

УДК 681.513.5

О.П. Лобок, канд. фіз.-мат. наук, Б.М. Гончаренко, д-р техн. наук

Національний університет харчових технологій

Л.Г. Віхрова, канд. техн. наук

Кіровоградський національний технічний університет

Синтез оптимального мінімаксного керування лінійними багатовимірними об'єктами за умови неточного і неповного їх вимірювання

У роботі розглядається задача оптимального керування лінійними об'єктами, що функціонують в умовах невизначеності. Передбачається, що невизначеність пов'язана з неточністю знань про початковий стан об'єкта та з неконтрольованими зовнішніми збурюваннями, що діють на об'єкт. За умови неповних і неточних вимірів вектора стану об'єкта та у припущенні, що всі невизначені фактори належать деякій обмеженій області, знайдено мінімаксне управління у вигляді регулятора від оцінки стану, яка є виходом мінімаксного фільтра типу Калмана-Бьюсі.

мінімаксне оцінювання та управління, еліпсоїд допустимих збурень, квадратичний критерій оптимальності, матричне диференціювання, принцип максимуму, функція Гамільтона, матричне рівняння типу Ріккати

А.П. Лобок, Б.М. Гончаренко

Національний університет пищевих технологий

Л.Г. Вихрова

Кировоградский национальный технический университет

Синтез оптимального минимаксного управления линейными многомерными объектами в условиях неточного или неполного их измерения

В работе рассматривается задача оптимального управления линейными объектами, функционирующими в условиях неопределенности. Предполагается, что неопределенность связана с неточностью знаний о начальном состоянии объекта и с неконтролируемыми внешними возмущениями, действующими на объект. При условии неполных и неточных измерений вектора состояния объекта и в предположении, что все неопределенные факторы принадлежат некоторой ограниченной области, найдено минимаксное управление в виде регулятора от оценки состояния, которая является выходом минимаксного фильтра типа Калмана-Бьюси.

минимаксное оценивание и управление, эллипсоид допустимых возмущений, квадратичный критерий оптимальности, матричное дифференцирование, принцип максимума, функция Гамильтона, матричное уравнение типа Риккати

Вступ. Реальні об'єкти управління в більшості випадків функціонують в умовах певної невизначеності. При цьому часто відносно збурень, що діють на об'єкт, немає достовірної інформації щодо природи самих збурень (детерміновані, стохастичні, періодичні тощо). В цьому випадку доцільно віддати перевагу мінімаксному або гарантованому управлінню, яке забезпечує певну якість перехідних процесів за найгірших зовнішніх збурень.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [1-3] вперше розглядалися задачі мінімаксного управління та оцінювання за умови, що зовнішні збурення належать деякій обмеженій області у вигляді еліпсоїда в n -вимірному просторі.

Мета статті. В даній роботі дається подальший розвиток цих результатів на випадок неповних та неточних вимірів вектора стану об'єкта управління.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо об'єкт управління, який описується наступною лінеаризованою математичною моделлю виду

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + K(t)f_1(t), & t_0 < t \leq T, \\ x(t_0) = Lx^0, \end{cases} \quad (1)$$

де $x(t) \in R^n$ – n -вимірний вектор відхилень реальних значень фізико-технічних параметрів об'єкта від їх номінальних значень (вектор стану), $u(t) \in R^m$ – m -вимірний вектор-функція управління, $f_1(t) \in R^{m_1}$ – невідомий m_1 -вимірний вектор зовнішніх збурень, що діють на об'єкт, $x^0 \in R^{m_0}$ – також невідомий m_0 -вимірний вектор початкових умов; $A(t) \in R^{n \times n}$, $B(t) \in R^{n \times m}$, $K(t) \in R^{n \times m_1}$, $L \in R^{n \times m_0}$ – матриці відповідних розмірностей з відомими коефіцієнтами; R^n , $R^{n \times m}$ – евклідові простори відповідно n -вимірних векторів та матриць розмірності $n \times m$.

