

The purpose of work is a calculation of betweenness bending of neutral axis and formative axisymmetrical bodies – rollers, in the process of rolling.

On the basis of method of initial parameters the mathematical model of deformation of formative cylindrical surface of the calibrated rollers, lying on two joint supports is developed.

The got result allows to optimize development of process of high quality rolling with the set exactness.
bending, neutral axis, deformation, axisymmetrical body

Одержано 25.10.12

УДК 621.9.04: 621.9.02

**О.І. Скібінський, доц., канд. техн. наук, В.І. Гуцул, доц., канд. техн. наук,
А.А. Гнатюк, магістр**

Кіровоградський національний технічний університет

Визначення периметрів і площ перерізів робочих профілів коліс епіциклоїдальних передач внутрішнього зачеплення

В статті описано методи аналітичного визначення периметрів і площ перерізів робочих профілів коліс епіциклоїдальних передач внутрішнього зачеплення, досліджено основні співвідношення геометрії кривих профілів та отримані рівняння для обчислення периметрів та площ профілів, описано практичне значення цих параметрів.

периметр робочого профілю, площа перерізу, еквідистанта до епіциклоїди, огинаюча семейства

А.И. Скибинский, В.И. Гуцул, А.А.Гнатюк

Кировоградский Национальный Технический Университет

Определение условий существования сопряженной огибающей семейства эквидистант укороченных эпициклоид в циклоидальной передаче внутреннего зацепления

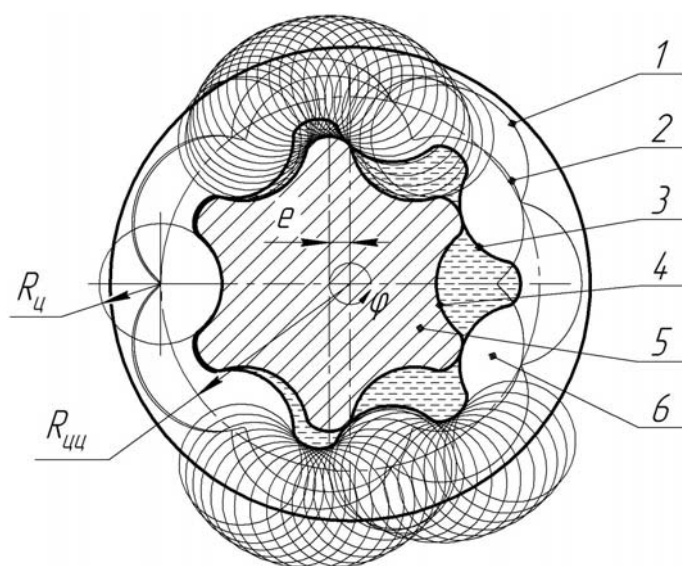
В статье описан метод аналитического определения периметров и площадей сечений рабочих профилей деталей эпициклоидальных передач внутреннего зацепления, исследованы основные соотношения геометрии кривых профилей, а так же получены уравнения для вычисления периметров и площадей профилей, описано практическое значение этих параметров.

периметр рабочего профиля, площадь сечения эквидистанта эпициклоиды, огибающая семейства

Периметри і площі перерізів робочих профілів деталей епіциклоїдальних передач внутрішнього зачеплення – одні з найважливіших параметрів, що впливають на експлуатаційні характеристики як самої передачі, так і героторних машин, до складу яких вони входять. Ці два параметра є визначальними майже для всіх кількісних та якісних характеристик передачі, наприклад для таких як робочий об'єм, гідравлічний радіус передачі (відношення площі перерізу, котрий займає рідина до периметру цього перерізу), враховуються при визначенні гідравлічних втрат в забійних двигунах для буріння і т.д. Найбільш ефективним методом розрахунку геометричних параметрів профілів героторних передач є чисельне інтегрування, також в літературі [3] можна зустріти формули для наближеного обчислення.

При розрахунку довжин дуг і периметрів, вирази зводяться до складних еліптичних інтегралів, котрі вирішуються чисельними методами за допомогою комп'ютерів (в середовищах MathLab, MathCad) або з використанням посібників спеціальних функцій, що створює певні складнощі. Тому виникає необхідність в пошуку універсальних, точних і водночас ефективних розрахункових формул для периметрів і площ профілів циклоїдальних передач.

Героторна передача (рис. 1) складається з нерухомого статора 5 і рухомого ротора 6, що здійснює планетарний рух всередині статора. Профіль ротора 4 є еквідистанта до вкороченої епіциклоїди 2, а профіль статора 3 утворюється як огинаюча положень ротора або як еквідистанта до огинаючої сімейства вкорочених епіциклоїд 1. Очевидно, що корисний об'єм героторної передачі (об'єм що займає рідина) буде рівний різниці площ поперечних перерізів статора S_c і ротора S_p помноженій на висоту передачі h .



