

УДК 621.316.1

І.В. Савеленко, асист.

*Кіровоградський національний технічний університет, kaf.etsem@gmail.com*

## Синтез системи автоматичного керування електроприводом на базі синхронного двигуна з постійними магнітами

Проведено аналіз математичних моделей електроприводів с синхронними двигунами на постійних магнітах для синтезу системи автоматичного керування. Виконано порівняння способів формалізації вимог при протіканні перехідних процесів в системах автоматичного керування. Сформульована задача аналітичного конструювання оптимального регулятора для системи автоматичного керування. Розглянуто математичні моделі динаміки руху синхронного двигуна на постійних магнітах в просторових координатах  $d-q$ .

**системи автоматичного керування, електропривод, синхронний двигун на постійних магнітах**

І.В. Савеленко, асист.

*Кіровоградский национальный технический университет*

**Синтез системы автоматического управления электроприводом на базе синхронного двигателя с постоянными магнитами**

Проведен анализ математических моделей электроприводов с синхронными двигателями на постоянных магнитах для синтеза системы автоматического управления. Выполнено сравнение способов формализации требований при протекании переходных процессов в системах автоматического управления. Сформулирована задача аналитического конструирования оптимального регулятора для системы автоматического управления. Рассмотрены математические модели динамики движения синхронного двигателя на постоянных магнитах в пространственных координатах  $d-q$ .

**системы автоматического управления, электропривод, синхронный двигатель на постоянных магнитах**

**Постановка проблеми.** В основі синтезу САК лежить поняття про математичну модель керованого процесу, або об'єкту керування. Така модель повинна відобразити властивості реального об'єкту в межах точності, необхідної для здійснення процесу керування. Згідно [1] об'єктом керування є виділена в реальному виробничому процесі, що функціонує з певною метою в умовах дії збурень, математичну модель каналу керування з  $n$  вхідними та  $m$  вихідними змінними.

Аналіз математичних моделей електроприводів дає змогу стверджувати, що з достатньою точністю їх можна записати у вигляді лінійного диференційного рівняння [1], позначимо:  $\mathbf{X}$  – матриця вхідних сигналів,  $\mathbf{U}$  – матриця сигналів керування, – основна матриця,  $\mathbf{B}$  – матриця керування:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (1)$$

Вектор керування в загальному випадку належить замкнутій множині:

$$\mathbf{U}^m = \left\{ u_p : u_p(t) \in \left[ -U_{p \max}, U_{p \max} \right], p = 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (2)$$

Будемо вважати, що керуючий вплив пронормований, і тому  $U_{pmax} = 1$ . Область допустимих керувань  $U \in \mathfrak{R}^m$  визначається двома умовами: класом допустимих функцій і додатковими обмеженнями експлуатаційного або конструктивного характеру, що накладаються на  $U(t)$  всередині даного класу.

Передбачається, що багатомірні стаціонарні об'єкти, що описуються рівнянням (1), є керовані. Як відомо, для керованості об'єкту (1) в деякій обмеженій області фазового простору, що містить точку  $X = 0$ , необхідно і достатньо виконання умови:

$$\text{rank}[B, BA, \dots, BA^{n-1}] = n. \quad (3)$$

Вимоги до бажаного руху об'єкту (1) обумовлюються загальними технологічними і економічними критеріями функціонування реального об'єкту. В кожному конкретному випадку вони задаються відповідними показниками якості роботи САК.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В теорії автоматичного керування використовуються декілька способів формалізації вимог до якості перехідних процесів САК.

Найбільш досконалим з них, є спосіб формалізації, заснований на введенні оптимізаційного функціоналу, або критерію якості інтегрального типу. Застосування таких інтегральних критеріїв, а саме квадратичних функціоналів, дозволяє визначити вимоги до перехідних процесів САК шляхом задання значень невеликої кількості їх вагових коефіцієнтів. До того ж практично довільний вибір цих коефіцієнтів забезпечує асимптотичну стійкість САК.

Основною перевагою даного способу задання вимог до якості процесу керування полягає в тому, що він дозволяє застосовувати для синтезу САК результати теорії оптимального керування [2] і теорії аналітичного конструювання оптимальних регуляторів (АКОР) [3]. Основними перевагами теорії АКОР є її гранична формалізація, логічна завершеність а також порівняно невисока математична складність.

Найбільш доцільним шляхом вирішення задачі синтезу САК об'єктами, що описуються рівнянням (1), є вирішення задачі АКОР по відповідному інтегральному критерію. В сучасній теорії оптимального керування широке розповсюдження отримали інтегральні квадратичні функціонали якості САК [3]:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{t=\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

де  $Q$  – додатна визначена симетрична матриця вагових коефіцієнтів розмірності  $n \times n$ ;

$R$  – додатна визначена симетрична матриця вагових коефіцієнтів розмірності  $m \times m$ .