Нехай спостереження за станом об'єкта описується співвідношенням

$$y(t) = C(t)x(t) + f_2(t), \quad (2)$$

де $C(t) \in R^{m_2 \times n}$ – матриця, що визначає елементи вектора стану об'єкта $x(t)$, які вимірюються з похибками (неповно, неточно); $f_2(t) \in R^{m_2}$ – вектор похибок спостережень.

Відносно невідомих збурювальних чинників $f_1(t), f_2(t)$ і вектора початкових умов x^0 припустимо, що вони обмежені областю $S_{\lambda(t)}$ у вигляді гіпереліпсоїда виду

$$(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda(t)} = \left\{ (P_0 x^0, x^0) + \int_{t_0}^t (P_1(\tau) f_1(\tau), f_1(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t (P_2(\tau) f_2(\tau), f_2(\tau)) d\tau \leq \lambda^2(t) \right\}, \quad (3)$$

де $P_0 \in R^{m_0 \times m_0}$, $P_1(\tau) \in R^{m_1 \times m_1}$, $P_2(\tau) \in R^{m_2 \times m_2}$ – задані додатно-визначені симетричні вагові матриці; $\lambda(t)$ – відома скалярна функція, що визначає об'єм і динаміку зміни розміру еліпсоїда, (\cdot, \cdot) – скалярний евклідовий добуток векторів.

Введемо в розгляд наступний критерій якості функціонування об'єкта управління

$$J_c(u) = \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda(T)}} I_c(u), \quad (4)$$

де $I_c(u)$ – інтегрально-квадратичний функціонал виду

$$I_c(u) = \int_{t_0}^T [(H(t)x(t), x(t)) + (D(t)u(t), u(t))] dt + (Vx(T), x(T)), \quad (5)$$

в якому $H(t) \in R^{n \times n}$, $D(t) \in R^{m \times m}$, $V \in R^{n \times n}$ – відомі додатно-визначені симетричні вагові матриці.

Критерій (4) враховує найбільш несприятливі збурення, які можуть діяти на об'єкт управління.

Елементи вагових матриць $H(t)$, $D(t)$, V визначають “вагу” відповідної складової у критерії якості (5), причому ця “вага” пропорційна значенням відповідних складових цих матриць.

Оскільки вектор стану $x(t)$ є невідомим, а відомий тільки вектор спостережень $y(t)$, то управління $u(t)$ будемо шукати у вигляді

$$u(t) = R(t)\hat{x}(t), \quad (6)$$

де $R(t)$ – матриця зворотного зв'язку (матриця підсилення), $\hat{x}(t)$ – вектор оцінки координат стану об'єкта $x(t)$, який є виходом наступного фільтра

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = F(t)\hat{x}(t) + G(t)y(t), \\ \hat{x}(t_0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

В рівнянні (7) $F(t) \in R^{n \times n}$, $G(t) \in R^{n \times m_2}$ – невідомі шукані матриці, що визначають структуру фільтра, $y(t)$ – вектор спостережень (2).

Для врахування похибок оцінювання вектора стану об'єкта введемо в розгляд функціонал виду

$$J_e(\hat{x}) = \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda(T)}} I_e(\hat{x}), \quad (8)$$

де $I_e(\hat{x})$ – середньо-квадратична похибка, що визначається формулою

$$I_e(\hat{x}) = \int_{t_0}^T (W(t)(x(t) - \hat{x}(t)), x(t) - \hat{x}(t)) dt \quad (9)$$

з заданою додатно-визначеною симетричною ваговою матрицею $W(t) = W^T(t) > 0$.

Критерій (8) враховує найнесприятливіші збурення, які впливають на похибку оцінювання вектора стану $x(t)$.

