

## Методика складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами і її застосування до системи ротор - масивний корпус - автобалансир

Пропонується методика складання спрощених диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами, що ґрунтується на припущенні про малість лінійних і кутових відхилень подовжньої осі ротора, і про малість маси дисбалансу і корегувальних вантажів в порівнянні з масою ротора. Ефективність методики розглядається на прикладі системи, що складається зі встановленого на в'язко-пружні опори масивного корпусу, статично неврівноваженого ротора що обертається в ньому і несе кульовий автобалансир.

**ротор, автобалансування, дисбаланс, автобалансир, диференціальні рівняння**

**Вступ.** Для складання диференціальних рівнянь руху роторних систем з автобалансирами (АБ) застосовуються рівняння Лагранжа II роду, або загальні теореми динаміки [1-3]. На практиці рівняння, які при цьому одержуються майже не піддаються аналітичному дослідженню через істотну нелінійність і велику кількість ступенів вільності системи. У роботі [2] використовуються спрощені диференціальні рівняння руху роторів з АБ, але відсутня методика одержання таких рівнянь. У роботі [3] даються певні рекомендації із складання спрощених рівнянь, засновані на припущеннях, що обмежують рух (кульового) АБ, обговорюється вигляд диференціальних рівнянь руху, що одержуються, але також відсутня загальна методика, що ускладнює застосування на практиці наведених у роботі рекомендацій. Тому у цій роботі розробляється новий метод складання спрощених диференціальних рівнянь руху роторних систем з АБ, що ґрунтується на припущеннях про малість лінійних і кутових відхилень подовжньої осі ротора, і про малість маси дисбалансу і корегувальних вантажів (КВ) щодо маси ротора. Застосування методу ілюструються на прикладі системи, складеної з важкого корпусу на в'язко-пружних опорах і розміщеного в ньому статично неврівноваженого ротора з кульовим АБ.

**§1. Опис моделі.** Осесиметричний ротор насаджений на жорсткий невагомий, або вагомий вал, маса якого віднесена до маси ротора і який жорстко закріплений у корпусі (рис. 1.1). Загальна маса ротора  $m_p$ , маса корпусу  $M_k$ . Корпус утримують в'язко-пружні опори. Центр мас ротора і масивного корпусу співпадають і знаходяться у точці  $O$ . Складова  $\omega$  швидкості обертання ротора навколо вала є сталою. Пружні властивості опор характеризують коефіцієнти жорсткості  $c_{Lx}, c_{Ly}, c_{Ly}, c_{Rx}, c_{Ry}$ , а в'язкі – коефіцієнти в'язкості  $h_{Lx}, h_{Ly}, h_{Ly}, h_{Rx}, h_{Ry}$ . В площині  $z = d$  знаходиться статичний дисбаланс  $s$ , утворений точковою масою  $m_0$ , що знаходиться на відстані  $r_0$  до подовжньої осі ротора ( $s = m_0 r_0$ ).

На рис. 1.1 наведена схема нерухомої системи у положенні статичної рівноваги. Система координат  $Oxuz$  - нерухома, а  $G\xi\eta\zeta$  - рухома і жорстко зв'язана з ротором. У наведеному положенні ці системи співпадають. Вісь  $z$  спрямована по осі вала, вісь  $x$  спрямована у бік початкового напрямку вектора статичного дисбалансу  $s$ , а вісь  $y$  спрямована так, що система координат – права.