- 1 – огинаюча сімейства епіциклоїд; 2 – епіциклоїда; 3 – робочий профіль статора (еквідистанта до огинаючої сімейства епіциклоїд); 4 – робочий профіль ротора (еквідистанта до епіциклоїди);
5 – ротор із числом зубців z_1 ; 6 – статор із числом зубців $z_2=z_1+1$

Рисунок 1 – Загальна схема позацентроїдного епіциклоїдального зачеплення з позначенням основних параметрів

Для визначення периметру і площі перерізу циклоїдального профілю ротора, розглянемо два співвідношення із теорії еквідистантних кривих [2]. Маємо дві замкнуті плоскі криві – вкорочену епіциклоїду АВ (показаний фрагмент) з довжиною дуги L_E та еквідистанту до неї $A'B'$ (робочий профіль ротора), яка віддалена на відстань $R_{ц}$ (рис. 2). Обидві криві мають спільні центри кривизни у відповідних точках, а отже і спільну еволюту. Одна з властивостей еволюти говорить, що приріст довжини її дуги dl рівний приросту радіуса кривизни $d\rho$ лінії, центри кривизни якої, утворюють дану еволюту, тобто:

$$AM = \rho(\varphi_1), \quad BN = \rho(\varphi_2), \quad d\rho = \rho(\varphi_2) - \rho(\varphi_1) = dl. \quad (1)$$

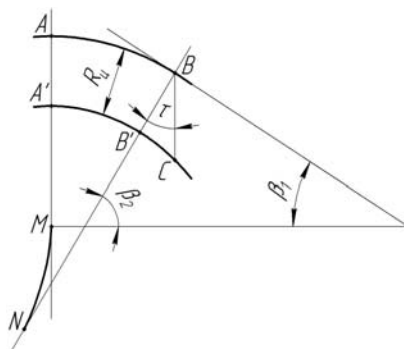


Рисунок 2 – Розрахункова схема еквідистантних кривих і їх еволюти.

Нехай $\rho_E = \rho_E(\varphi)$ і $L_E = L_E(\varphi)$ – радіус кривизни і довжина дуги епіциклоїди АВ, а $\rho_1 = \rho_1(\varphi)$ і $l_1 = l_1(\varphi)$ – відповідно радіус кривизни і довжина дуги еволюти MN. Позначимо також кути, утворені дотичними до епіциклоїди та її еволюти у відповідних точках з віссю ox як β_1 і β_2 . Враховуючи, що $d\rho_E = dl_1$, отримаємо:

$$dL_E / \rho_E = dl_1 / \rho_1, \quad (2)$$

$$\rho_1 = \rho_E \cdot \frac{dl_1}{dL_E} = \rho_E \cdot \frac{d\rho_E}{dL_E} = \frac{d\rho_E}{d\beta_1}. \quad (3)$$

З іншої сторони $d\rho_E = (\rho_E(\varphi_2) - R_u) - (\rho_E(\varphi_1) - R_u) = d\rho_{pn}$, де $\rho_E - R_u$ – радіус кривизни робочого профілю ротора ρ_{pn} (еквідистанти епіциклоїди $A'B'$). На основі останньої рівності запишемо:

$$\rho_E \cdot \frac{d\rho_E}{dL_E} = (\rho_E - R_u) \cdot \frac{d\rho_{pn}}{dL_{pn}} = (\rho_E - R_u) \cdot \frac{d\rho_E}{dL_{pn}} = (\rho_E - R_u) \cdot \frac{d\rho_E}{dL_E} \cdot \frac{dL_E}{dL_{pn}}, \quad (4)$$

де L_{pn} – довжина дуги робочого профілю ротора.