На основі двох критеріїв (4) та (8) утворимо узагальнений критерій

$$J(u, \hat{x}) = J_c(u) + J_e(\hat{x}). \quad (10)$$

Тепер остаточно сформулюємо задачу. Необхідно знайти оптимальне управління $u(t)$ у вигляді (6), (7), яке мінімізує функціонал (10). Таке управління будемо називати мінімаксом, а сформульовану задачу коротко запишемо так

$$J(u, \hat{x}) \rightarrow \min_{u, \hat{x}}. \quad (11)$$

Зауважимо, що оскільки структура управління $u(t)$ задається співвідношеннями (6), (7), з невідомими шуканими матрицями $R(t)$, $F(t)$, $G(t)$, то оптимізаційна задача (11) еквівалентна задачі матричної оптимізації

$$Q(R, F, G) \rightarrow \min_{R, F, G}, \quad (12)$$

де введено позначення $Q(R, F, G) \equiv J(u, \hat{x})$.

Для розв'язання даної задачі перетворимо спочатку функціонал $Q(R, F, G)$. Для цього, враховуючи співвідношення (2), (6), рівняння (1) та (7) запишемо у вигляді блочної системи

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} = \bar{A}(t)z(t) + \bar{B}(t)f(t), \\ z(t_0) = \bar{L}x^0, \end{cases} \quad (13)$$

де введені наступні позначення

$$\bar{A}(t) = \left(\begin{array}{c|c} A(t) & B(t)R(t) \\ \hline G(t)C(t) & F(t) \end{array} \right), \quad \bar{B}(t) = \left(\begin{array}{c|c} K(t) & 0 \\ \hline 0 & G(t) \end{array} \right),$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Перетворимо також область $S_{\lambda(t)}$, якій належить вектор зовнішніх збурень $f(t)$ і вектор початкових умов x^0

$$(x^0, f) \in S_{\lambda(t)} = \left\{ (x^0, f) : (P_0 x^0, x^0) + \int_{t_0}^t (P(\tau) f(\tau), f(\tau)) d\tau \leq \lambda^2(t) \right\}, \quad (14)$$

де $P(t) = \text{diag}(P_1(t), P_2(t))$.

Розглянемо матрицю $T = \begin{pmatrix} E & | & 0 \\ \hline - & | & - \\ E & | & -E \end{pmatrix}$, де E – одинична матриця, і виконаємо

заміну змінних

$$r(t) = T \cdot z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тут $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ – похибка оцінювання.

Якщо застосувати матричне перетворення (15) до системи (13), то одержимо

$$\begin{cases} \frac{dr(t)}{dt} = A_c(t)r(t) + B_c(t)f(t), \\ r(t_0) = L_c x^0, \end{cases} \quad (16)$$

де

$$A_c(t) = T\bar{A}(t)T^{-1} = \begin{pmatrix} A(t) + B(t)R(t) & | & -B(t)R(t) \\ \hline A(t) - G(t)C(t) + B(t)R(t) - F(t) & | & -B(t)R(t) + F(t) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$B_c(t) = T\bar{B}(t) = \begin{pmatrix} K(t) & | & 0 \\ \hline - & | & - \\ K(t) & | & -G(t) \end{pmatrix}, L_c = T\bar{L} = \begin{pmatrix} L \\ - \\ L \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Друге рівняння системи (16) описує динаміку похибки оцінювання стану системи. Похибка оцінювання $e(t)$ не повинна залежати від стану системи $x(t)$, а лише від завад $f_1(t)$ і $f_2(t)$. Якщо завади відсутні, тобто, $x^0 = 0, f_1(t) = 0, f_2(t) = 0$, то похибка оцінювання $e(t)$ повинна дорівнювати нулю. Аналіз системи (16) показує, що це можливо лише за умови

$$F(t) = A(t) - G(t)C(t) + B(t)R(t). \quad (19)$$

Отже, невідомими залишились матриці $R(t)$ і $G(t)$.

