

УДК 621.355:517.9

Т. Г. Сабірзянов, проф., д-р техн. наук, М. В. Кубкін, асист., В. П. Солдатенко, асист., В. В. Мартиненко, студент

Кіровоградський національний технічний університет

## Узагальнена математична модель накопичувача енергії

В статті розглядається математичне моделювання акумуляторів енергії різної природи. Отримані рівняння динаміки для акумуляторної батареї (електрохімічного акумулятора) та теплового акумулятора (накопичувального бойлера).

**математична модель, акумулятор, електрична енергія, тепла енергія**

**Узагальнена математична модель накопичувача енергії.** В загальному випадку будь-яку систему накопичення енергії можна представити у вигляді моделі, наведеної на рис. 1 Тут  $E_{\text{вх}}(t)$  — вхідний потік енергії (потік енергії, що надходить до накопичувача);  $E_{\text{вих}}(t)$  — вихідний потік енергії (потік енергії, що відбирається з накопичувача);  $E_{\text{втр}}(t)$  — потік втрат енергії накопичувача;  $g(t)$  — кількість накопиченої енергії.

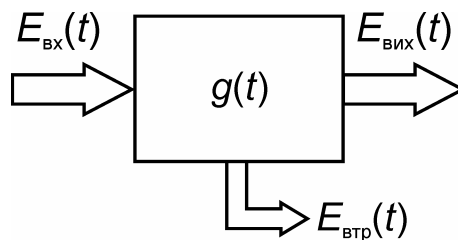


Рисунок 1 — Узагальнена модель накопичувача енергії

Згідно закону збереження енергії, зміна кількості енергії в накопичувачі за час  $\Delta t$  буде визначатись алгебраїчною сумою енергій, що надійшли до накопичувача та відібрались з нього за час  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} g(t + \Delta t) - g(t) &= E_{\text{вх}}(t)\Delta t - E_{\text{вих}}(t)\Delta t - E_{\text{втр}}(t)\Delta t = \\ &= [E_{\text{вх}}(t) - E_{\text{вих}}(t) - E_{\text{втр}}(t)]\Delta t. \end{aligned} \quad (1)$$

Приймемо, що втрата енергії накопичувача  $E_{\text{втр}}(t)\Delta t$  буде залежати від кількості накопиченої енергії  $g(t)$  і введемо поняття «*коефіцієнт втрат накопичувача енергії*», який визначає частку від накопиченої енергії, яка буде втрачатись накопичувачем за час  $\Delta t$ :

$$\varepsilon(t) \triangleq \frac{E_{\text{втр}}(t)\Delta t}{g(t)},$$

звідки

$$E_{\text{втр}}(t)\Delta t = \varepsilon(t)g(t).$$

Враховуючи останній вираз, рівняння (1) можна записати як

$$g(t + \Delta t) - g(t) = E_{\text{вх}}(t)\Delta t - E_{\text{вих}}(t)\Delta t - \varepsilon(t)g(t),$$

або після перетворення

$$g(t + \Delta t) = g(t)[1 - \varepsilon(t)] + [E_{\text{вх}}(t) - E_{\text{вих}}(t)]\Delta t. \quad (2)$$

Рівняння (2) будемо називати *рівнянням динаміки накопичувача енергії*. Це рівняння можна застосовувати для опису накопичувачів енергії різної фізичної природи. При цьому характер величин  $\varepsilon(t)$ ,  $E_{\text{вх}}(t)$ ,  $E_{\text{вих}}(t)$  буде визначатись природою енергії, що накопичується (електрична, теплова, механічна, хімічна тощо).

Нижче будуть отримані рівняння динаміки для акумуляторної батареї (електрохімічного акумулятора) та теплового акумулятора (накопичувального бойлера).

**Математична модель акумуляторної батареї.** Основною характеристикою АБ є її *ємність*  $C_{\text{АБ}}$ . Ємністю АБ називають кількість електрики, що виражена в ампер-годинах, яку накопичувач може віддати при розряді струмом певної величини. При розряді номінальним струмом виробником гарантується номінальна ємність АБ —  $C_{\text{АБ ном}}$ .