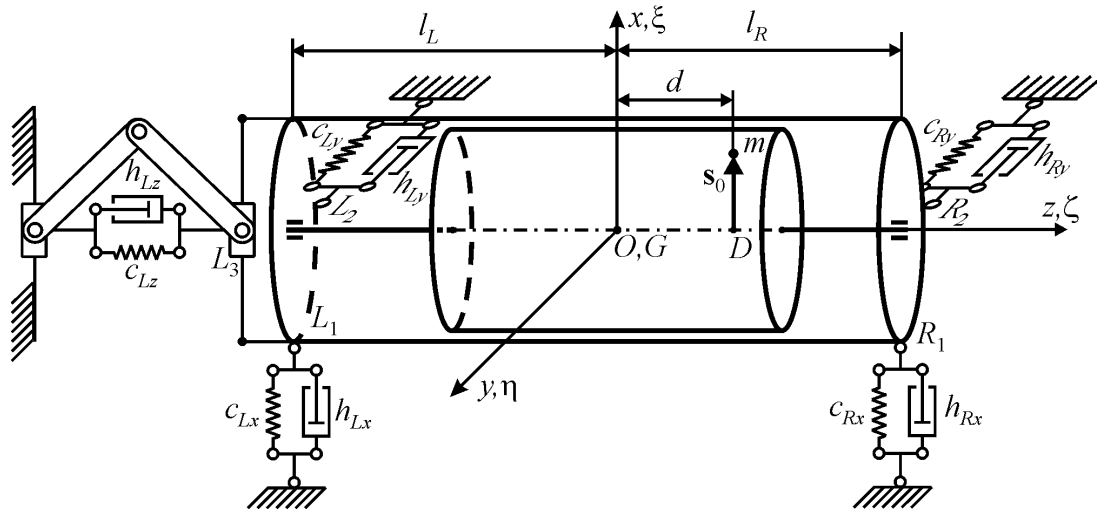


Рисунок 1.1 – Ротор у масивному корпусі, встановленому на в'язко-пружних опорах

Модель руху ротора (з масивним корпусом і дисбалансом) наведена на рис. 1.2. Спочатку здійснюється поступальний рух ротора з корпусом разом з точкою  $G$  в положення  $(x_G, y_G, z_G)$ , після якого система координат  $G\xi\eta\zeta$  займає проміжне положення  $Gx_Gy_Gz_G$  (рис. 1.2, а). Потім відбуваються повороти ротора з корпусом навколо точки  $G$  на кути Резаля  $\alpha$  і  $\beta$  (рис. 1.2, б), після чого осі системи  $Gx_Gy_Gz_G$  переходять у осі –  $Guv\zeta$ . Останнім відбувається поворот ротора навколо подовжньої осі  $\zeta$  на кут  $\omega t$  (рис. 1.2, в), після чого осі системи  $Guv\zeta$  переходять у осі –  $G\xi\eta\zeta$ .

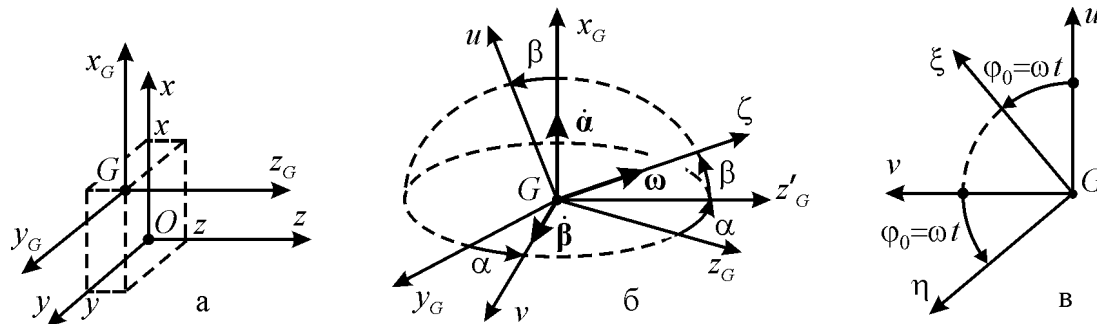


Рисунок 1.2 – Кінематика руху ротора і корпусу

У площині  $z = d$  знаходиться кульовий АБ, складений з  $n$  куль. Маса  $i$ -ої кулі  $m_i$  і вона рухається по кільцевій доріжці радіуса  $r_i$  (рис. 1.3).

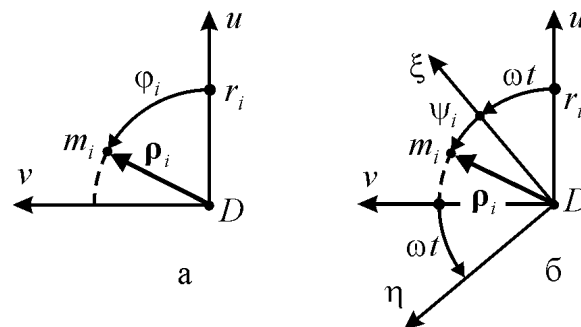


Рисунок 1.3 – Кінематика руху куль і маси дисбалансу

Вважається, що: кулі є матеріальними точками; якщо кулі знаходяться на одній доріжці, то вони не заважають рухатися одна одній.

