УДК 621-50

А.А. Стенин, проф., д-р техн. наук, Е.Ю. Мелкумян, канд. техн. наук
Национальный технический университет Украины «КПИ»

Приближение переменных динамических объектов управления на основе полиномиальных сплайн-функций

В данной статье предлагается методика получения аналитического выражения вектора состояния и его первой производной при дискретном измерении входных и выходных переменных. Суть предлагаемого подхода заключается в том, что система дифференциальных уравнений в форме Коши заменяется алгебраической системой относительно аргумента времени, что упрощает решение задач идентификации и управления динамическими объектами.
полиномиальные сплайн-функции, динамические объекты управления, вектор состояния, задача идентификации и управления

А.А. Стенін, проф., д-р техн. наук, Е.Ю. Мелкумян, канд. техн. наук
Національний технічний університет України «КПІ»
Наближення змінних динамічних об’єктів управління на основі поліноміальних сплайн-функцій

В даній статті пропонується методика отримання аналітичного виразу вектора стану та його першої похідної у разі дискретного вимірювання вхідних та вихідних змінних. Зміст пропонованого підходу полягає в тому, що система диференційних рівнянь у формі Коші замінюється алгебраїчною системою відносно аргументу часу, що спрощує рішення задач ідентифікації та керування динамічними об’єктами.
поліноміальні сплайн-функції, динамічні об’єкти керування, вектор стану, задача ідентифікації та керування

Анализ проблемы. Получение информации об управляемом процессе осуществляется на основе измерений входных и выходных переменных в дискретные моменты времени. Проблема аппроксимации дискретных данных возникает, если поставленная задача и методы ее решения предполагают наличие непрерывного функционального представления [1].

При решении задач приближенного представления функций используются самые разнообразные аппроксиманты, начиная с обыкновенных полиномов и кончая сложными функциональными зависимостями с нелинейно входящими параметрами [2].

Для повышения точности приближения часто применяется кусочная аппроксимация функции $f(t), t \in D$, которая заключается в разбиении множества D на непересекающиеся подмножества D_j. $d = \bigcap_j D_j$, в каждом из которых осуществляется независимая аппроксимация с помощью соответствующей функции $p_j(t, a_j)$. Такой путь дает неэкономичное по числу параметров приближение. Более экономичные приближения возникают, если на каждую часть $p_j(t, a_j)$ аппроксимирующей функции наложить некоторые условия "сшивки" с соседними частями. Если в качестве выбраны полиномы, то такие конструкции называют полиномиальными сплайн-функциями или сплайнами [3,4].

На отрезке $[a, b]$ зададим сетку

$$\Delta_N : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b. \quad (1)$$

Функцию $S_m(t) = S_{m,k}(t, \Delta_N)$ называют полиномиальным сплайном степени m дефекта k на сетке Δ_N, если: $S_m(t) \in P_m$ на $[t_{i-1}, t_i] (i = \overline{1, N})$, где P_m - множество многочленов степени не выше m, $m \geq 0$: $S_m(t) \in C^{m-k}_{[a,b]}$, где $C^{p}_{[a,b]}$ - множество вещественных функций на отрезке $[a, b]$, имеющих непрерывные производные до порядка p включительно. Точки $\{t_i\}$ называют узлами сплайна. В задачах интерполяции сплайн $S_m(t)$ должен удовлетворять условиям

$$S_m(t_i) = f(t_i), i = \overline{0, N}.$$

В этом случае сплайн называют интерполяционным.

Обычно рассматривают сплайны нечетной степени $(m = 2n - 1)$ и предполагают, что $0 \leq k \leq n$. При $k = 0$ сплайн совпадает с полиномом степени т. Другие важные случаи получаем при $k = 1$ и $k = n$. В первом случае говорят о сплайнах дефекта I, во втором - о сплайнах Эрмита. Одним из преимуществ эрмитовых сплайнов перед сплайнами дефекта I является свойство локальности, заключающееся в том, что их поведение и построение на $[t_{i-1}, t_i]$ не зависит от их поведения и построения на других интервалах. Однако для построения эрмитовых сплайнов требуется большой объем априорной информации - знание значений производных интерполируемой функции в узлах либо возможность их приближенного вычисления. Поэтому на практике получили наибольшее распространение сплайны дефекта I. В дальнейшем слова “дефекта I” будем опускать.