З енергетичної точки зору АБ характеризується *ККД по енергії*  $\eta_{\text{АБ}}^e$ , який визначається відношенням кількості енергії, що отримана в процесі *розряду*, до кількості енергії, що отримала АБ в процесі *заряду* до початкового стану [1]:

$$\eta_{\text{АБ}}^e = \frac{U_{\text{розр ср}} I_{\text{розр ср}} t_{\text{розр}}}{U_{\text{зар ср}} I_{\text{зар ср}} t_{\text{зар}}},$$

де  $U_{\text{розр ср}}$ ,  $U_{\text{зар ср}}$  — середні напруги розряду та заряду відповідно;

$I_{\text{розр ср}}$ ,  $I_{\text{зар ср}}$  — середні струми розряду та заряду відповідно;

$t_{\text{розр}}$ ,  $t_{\text{зар}}$  — час розряду та заряду відповідно.

Оскільки фізико-хімічні процеси, що відбуваються в АБ, є дуже складними, при створенні математичної моделі, яка буде використовуватись при визначенні складу комбінованої електроенергетичної системи (КЕС), введемо наступні припущення:

а) напруга АБ не залежить від режиму роботи батареї і дорівнює номінальній напрузі  $U_{\text{АБ}} = U_{\text{АБ ном}} = \text{const}$ ;

б) ККД заряду (розряду) не залежить від струму заряду (розряду) та рівня заряду АБ і визначається як [2];

$$\eta_{\text{зар}} = \eta_{\text{розр}} = \sqrt{\eta_{\text{АБ}}^e};$$

в) нехтуємо впливом температури оточуючого середовища на ємність АБ.

Вищезазначені припущення будуть справедливими при умовах експлуатації АБ в межах, що регламентуються виробником.

Потік енергії, що надходить до АБ:

$$E_{\text{АБ вх}}(t) = U_{\text{АБ}} I_{\text{зар}}(t) \eta_{\text{зар}}, \quad (3)$$

де  $I_{\text{зар}}$  — струм заряду акумулятора;

$\eta_{\text{зар}}$  — ККД заряду.

Потік енергії, що відбирається з АБ:

$$E_{\text{АБ вих}}(t) = U_{\text{АБ}} I_{\text{розр}}(t) \eta_{\text{розр}}, \quad (4)$$

де  $I_{\text{розр}}$  — струм розряду акумулятора;

$\eta_{\text{розр}}$  — ККД розряду.

Кількість енергії, що накопичено АБ на момент часу  $t$ :

$$g_{\text{АБ}}(t) = U_{\text{АБ}} C_{\text{АБ}}(t), \quad (5)$$

де  $C_{\text{АБ}}(t)$  — ємність АБ в момент часу  $t$ .

Коефіцієнт втрат потужності накопичувача  $\epsilon_{\text{АБ}}(t)$  для АБ можна визначити з величини *саморозряду* АБ  $\sigma$ . Під саморозрядом розуміють неперервну втрату хімічної енергії, що накопичена в АБ, внаслідок побічних реакцій на пластинах обох полярностей, що викликані домішками в матеріалах АБ або домішками, які виникли в електроліті під час експлуатації. Кількісно саморозряд визначається за наступним виразом [3]:

$$\sigma = \frac{C_{\text{АБ}}(t) - C_{\text{АБ}}(t + \Delta t)}{C_{\text{АБ}}(t) \cdot \Delta t}, \quad (6)$$

де  $C_{\text{АБ}}(t)$  — ємність АБ в момент часу  $t$ ;

$C_{\text{АБ}}(t + \Delta t)$  — ємність АБ в момент часу  $t + \Delta t$ .

Помноживши чисельник і знаменник (6) на  $U_{\text{АБ}}$  і врахувавши (5), отримаємо

$$\sigma = \frac{U_{\text{АБ}} C_{\text{АБ}}(t) - U_{\text{АБ}} C_{\text{АБ}}(t + \Delta t)}{U_{\text{АБ}} C_{\text{АБ}}(t) \cdot \Delta t} = \frac{g_{\text{АБ}}(t) - g_{\text{АБ}}(t + \Delta t)}{g_{\text{АБ}}(t) \cdot \Delta t}. \quad (7)$$

З рівняння (1) враховуючи, що саморозряд визначають при відключеній АБ ( $E_{\text{АБ вх}}(t) = E_{\text{АБ вих}}(t) = 0$ ), чисельник (7) буде дорівнювати  $E_{\text{втр}}(t) \Delta t$ . Таким чином,

$$\sigma = \frac{E_{\text{втр}}(t) \Delta t}{g(t) \cdot \Delta t} = \frac{\epsilon_{\text{АБ}}}{\Delta t},$$