З формули (4) знаходимо:

$$dL_{pn} = \left(1 - \frac{R_u}{\rho_E}\right) \cdot dL_E. \quad (5)$$

Але $dL_E = \rho_E \cdot d\beta_1$. Враховуючи останню рівність, формула для визначення довжини циклоїдального профілю ротора приймає вигляд:

$$L_{pn} = \int_0^{L_E} dL_E - R_u \cdot \int_0^{2\pi} d\beta_1 = L_E - 2 \cdot \pi \cdot R_u. \quad (6)$$

Довжина дуги епіциклоїди в даному випадку виражається інтегралом:

$$L_E = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi. \quad (7)$$

Параметричні рівняння вкороченої епіциклоїди мають вигляд:

$$x(\varphi) = R_{uc} \cos(\varphi/z_2) + e \cdot \cos \varphi, \quad (8)$$

$$y(\varphi) = R_{uc} \sin(\varphi/z_2) + e \cdot \sin \varphi. \quad (9)$$

Перші похідні від координат $x(\varphi)$ і $y(\varphi)$:

$$x'(\varphi) = -e \cdot \sin \varphi - (R_{uc}/z_2) \cdot \sin(\varphi/z_2), \quad (10)$$

$$y'(\varphi) = e \cdot \cos \varphi + (R_{uc}/z_2) \cdot \cos(\varphi/z_2). \quad (11)$$

Підставивши значення похідних $x'(\varphi)$ та $y'(\varphi)$ у формулу (7), після перетворення маємо формулу периметру епіциклоїди:

$$L_E = \sqrt{\frac{1}{z_2^2}} \cdot \int_0^{2\pi \cdot z_2} \sqrt{R_{\text{щ}}^2 + (e \cdot z_2)^2 + 2 \cdot R_{\text{щ}} \cdot e \cdot z_2 \cdot \cos\left(\frac{\varphi \cdot z_1}{z_2}\right)} d\varphi. \quad (12)$$

Первісна від підінтегральної функції не виражається через елементарні функції, але довжина L_E рівна довжині дуги еліпса з піввісьями a і b :

$$a = R_{\text{щ}} - e \cdot z_2, \quad (13)$$

$$b = R_{\text{щ}} + e \cdot z_2. \quad (14)$$

Для обчислення периметру еліпса використаємо формулу Рамануджана (друга апроксимація):

$$L_E = \pi \cdot (a + b) \cdot \left[1 + \frac{c}{10 + \sqrt{4 - c}} \right], \quad c = 3 \cdot \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2}. \quad (15)$$

Підставляючи значення a і b у формулу (15), виконавши спрощення, матимемо формулу для наближеного обчислення периметру вкороченої епіциклоїди:

$$L_E = 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{щ}} \cdot \left[1 + \frac{3 \cdot (e \cdot z_2)^2}{R_{\text{щ}}^2 \cdot \left(10 + \sqrt{4 - (3 \cdot (e \cdot z_2)^2 / R_{\text{щ}}^2)} \right)} \right]. \quad (16)$$

А підставивши значення (16) у вираз (6), дістаємо остаточну формулу для визначення периметру еквідистанти епіциклоїди (профілю ротора):

$$P_p = 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{щ}} \cdot \left[1 + \frac{3 \cdot (e \cdot z_2)^2}{R_{\text{щ}}^2 \cdot \left(10 + \sqrt{4 - (3 \cdot (e \cdot z_2)^2 / R_{\text{щ}}^2)} \right)} \right] - 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{щ}}. \quad (17)$$

Цікаво відмітити, що незалежно від параметрів зачеплення, периметр профілю статора більший за периметр еквідистантного профілю ротора на величину $8e$, тобто:

$$P_c = P_p + 8e. \quad (18)$$

Далі, аналізуючи схему (рис. 2), можна обчислити і площу обмежену еквідистантою. Для цього прийемо раніше введене позначення $AB=dL_E$. Кут τ , утворений нормаллю та довільним постійним напрямком відліку позначимо $d\tau$. Площа, обмежена епіциклоїдою, її еквідистантою, та двома нормалями буде визначатись наступним чином:

$$S(ABB'A') = S(ABCA') - S(BB'C). \quad (19)$$

Поклавши $S(ABB'A') = dS'$ і представивши $S(BB'C)$ як площу сектора з кутом $d\tau$ кола, радіусом $R_{\text{щ}}$, а $S(ABCA')$ як прямокутник зі сторонами dL_E і $R_{\text{щ}}$, будемо мати:

$$dS' = R_{\text{щ}} \cdot dL_E - (R_{\text{щ}}^2 / 2) \cdot d\tau. \quad (20)$$

Звідки отримуємо інтеграл (а після інтегрування маємо формулу для площі, обмеженої епіциклоїдою та її еквідистантою):

$$S' = R_{\text{щ}} \cdot \int_0^{L_E} dL_E - (R_{\text{щ}}^2 / 2) \cdot \int_0^{2\pi} d\tau = R_{\text{щ}} \cdot L_E - \pi \cdot R_{\text{щ}}^2. \quad (21)$$

Площа кутового сектора обмеженого вкороченою епіциклоїдою може бути знайдена за формулою:

$$S_E = \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (x(\varphi) \cdot y'(\varphi) - x'(\varphi) \cdot y(\varphi)) d\varphi. \quad (22)$$