Положення куль у площині  $z = d$  визначатимемо абсолютними  $\varphi_i$  (рис. 1.3, а), або відносними кутами  $\psi_i$  (рис. 1.3, б):  $\varphi_i = \omega t + \psi_i$ ,  $/i = \overline{1, n}/$ .

Відносному рухові куль перешкоджають сили в'язкого опору  $F_i^{(on)} = h_i u_i$ ,  $/i = \overline{1, n}/$ , де  $h_i$  – коефіцієнт сил в'язкого опору,  $u_i$  – модуль відносної швидкості кулі. Силами ваги, що діють на систему – нехтуємо.

## §2. Методика складання спрощених диференціальних рівнянь руху системи.

Для складання диференціальних рівнянь руху системи використовуємо рівняння Лагранжа II роду у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}, \quad q = (x, y, z, \alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T, \quad (2.1)$$

де  $T$  – кінетична,  $\Pi$  – потенціальна енергії системи,  $\Phi$  – дисипативна функція релая,  $q$  – вектор узагальнених координат, що визначають рух системи.

Пропонується відразу складати спрощені диференціальні рівняння руху системи у припущеннях, що подовжня вісь ротора під час його руху здійснює невеликі відхилення від положення статичної рівноваги, що похідні від цих відхилень – також малі величини, і що маса КВ в АВ та маса дисбалансу значно менші маси ротора. В аналітичному записі для розглядуваної системи ці припущення мають наступний вигляд:

$$|\alpha|, |\beta|, |x|, |y|, |z| \ll 1; \quad |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}|, |\dot{x}|, |\dot{y}|, |\dot{z}| \ll 1; \quad \sum_{i=0}^n m_i \ll m_p, M_k. \quad (2.2)$$

### 1. Кінетична енергія системи.

Кінетична енергія ротора є сумою кінетичної енергії поступального руху разом з центром мас і кінетичної енергії обертального руху навколо центра мас ротора:

$$T_p = T_p^{(noc)} + T_p^{(ob)}, \quad T_p^{(noc)} = m_p \mathbf{v}_G^2 / 2, \quad T_p^{(ob)} = \omega_p^T \mathbf{J}_p \omega_p / 2.$$

Радіус-вектор точки  $G$ , її швидкість  $\mathbf{v}_G$  в проекціях на осі нерухомої системи  $Oxyz$ , кутова швидкість обертання ротора  $\omega_p$  та його тензор інерції  $\mathbf{J}_p$  в проекціях на осі рухомої системи  $Guv\zeta$  мають вигляд

$$\mathbf{r}_G \approx (x, y, z)^T, \quad \mathbf{v}_G \approx (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T, \quad \omega_p \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega + \dot{\alpha}\beta)^T, \quad \mathbf{J}_p = \text{Diag}(A_p, A_p, C_p).$$

Тоді з точністю до величин другого порядку малості включно маємо

$$T_p \approx m_p (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) / 2 + [A_p (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + C_p (\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)] / 2. \quad (2.3)$$

Кінетична енергія масивного корпусу знаходиться аналогічно ротору:

$$T_k = T_k^{(noc)} + T_k^{(ob)}, \quad T_k^{(noc)} = m_k \mathbf{v}_G^2 / 2, \quad T_k^{(ob)} = \omega_k^T \mathbf{J}_k \omega_k / 2.$$

Кутова швидкість обертання корпусу, та його тензор інерції в проекціях на осі рухомої системи  $Guv\zeta$

$$\omega_k \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\alpha}\beta)^T, \quad \mathbf{J}_k = \text{Diag}(A_k, A_k, C_k).$$

З точністю до величин другого порядку малості включно

$$T_k \approx m_k (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) / 2 + A_k (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) / 2. \quad (2.4)$$

