4. На основі аналізу жорсткості ряду компоновочних схем верстатів-гексаподів з різним розташуванням шарнірних опор на нерухомій основі та робочому органі встановлено, що найбільш доцільною з точки зору величини та рівномірності розподілу жорсткості у робочому просторі є компоновочна схема 3×3.

Список літератури

1. Merlet J.P. Parallel Robots. 2nd ed., Springer, 2006. – 394 p.
2. Carbone G. Stiffness Evaluation of Multibody Robotic Systems, PhD. Dissertation. – LARM, University of Cassino, Cassino, 2003. – 194 p.
3. Иванов А.В. Обеспечение качественных показателей компоновки станка-манипулятора с параллельной кинематикой. Автореф… дис. к.т.н. – Комсомольск-на-Амуре, 2006. – 21 с.
4. Tahmasebi, F. Tsai, L-W. Jacobian and Stiffness Analysis of a Novel Six-DOF Parallel Minimanipulator. Technical Report, 1992. Series/Report no.: ISR; TR 1992-8.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 312 с.

Рассмотрена система локальных и глобальных показателей жесткости станочного оборудования с параллельной кинематикой, характеризующих жесткости в определенном положении рабочего органа и во всем рабочем пространстве. Применение показателей жесткости проанализировано на примере сравнения компоновок гексаподов.

The set of local and global stiffness performance indices of parallel kinematic machine tools is considered, which describes the stiffness in certain position and whole workspace. The use of proposed indices is considered by example of comparison of different hexapod configurations.