Продовжимо перетворення. Враховуючи співвідношення (6),(15), критерій $I_c(u)$ можна записати у вигляді

$$I_c(u) = \int_{t_0}^T (H_c(t)r(t), r(t)) dt + (V_c r(T), r(T)), \quad (20)$$

де $H_c(t) = T^T \bar{H}(t) T, V_c = T^T \bar{V} T, \bar{H}(t) = \text{diag}(H(t), R^T(t)D(t)R(t)), \bar{V} = \text{diag}(V, 0)$.

Аналогічно, функціонал $I_e(\hat{x})$ можна перетворити до наступного

$$I_e(\hat{x}) = \int_{t_0}^T (W_e(t)r(t), r(t)) dt, \quad (21)$$

де $W_e(t) = T^T \bar{W}(t) T, \bar{W}(t) = \begin{pmatrix} W(t) & | & -W(t) \\ \hline - & | & - \\ -W(t) & | & W(t) \end{pmatrix}$.

Для розкриття операції $\text{supremum}(\text{sup})$ в критеріях (4) та (8) використаємо нерівність Коші-Шварца [2,3], за допомогою якої можна отримати наступну формулу

$$\sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(t)}} (a(t), r(t))^2 = \sup_{(x^0, f) \in S_{\lambda(t)}} (a^T(t)r(t))^2 = \lambda^2(t)(S(t)a(t), a(t)), \quad (22)$$

де $a(t) \in R^{2n}$ – довільний заданий вектор, $S(t)$ – симетрична додатно-визначена матриця, яка є розв'язком матричного рівняння

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A_c(t)S(t) + S(t)A_c^T(t) + B_c(t)P^{-1}(t)B_c^T(t), \\ S(t_0) = L_c P_0^{-1} L_c^T. \end{cases} \quad (23)$$

Використовуючи спектральний розклад матриць, основні властивості операції supremum та формулу (22), одержимо оцінку зверху функціонала якості $J_c(u)$

$$\begin{aligned} J_c(u) &= \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda}} I_c(u) \leq \int_{t_0}^T \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda(t)}} (H_c(t)r(t), r(t)) dt + \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda(T)}} (V_c r(T), r(T)) \leq \\ &\leq \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \text{tr}[S(t)H_c(t)] dt + \lambda^2(T) \text{tr}[S(T)V_c], \end{aligned}$$

де $\text{tr}[\cdot]$ – операція слід матриці, тобто сума її діагональних елементів.

Позначимо через $L_c(R, G)$ праву частину останньої нерівності

$$L_c(R, G) = \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \text{tr}[S(t)H_c(t)] dt + \lambda^2(T) \text{tr}[S(T)V_c].$$

Тоді оцінка функціоналу $J_c(u)$ може бути записана так $J_c(u) \leq L_c(R(t), G(t))$.

Функціонал похибки оцінювання стану об'єкта $J_e(\hat{x})$ оцінимо зверху таким чином

$$J_e(\hat{x}) = \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda}} I_e(\hat{x}) \leq \int_{t_0}^T \sup_{(x^0, f_1, f_2) \in S_{\lambda(t)}} (W_e(t)r(t), r(t)) dt \leq \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \text{tr}[S(t)W_e(t)] dt.$$

Якщо ввести позначення

$$L_e(R, G) = \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \text{tr}[S(t)W_e(t)] dt,$$

то остання нерівність запишеться так $J_e(\hat{x}) \leq L_e(R, G)$.

З останніх співвідношень випливає, що узагальнений функціонал $Q(R, F, G)$ задовольняє нерівності $Q(R, F, G) \leq L(R, G)$, де

$$L(R, G) = L_c(R, G) + L_e(R, G) = \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \text{tr}[S(t)(H_c(t) + W_e(t))] dt + \lambda^2(T) \text{tr}[S(T)V_c]. \quad (24)$$

Таким чином, приходимо до оптимізаційної задачі

$$L(R, G) \rightarrow \min_{R, G} \quad (25)$$

при обмеженнях у вигляді матричного диференціального рівняння (23).