Опыт применения сплайнов по сравнению с другими математическими конструкциями и, в первую очередь многочленами, показал, что они обладают следующими важными преимуществами: лучшими апроксимативными свойствами; простотой реализации полученных алгоритмов их построения на ЭВМ; универсальностью, позволяющей использовать одни и те же аппроксимирующие конструкции для различных объектов. К недостаткам относят необходимость задания краевых условий, а также иногда неустойчивое вычисление параметров сплайна и появление осциляций построенного сплайна при интерполяции функций с особенностями. Однако при решении практических задач исследователь располагает некоторыми данными об интерполируемой функции, что позволяет осуществить выбор краевых условий. Устранение другого недостатка осуществляется специальным выбором узлов сплайна отличным от узлов интерполяции.

Интерполяционные сплайны применяют при численном дифференцировании и интегрировании. Приближенное вычисление производных и интегралов функции $f(t)$ состоит в замене их производными и интегралами интерполяционного сплайна, построенного по значениям $f_i = f(t_i) (i = \overline{0, N})$ на сетке (1). Если сплайн используется для вычисления производных, то заданная погрешность аппроксимации производной обеспечивается выбором шага сетки (1).

Постановка задачи .Необходимо найти аналитические выражения переменных состояния динамических объектов управления, заданных в дискретные моменты времени, а также их производных при условии, что вектор состояния является полностью измеряемым.

Решение задачи. Из определения интерполяционного сплайна степени m, приведенного выше, следует, что кубический сплайн $S(t)$ представляет собой кусочно интерполирующую функцию, которая определена на сетке (1) и удовлетворяет следующим требованиям:

$S(t)$ - непрерывна вместе с первой и второй производной для всех $t \in [a,b]$;

$S_{\Delta_i}(t)$ - кубическая функция внутри подинтервала $[t_{i-1}, t_i] \left(i = \overline{1,N}\right)$ (2)

$$S(t_i) = f_i (i = \overline{0,N}),$$

где $\{f_i\}$ - последовательность реализаций интерполируемой функции $f(t)$, соответствующая последовательности $\{t_i\}$.

На отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ сплайн определяется четырьма коэффициентами, на всем промежутке $[a,b]$ - $4N$. Требование непрерывности сплайна и его производных $S^{(r)}(t)(r = 0,1,2)$ в узлах $\{t_i\}(i = \overline{1,N-1})$ позволяет получить $3N-1$ равенств. Вместе с равенствами (2) имеем $4N-2$ соотношений. Для определения двух свободных параметров на интерполяционный сплайн налагают дополнительные краевые условия. В большинстве задач идентификации заданы только узловые значения f_i, вследствие этого выбор краевых условий затруднителен. В этом случае рекомендуется потребовать, чтобы в точках t_1 и t_{N-1} сплайн $S(t)$ имел непрерывную третью производную, что эквивалентно условиям

$$\dddot{S}(t_i - 0) = \dddot{S}(t_i + 0)(i = \overline{1,N-1}). \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\dot{S}(t_i) = m_i \quad (i = \overline{0,N}), h_i = t_i - t_{i-1}, H = \max_i h_i .$$

Тогда сплайн на отрезке $t \in [t_{i-1}, t_i](i = \overline{1,N})$ представляется формулой

$$S(t) = m_{i-1}(t_i - t)^2 (t - t_{i-1}) / h_i^2 - m_i (t - t_{i-1})^2 (t_i - t) / h_i^2 +$$
$$+ f_{i-1}(t_i - t)^2 [2(t - t_{i-1}) + h_i] / h_i^3 + f_i (t - t_{i-1})^2 [2(t_i - t) + h_i] / h_i^3 . \tag{4}$$

Учитывая условия интерполяции (2), гладкости и краевые условия (3) параметры $m_i (i = \overline{1,N-1})$ определяют из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&(1+\gamma_0)m_1 + \gamma_0 m_2 = c_1^1,\\
&\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \beta_i m_{i+1} = c_i \; (i = \overline{2,N-2}),\\
&\gamma_N m_{N-2} + (1+\gamma_N) m_{N-1} = c_{N-1}^1,
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$\gamma_0 = h_0 / h_1; \gamma_N = h_{N-1} / h_{N-2};$