Кінетична енергія  $i$ -ої кулі, чи дисбалансу дорівнює  $T_i = m_i \mathbf{v}_i^2 / 2$ ,  $/i = \overline{0, n}/$ . Швидкість маси  $m_i$  знаходимо як суму швидкості переносного – поступального руху разом з полюсом  $G$  і швидкості відносного – обертального руху маси навколо полюса  $G$ . Відносно осей системи  $Guv\zeta$  маса  $m_i$  має такі координати і кутову швидкість обертання навколо точки  $G$ :

$$\mathbf{r}_i = (r_i \cos \varphi_i, r_i \sin \varphi_i, d)^T, \quad \omega_i \approx (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}_i + \dot{\alpha}\beta)^T, \quad /i = \overline{0, n}/.$$

Матриця перетворення координат при переході від системи  $Guv\zeta$  до  $Gx_G y_G z_G$

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

В проекціях на осі системи  $Guv\zeta$  швидкість точки  $i$ :  $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}_{\alpha\beta}^T \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i$ ,  $/i = \overline{0, n}/$ . З урахуванням співвідношень малості (2.2), з точністю до величин другого порядку малості включно

$$T_i \approx m_i \{r_i^2 \dot{\phi}_i^2 - 2r_i \dot{\phi}_i [(\dot{x} + d\dot{\beta}) \sin \phi_i - (\dot{y} - d\dot{\alpha}) \cos \phi_i] + \dots\} / 2, \quad /i = \overline{0, n}/. \quad (2.5)$$

З врахуванням (2.3)-(2.5) кінетична енергія системи з точністю до величин другого порядку малості включно має вигляд

$$T = T_\kappa + T_p + \sum_{i=0}^n T_i \approx \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} [A(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + C(\omega^2 + 2\omega\dot{\alpha}\beta)] + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n m_i \{r_i^2 \dot{\phi}_i^2 - 2r_i \dot{\phi}_i [(\dot{x} + d\dot{\beta}) \sin \phi_i - (\dot{y} - d\dot{\alpha}) \cos \phi_i]\}. \quad (2.6)$$

де

$$M = M_\kappa + m_p, \quad A = A_\kappa + A_p, \quad C = C_p. \quad (2.7)$$

З рівнянь (2.6), (2.7) видно, що корпус, що здійснює тільки частину рухів ротора додає до відповідних масо-інерційних характеристик ротора свої характеристики. При цьому начебто утворюється інший – більш масивний і подовжений ротор. Через це навіть короткий ротор у масивному корпусі може поводитися як довгий.

За рівнянням (2.6) обчислюються ліві частини рівнянь Лагранжа II роду.

## 2. Потенціальна енергія, накопичена опорами

$$\Pi = (c_{Lx} \Delta r_{L_1x}^2 + c_{Ly} \Delta r_{L_2y}^2 + c_{Lz} \Delta r_{L_3z}^2 + c_{Rx} \Delta r_{R_1x}^2 + c_{Ry} \Delta r_{R_2y}^2) / 2.$$

де в проекціях на осі нерухомої системи  $Oxyz$  вектори відхилень точок  $L_1, L_2, L_3, R_1, R_2$  від положень, що відповідають статичній рівновазі корпуса:

$$\Delta \mathbf{r}_{L_1} \approx \begin{pmatrix} x - l_L \beta \\ y + l_L \alpha \\ z + r_\kappa \beta \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{r}_{L_2} \approx \begin{pmatrix} x - l_L \beta \\ y + l_L \alpha \\ z - r_\kappa \alpha \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{r}_{L_3} \approx \begin{pmatrix} x - l_L \beta \\ y + l_L \alpha \\ z \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{r}_{R_1} \approx \begin{pmatrix} x + l_R \beta \\ y - l_R \alpha \\ z + r_\kappa \beta \end{pmatrix}, \quad \Delta \mathbf{r}_{R_2} \approx \begin{pmatrix} x + l_R \beta \\ y - l_R \alpha \\ z - r_\kappa \alpha \end{pmatrix}.$$

Підставивши проекції відхилень у потенціальну енергію перетворюємо її до вигляду

$$\Pi = (c_x x^2 + c_y y^2 + c_z z^2 + c_\alpha \alpha^2 + c_\beta \beta^2 - 2c_{x\beta} x\beta + 2c_{y\alpha} y\alpha) / 2. \quad (2.8)$$