Підставивши значення $x(\varphi)$ і $y(\varphi)$ та їх похідні у формулу (22), виконавши перетворення, маємо вираз:

$$S_E = \frac{1}{2 \cdot z_2} \cdot \int_0^{2\pi \cdot z_2} \left(e^2 \cdot z_2 + R_{\text{щ}}^2 - e \cdot R_{\text{щ}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi \cdot z_1}{z_2}\right) - e \cdot z_2 \cdot R_{\text{щ}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi \cdot z_1}{z_2}\right) \right) d\varphi. \quad (23)$$

А після інтегрування:

$$S_E = \pi \cdot R_{\text{ци}}^2 + \pi \cdot e^2 \cdot z_2. \quad (24)$$

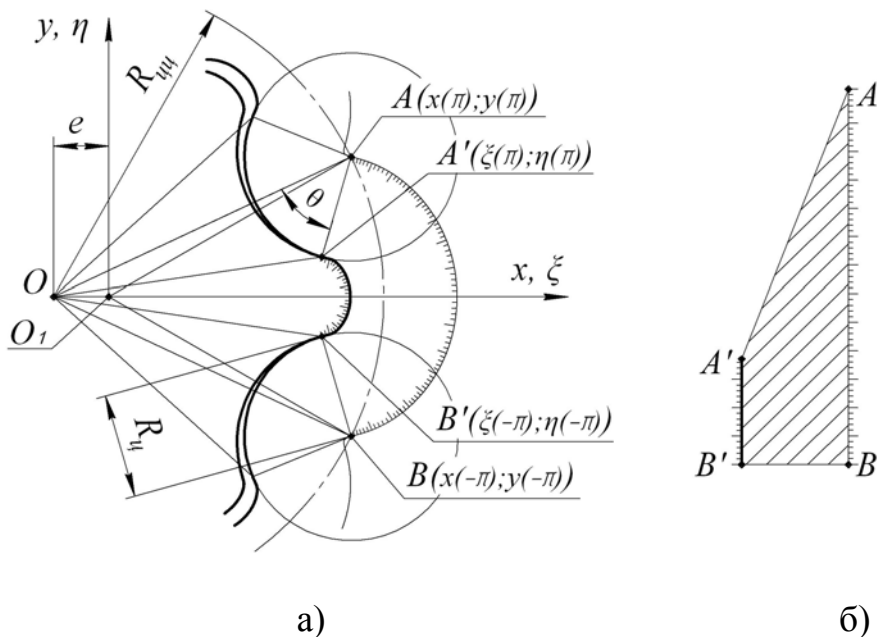
Різниця площ S_E і S' дає шукану площу, обмежену профілем ротора. Підставляючи всі знайдені компоненти у співвідношення (21), дістанемо остаточну формулу для визначення площі перерізу ротора:

$$S_p = \pi \cdot R_{\text{ци}}^2 + \pi \cdot e^2 \cdot z_2 - \pi \cdot R_{\text{ц}} \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot R_{\text{ци}} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot (e \cdot z_2)^2}{R_{\text{ци}}^2 \cdot (10 + \sqrt{4 - (3 \cdot (e \cdot z_2)^2 / R_{\text{ци}}^2)})} \right) - R_{\text{ц}} \right). \quad (25)$$

Формула (25) має похибку обчислень, пропорційну похибці формули Рамануджана (~0,02%).

Для обчислення площі перерізу статора, проаналізуємо схему (рис. 3, а). Огинаюча сімейства вкорочених епіциклоїд не є циклоїдальною кривою, і має ряд особливостей геометрії, які істотно відрізняються від епіциклоїди. Вона поєднує в собі ділянки вершини епіциклоїди на проміжку $(-\pi; \pi)$ і ділянки з постійною кривизною. Відповідно і еквідистанта до цієї кривої має вершину зубця аналогічну профілю ротора, а увігнута частина профілю є дуга з постійним радіусом кривизни, рівним $R_{\text{ц}}$.

Площа перерізу статора може бути обчислена чисельним інтегруванням або шляхом розбиття її на більш прості геометричні складові з послідовним підсумовуванням.