звідки остаточно

$$\epsilon_{\text{АБ}} = \sigma \Delta t. \quad (8)$$

Підставивши (4) – (5), (8) в рівняння динаміки накопичувача (2), отримаємо:

$$U_{AB}C_{AB}(t + \Delta t) = U_{AB}C_{AB}(t)(1 - \sigma\Delta t) + [U_{AB}I_{зар}(t)\eta_{зар} - U_{AB}I_{розр}(t)\eta_{розр}] \Delta t,$$

або

$$C_{AB}(t + \Delta t) = C_{AB}(t)(1 - \sigma\Delta t) + [I_{зар}(t)\eta_{зар} - I_{розр}(t)\eta_{розр}] \Delta t. \quad (9)$$

В закордонній практиці розрахунків режимів роботи КЕС ємність АБ характеризується наступними величинами:

а) рівнем заряду батареї  $SOC(t)$  (*англ.* state of charge) [4], який визначається відношенням поточної ємності АБ до номінальної:

$$SOC(t) = \frac{C_{AB}(t)}{C_{ABном}};$$

б) глибиною розряду  $DOD(t)$  (*англ.* depth of discharge):

$$DOD(t) = 1 - SOC(t).$$

Розділивши обидві частини (9) на  $C_{ABном}$ , отримаємо:

$$SOC(t + \Delta t) = SOC(t)(1 - \sigma\Delta t) + \frac{[I_{зар}(t)\eta_{зар} - I_{розр}(t)\eta_{розр}] \Delta t}{C_{ABном}}. \quad (10)$$

На режими роботи АБ накладаються обмеження:

а) за рівнем заряду батареї:

$$SOC_{\min} \leq SOC(t) \leq SOC_{\max}, \quad (11)$$

де  $SOC_{\min}$  — мінімальний рівень заряду АБ, який нормується виробником;

$SOC_{\max}$  — максимальний рівень заряду АБ ( $SOC_{\max} = 1$ );

б) за струмом АБ:

при заряді:

$$I_{зар}(t + \Delta t) = \begin{cases} I_{AB\max}, & \frac{C_{ABном}}{\Delta t} [SOC_{\max} - SOC(t)] \geq I_{AB\max}; \\ \frac{C_{ABном}}{\Delta t} [SOC_{\max} - SOC(t)], & \frac{C_{ABном}}{\Delta t} [SOC_{\max} - SOC(t)] < I_{AB\max}; \end{cases} \quad (12)$$

при розряді:

$$I_{\delta i \varphi}(t + \Delta t) = \begin{cases} I_{AA\max}, & \frac{C_{AAii}}{\Delta t} [SOC(t) - SOC_{\min}] \geq I_{AA\max}; \\ \frac{C_{AAii}}{\Delta t} [SOC(t) - SOC_{\min}], & \frac{C_{AAii}}{\Delta t} [SOC(t) - SOC_{\min}] < I_{AA\max}; \end{cases} \quad (13)$$

де  $I_{\text{АБ max}}$  — максимально допустимий струм АБ.

**Математична модель теплового акумулятора.** В якості теплового акумулятора будемо розглядати накопичувальний бойлер. Основними технічними характеристиками бойлера виступають: номінальний об'єм води —  $V_{\text{ТА}}$ , максимальна температура води —  $\vartheta_{\text{max}}$ .

При створенні математичної моделі будемо вважати, що рівень води в ТА залишається незмінним ( $V_{\text{ТА}} = \text{const}$ ), тому що витрачена гаряча вода заміщується холодною водою з водопроводу; тиск дорівнює нормальному атмосферному.

Потік енергії, що надходить до ТА:

$$E_{\text{ТА вх}}(t) = I_{\text{ТА}}^2(t) R_{\text{ТА}} \Delta t, \quad (14)$$

де  $I_{\text{ТА}}(t)$  — сила струму в нагрівальному елементі в момент часу  $t$ ;

$R_{\text{ТА}}$  — опір нагрівального елементу.

Потік енергії, що відбирається з ТА:

$$E_{\text{ТА вих}}(t) = \rho G_{\text{ТА}}(t) h_{\text{ТА}}(t) \Delta t, \quad (15)$$

де  $\rho$  — густина води;

$G_{\text{ТА}}(t)$  — витрата води в момент часу  $t$ ;

$h_{\text{ТА}}(t)$  — ентальпія води в момент часу  $t$ .