де

$$c_x = c_{Lx} + c_{Rx}, \quad c_y = c_{Ly} + c_{Ry}, \quad c_z = c_{Rz}, \quad c_\alpha = c_{Ly} l_L^2 + c_{Ry} l_R^2, \quad c_\beta = c_{Lx} l_L^2 + c_{Rx} l_R^2, \\ c_{x\beta} = c_{Lx} l_L - c_{Rx} l_R, \quad c_{y\alpha} = c_{Ly} l_L - c_{Ry} l_R. \quad (2.9)$$

## 3. Дисипативна функція Релея

$$\Phi = \frac{1}{2} [h_{Lx} \Delta \dot{r}_{L_1x}^2 + h_{Ly} \Delta \dot{r}_{L_2y}^2 + h_{Lz} \Delta \dot{r}_{L_3z}^2 + h_{Rx} \Delta \dot{r}_{R_1x}^2 + h_{Ry} \Delta \dot{r}_{R_2y}^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i u_i^2,$$

де швидкості куль відносно ротора

$$u_i = r_i (\dot{\phi}_i - \omega), \quad /i = \overline{1, n}/.$$

Підставляючи швидкості у дисипативну функцію Релея, перетворюємо її до вигляду

$$\Phi = \frac{1}{2} [h_x \dot{x}^2 + h_y \dot{y}^2 + h_\alpha \dot{\alpha}^2 + h_\beta \dot{\beta}^2 + h_z \dot{z}^2 - 2h_{x\beta} \dot{x}\dot{\beta} + 2h_{y\alpha} \dot{y}\dot{\alpha}] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i r_i^2 (\dot{\phi}_i - \omega)^2. \quad (2.10)$$

де

$$h_x = h_{Lx} + h_{Rx}, \quad h_y = h_{Ly} + h_{Ry}, \quad h_z = h_{Lz}, \quad h_\alpha = h_{Ly} l_L^2 + h_{Ry} l_R^2, \quad h_\beta = h_{Lx} l_L^2 + h_{Rx} l_R^2,$$

$$h_{x\beta} = h_{Lx}L_L - h_{Rx}L_R, \quad h_{y\alpha} = h_{Ly}L_L - h_{Ry}L_R. \quad (2.11)$$

За потенціальною енергією у вигляді (2.8), та за дисипативною функцією Релея у вигляді (2.10) визначаються праві частини рівнянь Лагранжа II роду.

Рівняння Лагранжа II роду (2.1) дають такі **диференціальні рівняння руху системи**

$$\begin{aligned} M\ddot{z} + h_z\dot{z} + c_z z &= 0, \\ M\ddot{x} + h_x\dot{x} + c_x x - h_{x\beta}\dot{\beta} - c_{x\beta}\beta - \sum_{i=0}^n m_i r_i (\ddot{\phi}_i \sin \phi_i + \dot{\phi}_i^2 \cos \phi_i) &= 0, \\ M\ddot{y} + h_y\dot{y} + c_y y + h_{y\alpha}\dot{\alpha} + c_{y\alpha}\alpha + \sum_{i=0}^n m_i r_i (\ddot{\phi}_i \cos \phi_i - \dot{\phi}_i^2 \sin \phi_i) &= 0, \\ A\ddot{\alpha} + h_\alpha\dot{\alpha} + c_\alpha \alpha + C\omega\dot{\beta} + h_{y\alpha}\dot{y} + c_{y\alpha}y - d \sum_{i=0}^n m_i r_i (\ddot{\phi}_i \cos \phi_i - \dot{\phi}_i^2 \sin \phi_i) &= 0, \\ A\ddot{\beta} + h_\beta\dot{\beta} + c_\beta \beta - C\omega\dot{\alpha} - h_{x\beta}\dot{x} - c_{x\beta}x - d \sum_{i=0}^n m_i r_i (\ddot{\phi}_i \sin \phi_i + \dot{\phi}_i^2 \cos \phi_i) &= 0, \\ m_i r_i [\ddot{\phi}_i r_i - (\ddot{x} + d\ddot{\beta}) \sin \phi_i + (\ddot{y} - d\ddot{\alpha}) \cos \phi_i] + h_i r_i^2 (\dot{\phi}_i - \omega) &= 0, \quad /i = \overline{1, n}/. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Одержана система розпалася на дві незалежні підсистеми. Перше рівняння в (2.12) описує затухаючий рух системи вздовж осі  $z$ . Решта рівнянь описує процес автобалансування. Будемо у подальшому розглядати тільки ці рівняння.