а) – розрахункова схема циклоїдальної передачі; б) – еквівалентна трапеція для визначення площі криволінійної ділянки

Рисунок 3 – Розрахункова схема для визначення площі перерізу статора

Зі схеми (рис. 3, а) площа перерізу статора визначатиметься за наступною формулою:

$$S_c = z_2 \cdot \left(\int_{0_1}^{\pi_2} (x(\varphi) \cdot y'(\varphi) - x'(\varphi) \cdot y(\varphi)) d\varphi \right) + 2S(\Delta OO_1A) - S(A'B'BA) - \theta \cdot R_{\text{ц}}^2. \quad (26)$$

Перша складова формули (26) – інтеграл, що виражає площу криволінійного сектору (O_1AB) епіциклоїди. Після інтегрування дістанемо:

$$\int_{0_1}^{\pi_2} (x(\varphi) \cdot y'(\varphi) - x'(\varphi) \cdot y(\varphi)) d\varphi = \frac{\pi}{z_2} \cdot (z_2 \cdot e + R_{\text{ци}}^2) + \frac{R_{\text{ци}}}{z_1} \cdot (e + e \cdot z_2) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z_1}{z_2}\right). \quad (27)$$

Подвійна площа трикутника OO_1A :

$$2S(\Delta OO_1A) = e \cdot R_{\text{ци}}^2 \cdot \sin(\pi/z_2). \quad (28)$$

Площа фігури $A'B'BA$, що обмежена ділянкою епіциклоїди, її еквідистантою та двома нормальми чисельно рівна площі трапеції (рис. 3, б). Так як $P_c = P_p + 8e$, довжини ділянок AB і $A'B'$ будуть дорівнювати:

$$l(AB) = \frac{L_E + 8 \cdot e}{z_2}; \quad l(A'B') = \frac{L_E - 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{ци}} + 8 \cdot e - 2 \cdot z_2 \cdot \theta \cdot R_{\text{ци}}}{z_2}. \quad (29)$$

де θ – кут між променем, що з'єднує центр статора і центр його зубця та нормаллю до епіциклоїди, на якій лежить даний центр (задається в радіанах). Площа трапеції $A'B'BA$ визначатиметься наступним чином:

$$S(A'B'BA) = \frac{R_{\text{ци}}}{z_2} (L_E + 8 \cdot e - \pi \cdot R_{\text{ци}} - R_{\text{ци}} \cdot z_2 \cdot \theta). \quad (30)$$

Підставляючи всі знайдені компоненти у формулу (26) і виконуючи спрощення маємо остаточну формулу для визначення площі перерізу статора:

$$S_C = \pi \cdot (z_2 \cdot e^2 + R_{\text{ци}}^2 + R_{\text{ци}}^2) - R_{\text{ци}} \cdot (L_E + 8 \cdot e) + z_2 \cdot e \cdot R_{\text{ци}} \cdot \left(\frac{z_2 + 1}{z_1} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot z_1}{z_2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{z_2}\right) \right). \quad (31)$$

В результаті проведених розрахунків, отримані формули, які дозволяють визначати площі і периметри робочих профілів деталей епіциклоїдальної передачі внутрішнього зачеплення. Формули не містять в своєму складі спеціальних функцій і еліптичних інтегралів, що прискорює та спрощує розрахунки. Користуючись ними, можливо досліджувати будь – які кількісні та якісні показники передачі – механічні, гідравлічні та інші, в залежності від області її використання.

Список літератури

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / Выгодский М.Я. – М.: Наука, 1975. - 872 с.
2. Савелов А.А. Плоские кривые / Савелов А.А. – М.: Физматгиз, 1960. - 293 с.
3. Гусман М. Т. Забойные винтовые двигатели / Гусман М. Т., Балденко Д. Ф. – М., ВНИИОЭНГ, 1972.– 89 с
4. Litvin F.L. Gear Geometry and Applied Theory, Prentice Hall/ Litvin F.L. - New Jersey, 1994. - 724p.

O. Skibinskiy, V. Gutsul, A. Gnatuk

Kirovograd National Technical University

Appoint of perimeters and areas of sections details of epicyclic transmission internal gear.

The aim of the article is a receipt of universal formulas for the calculation of perimeters and areas of section of details in epicyclic transmission internal gear.

In the article described method of analytical determination of perimeters and areas of sections details of epicyclic transmission internal gear, basic correlations of geometry of the crooked profiles and similarly got equalizations for a calculation of perimeters and areas of profiles is outlined equidistant curves of the shortened epicycloids and tangent curve to family of equidistant curves of the shortened epicycloids, described the practical value of the got dependences.

In got formulas is not had in the composition of the special functions and elliptic integrals, that accelerates and simplifies calculations. Using the got formulas, maybe to prospect any parameters of transmission : mechanical, hydraulic and much other.

perimeter of job profiles, area of section, equidistant curve of the epicycloid, tangent curve to family

Одержано 24.04.13