Для розв'язання цієї задачі застосуємо матричний принцип максимуму Понтрягіна, відповідно до якого сформуємо функцію Гамільтона виду

$$\begin{aligned} H(R(t), G(t), S(t), \Psi(t)) &= -\lambda^2(t) \text{tr}[S(t)(H_c(t) + W_e(t))] + \\ &+ \text{tr}[\Psi(t)(A_c(t)S(t) + S(t)A_c^T(t) + B_c(t)P^{-1}(t)B_c^T(t))], \end{aligned} \quad (26)$$

де $\Psi(t) = \Psi^T(t)$ – спряжена від'ємно-визначена матриця, яка задовольняє матричне рівняння

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial S(t)} H(R(t), G(t), S(t), \Psi(t)), \\ \Psi(T) = -\frac{\partial}{\partial S(T)} \{ \lambda^2(T) \text{tr}[S(T)V_c] \}. \end{cases} \quad (27)$$

Матриці $R(t), G(t)$ знаходяться з умови максимізації функції Гамільтона (26)

$$R(t), G(t): H(R(t), G(t), S(t), \Psi(t)) \rightarrow \max_{R(t), G(t)} \quad (28)$$

Використовуючи формули матричного диференціювання, систему (27) можна перетворити до наступної

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = -A_c^T(t)\Psi(t) - \Psi(t)A_c(t) + \lambda^2(t)(H_c(t) + W_e(t)), \\ \Psi(T) = -\lambda^2(T)V_c. \end{cases} \quad (29)$$

Для розв'язання оптимізаційної задачі (28) відносно шуканих матриць $R(t)$ та $G(t)$ використаємо необхідну умову екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial R(t)} \{ H(R(t), G(t), S(t), \Psi(t)) \} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial G(t)} \{ H(R(t), G(t), S(t), \Psi(t)) \} = 0. \end{cases}$$

Після знаходження матричних похідних, з останньої системи можна визначити шукані матриці

$$R(t) = -\lambda^{-2}(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t), \quad G(t) = S(t)C^T(t)P_2(t), \quad (30)$$

де $S(t)$ – симетрична додатно-визначена матриця, яка задовольняє наступне матричне диференціальне рівняння типу Ріккати

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A(t)S(t) + S(t)A^T(t) - S(t)C^T(t)P_2(t)C(t)S(t) + K(t)P_1^{-1}(t)K^T(t), \\ S(t_0) = LP_0^{-1}L^T, \end{cases} \quad (31)$$

а $\Psi(t)$ – спряжена матриця, яка є розв'язком наступного матричного диференціального рівняння, що інтегрується в зворотньому часовому напрямку

$$\begin{cases} \frac{d\Psi(t)}{dt} = -A^T(t)\Psi(t) - \Psi(t)A(t) + \lambda^{-2}(t)\Psi(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t) - \lambda^2(t)H(t), \\ \Psi(T) = \lambda^2(T)V. \end{cases} \quad (32)$$

Зауважимо, що рівняння (31) та (32) визначаються з системи (23), (29) після виконання ряду матричних перетворень, враховуючи їх блочну структуру.

Підставляючи матриці $R(t)$ та $G(t)$, що визначаються за формулами (30), в співвідношення (19), одержимо останню шукану матрицю $F(t)$, яка визначає структуру фільтра (7)

$$F(t) = A(t) - S(t)C^T(t)P_2(t)C(t) - \lambda^{-2}(t)B(t)D^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t). \quad (33)$$

При цьому мінімальне значення функціоналу $L_c(R, G)$, що обмежує критерій якості функціонування об'єкта, визначається формулою

$$L_c^{\min}(R, G) = \lambda^2(T) \text{tr}[S(T)V] + \int_{t_0}^T \{ \lambda^2(t) \text{tr}[S(t)H(t)] + \text{tr}[S(t)\Psi(t)S(t)C^T(t)P_2(t)C(t)] \} dt$$

Оскільки регулятор (6) побудовано у вигляді зворотного зв'язку від оцінки стану, то певний інтерес становить похибка оцінювання мінімаксного фільтра (7), (30),

(33). Використовуючи співвідношення (30), можна показати, що мінімальне значення верхньої межі функціоналу похибки оцінювання вектора стану об'єкта визначається за наступною формулою

$$L_e^{\min}(R, G) = \int_{t_0}^T \lambda^2(t) \operatorname{tr}[S(t)W(t)] dt,$$

де $S(t)$ – розв'язок матричного рівняння (31).