### §3. Узагальнення методики складання диференціальних рівнянь руху.

1. Вводимо у розглядання узагальнені координати, що визначають проекції сумарного дисбалансу точкової маси і куль на осі  $u, v$  відповідно

$$s_u = \sum_{i=0}^n m_i r_i \cos \phi_i, \quad s_v = \sum_{i=0}^n m_i r_i \sin \phi_i. \quad (3.1)$$

Тоді диференціальні рівняння руху ротора можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + h_x\dot{x} + c_x x - h_{x\beta}\dot{\beta} - c_{x\beta}\beta + \ddot{s}_u &= 0, \quad M\ddot{y} + h_y\dot{y} + c_y y + h_{y\alpha}\dot{\alpha} + c_{y\alpha}\alpha + \ddot{s}_v = 0, \\ A\ddot{\alpha} + h_\alpha\dot{\alpha} + c_\alpha \alpha + C\omega\dot{\beta} + h_{y\alpha}\dot{y} + c_{y\alpha}y - d\ddot{s}_v &= 0, \\ A\ddot{\beta} + h_\beta\dot{\beta} + c_\beta \beta - C\omega\dot{\alpha} - h_{x\beta}\dot{x} - c_{x\beta}x + d\ddot{s}_u &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отже диференціальні рівняння руху ротора відносно його координат і дисбалансу є лінійними.

2. Вводимо у розглядання проекції прискорення точки  $D$  на осі  $u, v$

$$\ddot{u}_D \approx \ddot{x} + d\ddot{\beta}, \quad \ddot{v}_D \approx \ddot{y} - d\ddot{\alpha}. \quad (3.3)$$

тоді диференціальні рівняння руху куль приймуть вигляд:

$$m_i r_i [\ddot{\phi}_i r_i - \ddot{u}_D \sin \phi_i + \ddot{v}_D \cos \phi_i] + h_i r_i^2 (\dot{\phi}_i - \omega) = 0, \quad /i = \overline{1, n}/. \quad (3.4)$$

Отже для будь-якого кульового АБ його диференціальні рівняння руху будуть мати вигляд (3.4).

3. Нехай у двох різних площинах корекції ротора, що знаходяться на відстані  $d_k$  від центра мас ротора знаходиться два кульових АБ, складених з  $n_k$  куль, що мають маси  $m_{ki}$  і рухаються по доріжках радіуса  $r_{ki}$ ,  $/i = \overline{1, n_k}/$ ,  $/k = 1, 2/$ . Нехай у цих площинах дисбаланси утворюють точкові маси  $m_{k0}$ , що знаходяться на відстані  $r_{k0}$  від подовжньої осі ротора. Нехай положення дисбалансу і куль задають абсолютні кути  $\phi_{ki}$ ,  $/i = \overline{0, n_k}/$ . Для кожної площини зрівноваження вводимо узагальнені координати, що визначають проекції сумарного дисбалансу точкової маси і куль на осі  $u, v$

$$s_{ku} = \sum_{i=0}^{n_k} m_{ki} r_{ki} \cos \varphi_{ki}, \quad s_{kv} = \sum_{i=0}^{n_k} m_{ki} r_{ki} \sin \varphi_{ki}, \quad / k = 1, 2 / . \quad (3.5)$$

Тоді диференціальні рівняння руху ротора знову залишаються лінійними:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + h_x \dot{x} + c_x x - h_{x\beta} \dot{\beta} - c_{x\beta} \beta + \ddot{s}_{1u} + \ddot{s}_{2u} &= 0, & M\ddot{y} + M\dot{y} + h_y \dot{y} + c_y y + h_{y\alpha} \dot{\alpha} + c_{y\alpha} \alpha + \ddot{s}_{1v} + \ddot{s}_{2v} &= 0, \\ A\ddot{\alpha} + h_\alpha \dot{\alpha} + c_\alpha \alpha + C\omega \dot{\beta} + h_{y\alpha} \dot{y} + c_{y\alpha} y - d_1 \ddot{s}_{1v} - d_2 \ddot{s}_{2v} &= 0, \\ A\ddot{\beta} + h_\beta \dot{\beta} + c_\beta \beta - C\omega \dot{\alpha} - h_{x\beta} \dot{x} - c_{x\beta} x + d_1 \ddot{s}_{1u} + d_2 \ddot{s}_{2u} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Диференціальні рівняння руху куль матимуть вигляд