Кількість енергії, що накопичено ТА на момент часу  $t$ :

$$g_{\text{ТА}}(t) = \rho V_{\text{ТА}} h_{\text{ТА}}(t). \quad (16)$$

Коефіцієнт втрат енергії на момент часу  $t$ :

$$\varepsilon_{\text{ТА}}(t) = \frac{E_{\text{втр}}(t) \Delta t}{g_{\text{ТА}}(t)} = \frac{\alpha K F_{\text{пов}} [\vartheta(h_{\text{ТА}}) - \vartheta_0] \Delta t}{\rho V_{\text{ТА}} h_{\text{ТА}}(t)}, \quad (17)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт тепловіддачі з поверхні ТА;

$K$  — коефіцієнт, що враховує зменшення температури поверхні баку (залежить від коефіцієнта теплопровідності стінок ТА);

$F_{\text{пов}}$  — площа поверхні ТА;

$\vartheta(h_{\text{ТА}})$  — температура води в ТА, яка є функцією ентальпії води:

$$\vartheta(h_{\text{ТА}}) = 0,239 \cdot 10^{-3} h_{\text{ТА}}; \quad 0 \leq h_{\text{ТА}} \leq 419,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг};$$

$\vartheta_0$  — температура оточуючого середовища.

Таким чином рівняння динаміки ТА буде мати вид:

$$\rho V_{\text{ОА}} h_{\text{ОА}}(t + \Delta t) = \rho V_{\text{ОА}} h_{\text{ОА}}(t) \left\{ 1 - \frac{\alpha K F_{\text{ііâ}} [\vartheta(h_{\text{ОА}}) - \vartheta_0] \Delta t}{\rho V_{\text{ОА}} h_{\text{ОА}}(t)} \right\} + [I_{\text{ОА}}^2(t) R_{\text{ОА}} - \rho G_{\text{ОА}}(t) h_{\text{ОА}}(t)] \Delta t,$$

або

$$h_{TA}(t + \Delta t) = h_{TA}(t) \left\{ 1 - \frac{\alpha K F_{\text{пов}} [\vartheta(h_{TA}) - \vartheta_0] \Delta t}{\rho V_{TA} h_{TA}(t)} \right\} + \frac{I_{TA}^2(t) R_{TA} - \rho G_{TA}(t) h_{TA}(t)}{\rho V_{TA}} \Delta t. \quad (18)$$

**Висновки.** Таким чином була запропонована узагальнена математична модель накопичувача енергії, яка дозволяє отримати рівняння для пристрою акумулювання у залежності від накопиченої енергії (електрична, тепла, механічна, хімічна тощо).

Були отримані рівняння динаміки для акумуляторної батареї (електрохімічного акумулятора) та теплового акумулятора (накопичувального бойлера).

Розроблені математичні моделі можна використовувати при розробці імітаційних моделей енергетичних систем, що використовують системи накопичення електричної та теплової енергії.

## Список літератури

1. Скоков Я.М. Химические источники тока. Стационарные аккумуляторы Мн.: ЗАО «Техноперспектива», 2004. — 102 с.
2. Duffie J. Solar engineering of thermal processes / J. Duffie, W. Beckman. — John Wiley & Sons, Inc, New York — 1980.
3. Бут Д.А. Накопители энергии / Д.А. Бут, Б.Л. Алиевский, С.Р. Мизюрин, П.В. Васюкевич. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — 400 с.
4. Yang H A novel optimization sizing model for hybrid solar-wind power generation system / H Yang, L Lu, W Zhou, Solar Energy 81 (2007), 76—84 p

*T. Sabirzanov, M. Kubkin, V. Soldatenko, V. Martynenko*

### **Обобщенная математическая модель накопителя энергии**

В статье рассматривается математическое моделирование аккумуляторов энергии разной природы. Получены уравнения динамики для акумуляторной батареи (электрохимического акумулятора) и теплового акумулятора (накопительного бойлера).

*T. Sabirzanov, M. Kubkin, V. Soldatenko, V. Martynenko*

### **Generalized mathematical model of store of energy**

The article deals with mathematical modeling of energy storage devices of different nature. The equations for the dynamics of the battery (electrochemical battery) and the heat accumulator (storage boiler).

Одержано 30.12.11