$\beta_i = h_{i-1} / (h_{i-1} + h_i); \lambda_i = 1 - \beta_i;$

$c_i = 3[\lambda_i (f_i - f_{i-1}) / h_{i-1} + \beta_i (f_{i+1} - f_i) / h_i];$

$c_1^1 = 1/3c_1 + 2\gamma_0 (f_2 - f_1) / h_1; c_{N-1}^1 = 1/3c_{N-1} + 2\gamma_N (f_{N-1} - f_{N-2}) / h_{N-2},$

а m_0 и m_N из уравнений

$$m_0 = \gamma_0^2 m_2 + (\gamma_0^2 - 1)m_1 + 2[(f_1 - f_0)/h_0 - \gamma_0^2 (f_2 - f_1)/h_1];$$
$$m_N = \gamma_N^2 m_{N-2} + (\gamma_N^2 - 1)m_{N-1} + 2[(f_N - f_{N-1})/h_{N-1} - \gamma_N^2 (f_{N-1} - f_{N-2})/h_N]. \quad (6)$$

Таким образом, построение интерполяционного кубического сплайна по формуле (4) сводится к отысканию значений m_i, которые для краевых условий (3) находятся из уравнений (5), (6). Отметим, что правая часть каждого из равенств в системе (6) равна наклону в точке t_i параболы, проходящей через точки (t_{i-1}, f_{i-1}), (t_i, f_i), (t_{i+1}, f_{i+1}). Эти наклоны представляют сглаживание величинm_i. Матрица системы уравнений (6) является ленточной с диагональным преобладанием, т.е. если a_{ij} - элемент i- й строки и j- го столбца, то $r_i = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| > 0$ для всех i. Определители таких матриц отличны от нуля, и системы имеют решения, притом единственные. Для решения системы (5) обычно используют метод прогонки. Далее из (6) однозначно определяем m_0, m_N. Отсюда следует существование и единственность интерполяционного сплайна $S(t)$, удовлетворяющего условиям (3).

В данной работе предполагается использовать сплайн-функции для получения аналитических выражений переменных состояний, измеренных в дискретные моменты времени, и их производных. Переменные состояния $\bar{x}(t)$ являются решениями систем дифференциальных уравнений в форме Коши [5], описывающих динамику объектов управления. Поэтому для получения оценок погрешности интерполяции достаточно предположить, что интерполируемая функция принадлежит классу непрерывно дифференцируемых функций $C^1_{[a,b]}$. Для краевых условий (3), кубического сплайна и пространства $C^1_{[a,b]}$ интерполируемых функций, дается следующая оценка погрешности приближения [4]:

$$|S^{(r)}(t) - f^{(r)}(t)| \le R_r = K_r H^{R-r} \alpha_N \; (r = 0,1), t \in [a,b], \quad (7)$$

где $K_0 = 13/48$, $K_1 = 0{,}8623$;

$$\alpha_N = \begin{cases} \max[1, 3/2 + 2/5 \max(\gamma_0, \gamma_N)]\omega(\dot{f}, H), t_1 \le t \le t_{N-1}, \\ \max[1, 7/5 + 2\max(\gamma_0^2, \gamma_N^2)]\omega(\dot{f}, H), a \le t \le t_1, t_{N-1} < t \le b, \end{cases}$$

здесь $\omega(\dot{f}, H)$ - модуль непрерывности функции $f(t) \in C^1_{[a,b]}$, определяемый величиной

$$\omega(\dot{f}, H) = \max |\dot{f}(t') - \dot{f}(t'')|,$$
$$t', t'' \in h_i \;\; (i = \overline{1, N}).$$

Анализ соотношения (7) показывает, что модуль непрерывности $\omega(\dot{f}, H) \to 0$ при $H \to 0$, тем самым обеспечивается сходимость последовательности интерполяционных сплайнов к интерполируемой функции.

Оценка (7) дает возможность определить величину максимального шага сетки (1) для обеспечения заданной погрешности вычисления производной функции $f(t)$ с применением сплайна, т.е. выполнения неравенства

$$|R_1(t)| = |\dot{S}(t) - \dot{f}(t)| \le \varepsilon \, .$$

Согласно (7) имеем

$$|R_1(t)| \le K_1 H \alpha_N \, .$$

Тогда, если H выбрать таким, чтобы

$$H \le h^* = \varepsilon / K_1 \alpha_N \, ,$$

то требуемая точность достигается, например, на равномерной сетке с шагом h^*.