$$m_{ki} r_{ki} [\ddot{\varphi}_{ki} r_{ki} - \ddot{u}_{kD} \sin \varphi_{ki} + \ddot{v}_{kD} \cos \varphi_{ki}] + h_{ki} r_{ki}^2 (\dot{\varphi}_{ki} - \omega) = 0, \quad / i = \overline{1, n_k}, \quad k = 1, 2 / . \quad (3.7)$$

де

$$\ddot{u}_{kD} \approx \ddot{x} + d_k \ddot{\beta}, \quad \ddot{v}_{kD} \approx \ddot{y} - d_k \ddot{\alpha}, \quad / k = 1, 2 / . \quad (3.8)$$

4. При використанні відносних кутів диференціальні рівняння руху куль (3.4) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} m_i r_i^2 \ddot{\psi}_i + h_i r_i^2 \dot{\psi}_i &= \\ = m_i r_i [(\ddot{v}_D \sin \psi_i + \ddot{u}_D \cos \psi_i) \sin \omega t + (\ddot{u}_D \sin \psi_i - \ddot{v}_D \cos \psi_i) \cos \omega t], & / i = \overline{1, n} / . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Введемо проекції дисбалансу на осі  $\xi, \eta$ :

$$s_\xi = \sum_{i=1}^n m_i r_i \cos \psi_i + m_0 r_0, \quad s_\eta = \sum_{i=1}^n m_i r_i \sin \psi_i. \quad (3.10)$$

Тоді

$$s_u = s_\xi \cos \omega t - s_\eta \sin \omega t, \quad s_v = s_\xi \sin \omega t + s_\eta \cos \omega t. \quad (3.11)$$

Зробимо заміну координат, що визначають положення точки  $D$ :

$$u_D = \xi_D \cos \omega t - \eta_D \sin \omega t, \quad v_D = \xi_D \sin \omega t + \eta_D \cos \omega t. \quad (3.12)$$

Тоді диференціальні рівняння руху куль (3.9) приймуть вигляд:

$$m_i r_i^2 \ddot{\psi}_i + h_i r_i^2 \dot{\psi}_i = m_i r_i (a_{D\xi} \sin \psi_i - a_{D\eta} \cos \psi_i), \quad / i = \overline{1, n} / , \quad (3.13)$$

де  $a_{D\xi} = \ddot{\xi}_D - 2\omega \dot{\eta}_D - \omega^2 \xi_D$ ,  $a_{D\eta} = \ddot{\eta}_D + 2\omega \dot{\xi}_D - \omega^2 \eta_D$  – проекції прискорення точки  $D$  на осі  $\xi, \eta$ .

5. На основних рухах ротор зрівноважений і обертається навколо власної подовжньої осі і тому узагальнені координати ротора і дисбалансу дорівнюють 0:

$$x = y = 0, \quad \alpha = \beta = 0, \quad s_u = s_v = 0, \quad (s_{1u} = s_{1v} = 0, \quad s_{2u} = s_{2v} = 0). \quad (3.14)$$

Стійкість основних рухів можна досліджувати по цим узагальненим координатам. Але система рівнянь (3.2) (чи (3.6) і (3.7)) – незамкнена. До неї ще треба додати мінімальну кількість рівнянь, що є комбінаціями диференціальних рівнянь руху куль.