Висновки. В роботі одержано конструктивний розв'язок задачі синтезу оптимального мінімаксного управління лінійними об'єктами, що функціонують в умовах зовнішніх збурень, які належать заданій обмеженій області у вигляді еліпсоїда в n – вимірному просторі. Управління знайдено у вигляді зворотного зв'язку від оцінки вектора стану, який є розв'язком мінімаксного фільтра, подібного до фільтра Калмана-Бьюсі. Структура одержаного мінімаксного управління виявилась подібною до структури оптимального управління лінійними стохастичними об'єктами, але одержана за інших припущень щодо збурюючих чинників.

Список літератури

1. Кириченко М.Ф. Аналітичне конструювання мінімаксних регуляторів у лінійних системах / М.Ф. Кириченко//ДАН УРСР, С.А.– 1978.– №1, С. 45-48.
2. Кириченко Н.Ф. Минимаксный подход к рекуррентному оцениванию состояний линейных динамических систем/Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечный//Кибернетика.-1977.– №4, –С. 52-55.
3. Кириченко М.Ф. Про мінімаксні оцінки станів лінійних динамічних систем/Н.Ф. Кириченко, А.Г. Наконечний//ДАН УРСР, С.А. – 1977.–№7, С. 23-26.
4. Слезенко А.М. Дослідження оптимального мінімаксного управління лінійними динамічними системами, що функціонують в умовах невизначеності / А.М. Слезенко, О.П. Лобок // Програма і матеріали 78 міжнародної наукової конференції молодих вчених, аспірантів і студентів "Наукові здобутки молоді – вирішенню проблем харчування людства у XXI столітті", 2-3 квітня 2012р.– К.:НУХТ,2012.– ч. 2.–316-317с.

O. Lobok, B. Goncharenko

National University of Food Technologies

L. Vihrova

Kirovograd National Technical University

Synthesis of optimal minimax control linear multidimensional objects in the conditions of their inexact and incomplete measuring

Real control objects in most cases operating under some uncertainty. It is often relatively perturbations acting on the object, there is no reliable information on the nature of most perturbations (deterministic, stochastic, periodic, etc.). In this case it is advisable to prefer minimax or guaranteed by the management, which provides a quality of transients in the worst external disturbances.

In the given work provides further development of these results to the case of incomplete and inaccurate measurements of the state vector control object.

The problem of optimal control is in-process examined by linear objects functioning in the conditions of vagueness. It is assumed that a vagueness is related to inaccuracy of knowledge about the initial state of object and with out-of-control external indignations operating on an object. On condition of the incomplete and inexact measuring of vector of the state of object and in supposition, that all indefinite factors belong to some limited area, a minimax control is found as a regulator from the estimation of the state, that is the exit of minimax filter of type of Kalman-Bucy.

The paper obtained a constructive solution to the problem of synthesis of optimal minimax control of linear objects, operating under external perturbations which are given limited area in the form of an ellipsoid in n -dimensional space. Management found in the form of feedback from the evaluation of the state vector, which is the solution of minimax filter, similar to the filter Kalman-Byusi. The structure of the resulting minimax control appeared similar to the structure of the optimal control of linear stochastic objects, but derived from other assumptions about the disturbing factors.

minimax estimation and control, ellipsoid of possible perturbations, quadratic criterion of optimality, matrix differentiation, principle of maximum, Hamiltonian, matrix equalization of type of Riccati