Интерполяционные сплайны успешно применяют при численном дифференцировании и интегрировании функций. Приближенное вычисление производных и интегралов функции $f(t)$ состоит в замене их производными и интегралами интерполяционного сплайна, построенного по значениям $f_i = f(t_i)(i = \overline{0, N})$ на сетке (1).

Из выражения (4) для кубического сплайна $S(t)$ вытекает следующая формула численного дифференцирования:

$$\begin{aligned}\dot{S}(t) &= m_{i-1}(t_i - t)(2t_{i-1} + t_i - 3t) / h_i^2 - \\ &- m_i(t - t_{i-1})(2t_i + t_{i-1} - 3t) / h_i^2 + 6(f_i - f_{i-1})(t_i - t)(t - t_{i-1}) / h_i^3 . \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь величины m_i вычисляются по приведенным соотношениям (5), (6), а погрешность приближения производной функции $f(t)$ производной сплайна $S(t)$ оценивается на основании соотношения (7) при $r = 1$.

Соответственно формула численного интегрирования для кубического сплайна при использовании представления (4) записывается в виде

$$\int_a^b S(t)dt \approx 1/2 \sum_{i=1}^{N-1} h_i (f_i + f_{i-1}) + 1/12 \sum_{i=1}^{N} (m_{i-1} - m_i) h_i^2 \, . \quad (9)$$

Очевидно, что погрешность вычисления интеграла (9), учитывая неравенство (7) можно оценить следующим образом:

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b S(t)dt \right| \le \int_a^b |S(t) - f(t)| \, dt \le \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |S(t) - f(t)| \, dt \le (b-a) R_0$$

На основании данного материала авторами в статье [6] предложен обобщенный алгоритм параметрической идентификации линейных динамических систем с постоянными, переменными и распределенными параметрами.

Выводы. Предложенная в работе методика получения аналитического выражения вектора состояния и его первой производной при дискретном измерении входных и выходных переменных позволяет заменить систему дифференциальных уравнений в форме Коши тождественной ей алгебраической системой относительно аргумента времени, что существенно упрощает решение задач идентификации и управления динамическими объектами.

Список литературы

1. Красовский А.А. Справочник по теории автоматического управления. М. Наука, 1997. — 712 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. – 454 с.
3. Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. — М.: Мир, 1972. – 316 с.
4. Shin D.H., Chukung F. Analysis and parameter estimation of a Scaled system via shifted hegendre polynomials // Int. g. Syst. Sci. – 1986. – v.17.- № 3. – P.400-408.
5. Чаки Ф. Современная теория управления. Нелинейные оптимальные и адаптивные системы. - М.: Мир, 1975, — С. 424.
6. Обобщенный алгоритм идентификации линейных динамических систем на базе сплайн-функций и функций Уолша / А.А. Стенин, М.М. Ткач, Е.Ю. Мелкумян // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», - 2012. - Вип. 20(40). - С.131-136.

Aleksandr Stenin, Ekaterina Melkumyan
National Technical University of Ukraine "KPI"

Approximation variables dynamic management objects based on polynomial spline functions

In this article it is propose the methodic to make analytic expression of state vector and its first derivative on condition it was sampled input and output variables.

This article proposes a method of obtaining an analytic expression for the state vector and its first derivative when input and output variables are discretely measured. The essence of the proposed approach is that the system of differential equations in the Cauchy form is replaced with an algebraic system relative to the time argument, in the basis of which there is an interpolating cubic spline. The application of splines for the problems of numeric differentiation and integration is conditioned on the researcher having some data about the interpolated function when solving practical problems, which allows choosing boundary conditions. Elimination of the shortcoming of having to specify boundary conditions, as well as a method of performing the unstable calculation of the spline parameters is achieved with a special choice of the spline nodes that are different from the interpolation nodes.

It's worth pointing out that the use of spline funcations for obtaining analytical expressions for the state variables, measured at discrete time points, and for their derivatives, simplifies solving the problems of identification and control of dynamic objects.

polynomial spline functions, dynamic management objects, the state vector, the problem of identification and control

Одержано 07.04.14