У випадку однакових куль, що рухаються по одній доріжці рівняння (3.13) приймають вигляд

$$m r^2 \ddot{\psi}_i + h r^2 \dot{\psi}_i = m r (a_{D\xi} \sin \psi_i - a_{D\eta} \cos \psi_i), \quad / i = \overline{1, n} / . \quad (3.15)$$

Помножимо кожне рівняння в (3.15) на  $\sin \psi_i$  і додамо. Потім теж саме для  $\cos \psi_i$ . Після перетворень одержимо

$$\begin{aligned} \ddot{s}_\xi + r h \cdot \dot{s}_\xi &= m \left( -a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin^2 \psi_i + a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \sin \psi_i \cos \psi_i + r \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_i^2 \cos \psi_i \right), \\ \ddot{s}_\eta + r h \cdot \dot{s}_\eta &= m \left( a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin \psi_i \cos \psi_i - a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \cos^2 \psi_i + r \sum_{i=1}^n \dot{\psi}_i^2 \sin \psi_i \right). \end{aligned}$$

При дослідженні стійкості усталених рухів ці рівняння замикають систему рівнянь (3.2). В околі певного усталеного руху вони лінеаризуються і приймають вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{s}_\xi + rh \cdot \dot{s}_\xi &= m \left( -a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin^2 \tilde{\psi}_i + a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \sin \tilde{\psi}_i \cos \tilde{\psi}_i \right), \\ \ddot{s}_\eta + rh \cdot \dot{s}_\eta &= m \left( a_{D\xi} \sum_{i=1}^n \sin \tilde{\psi}_i \cos \tilde{\psi}_i - a_{D\eta} \sum_{i=1}^n \cos^2 \tilde{\psi}_i \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

де  $\tilde{\psi}_i, /i = \overline{1, n}/$  – сталі значення кутів, що визначають певний усталений рух.

Аналогічними рівняннями можна замкнути систему рівнянь (3.6), складену для двох АБ.

**Висновки.** Для наближеного вивчення процесу автобалансування можна скласти диференціальні рівняння руху системи у припущеннях, що подовжня вісь ротора має невеликі відхилення і сумарна маса КВ (куль) і маси дисбалансу набагато менша маси ротора. При цьому:

1) одержуються дві групи диференціальних рівнянь руху – ротора і КВ (куль): перші рівняння завжди лінійні щодо координат ротора і узагальнених координат, що визначають дисбаланс ротора, і від них тільки і залежать; друга група рівнянь – однотипна і має форму (3.4), або (3.13) для будь-якого кульового АБ;

2) якщо ротор встановлений у важкий корпус, а останній в'язко-пружно закріплений, причому корпус здійснює тільки частину рухів разом з ротором, то у диференціальних рівняннях руху ротора до частини його масо-інерційних характеристик додаються відповідні масо-інерційні характеристики корпусу, і завдяки цьому ротор начебто збільшує вагу і поводить як більш довгий, ніж без корпусу:

3) стійкість основних рухів системи доцільно досліджувати по координатам ротора і параметрам його дисбалансів, для чого треба замкнути диференціальні рівняння руху ротора мінімальною кількістю рівнянь, що є комбінацією диференціальних рівнянь руху куль; у випадку однорядного кульового АБ із однаковими кулями диференціальні рівняння руху ротора, у випадках одного чи двох АБ, відповідно замикаються двома чи чотирма диференціальними рівняннями вигляду (3.16).

## Список літератури

1. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами. -Кіровоград: КНТУ, 2004. -352 с.
2. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов приборов и машин со многими степенями свободы. -Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1985. -84 с.
3. Горбенко А.Н. Основы общего подхода к анализу устойчивости роторных машин с пассивным автобалансиrom / Керченский гос. морской технол. ун-т. - Керчь, 2008. - 52с. - Рус. - Деп. в ГНТБ Украины 07.07.2008, №108 – Ук2008.

Предлагается методика составления упрощенных дифференциальных уравнений движения роторных систем с автобалансирами, основывающаяся на предположении о малости линейных и угловых отклонений продольной оси ротора, и о малости массы дисбаланса и корректирующих грузов по сравнению с массой ротора. Эффективность методики рассматривается на примере системы, состоящей из установленного на вязко-упругие опоры массивного корпуса, вращающегося в нем статически неуравновешенного ротора с шаровым автобалансиrom.

Is offered the method of obtaining of the simplified differential equations of motion of the rotor's systems with autobalancers, based on supposition about the trifle of linear and angular rejections of longitudinal axis of rotor, and about the trifle of unbalance mass and corrective masses on comparison with mass of rotor. Efficiency of method is considered on the example of the system, consisting of the set on viscid-resilient supports massive corps revolved in him statically unbalanced rotor with a ball autobalancer.