Особливістю квадратичних критеріїв якості вигляду (4) є можливість необмеженого збільшення коефіцієнтів підсилення САК (при  $R=0$ ) без втрати стійкості. В такому випадку критерій якості має вигляд:

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{t=\infty} (X^T Q X) dt \rightarrow \min. \quad (5)$$

САК, в якій за критерій оптимальності прийнятий критерій вигляду (5) буде оптимальною за точністю керування [4], окрім того забезпечуючи досить швидкий і плавний характер перехідних процесів [5].

**Постановка завдання.** Підвищення точності керування електроприводом з синхронними двигунами на постійних магнітах шляхом алгоритмічного синтезу функції перемикання релейного регулятора САК. Постановка задачі оптимально керування об'єктом (1) із використанням критерію (5) виглядає наступним чином: на множині допустимих керувань  $\mathbf{U} \in \mathfrak{R}^m$  необхідно знайти закон зворотного зв'язку  $\mathbf{U}(t) = F[\mathbf{X}(t)]$ , що утворює спільно з об'єктом (1) стійку замкнену систему, яка забезпечує мінімум функціоналу якості при переводі об'єкту керування із довільного початкового положення в кінцеве нульове:

$$I = \int_0^T F_0(\mathbf{X}) dt, \quad F_0(\mathbf{X}) > 0, \quad (6)$$

Сформульована задача АКОР є задачею Льютова-Калмана для об'єктів з розривним керуванням.

Більш досконалим є підхід до синтезу оптимальних регуляторів, заснований на використанні властивостей функцій перемикання оптимальних керувань, що описаний в роботах [6].

В роботах [7] при синтезі релейних систем оптимального керування для усунення їх некоректності пропонується окрім обмеження  $|\mathbf{U}_i(t)| \leq 1$  використовувати додаткове обмеження витрати сигналів керування:

$$\sum_{i=1}^n U_{yim} \int_{t_1}^{t_2} \left| \sum_{k=1}^n v_{ik} x_k \right| dt = C(\mathbf{X}(t)) \leq \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n v_{ik}(t_1) x_i(t_1) x_k(t_1), \quad (7)$$

де  $U_{yim}$  – абсолютні значення обмежень керуючих впливів

Як зазначалося вище, оптимальне керування  $|\mathbf{U}_i(t)| \leq 1$  та (7) можна привести до вигляду:

$$U = -\text{sign}[\psi(\mathbf{X})], \quad (8)$$

де  $\psi(\mathbf{X}) = [\psi_1(\mathbf{X}), \psi_2(\mathbf{X}), \dots, \psi_m(\mathbf{X}), ]^T$  – вектор функцій перемикання.

Для визначення вигляду функції перемикання необхідно розглянути основне функціональне рівняння відносно функції перемикання. Для отримання основного функціонального рівняння відносно функції перемикання в керуванні (6) оптимального за критерієм (6) при  $T \rightarrow \infty$  запишемо вираз для швидкості проникнення [7], тобто проекцію вектору відносної швидкості зображувальної точки на нормаль до перерізу поверхонь перемикання  $\psi(\mathbf{X}) = 0$  з урахуванням диференціальних рівнянь об'єкту керування :

$$\dot{\psi} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (9)$$

де  $\mathbf{G} = \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} \right\}$  – матриця розміром  $m \times n$ , рядки якої є градієнтом функцій  $\psi_i(\mathbf{X})$ :

Рівняння (9) є основним функціональним рівнянням, що враховує властивості об'єкту керування і його канали керування, і може бути використане для визначення функції перемикавання і, як наслідок, оптимального керування. Це рівняння дає можливість провести декомпозицію задачі, тобто скласти функціональне рівняння для функцій перемикавання кожного керуючого впливу.

Із рівняння (9) для  $i$ -ї поверхні перемикавання можна записати:

$$\dot{\psi}_i(\mathbf{X}) = \mathbf{G}_i \mathbf{A} + \mathbf{G}_i \mathbf{B} \mathbf{U}_i' + \mathbf{G}_i \mathbf{B} \mathbf{U}_i'' u_i. \quad (10)$$

Запишемо рівняння (11) по відношенню до  $i$ -го керування у вигляді:

$$\dot{\psi}_i(\mathbf{X}) = \mathbf{G}_i \dot{\mathbf{X}} = f_i(\mathbf{X}, \mathbf{U}_i') + \varphi_i(\mathbf{X}) u_i. \quad (11)$$

Згідно отриманому функціональному рівнянню (11) похідна  $i$ -ї функції перемикавання дорівнює швидкості проникненні  $i$ -ї поверхні перемикавання  $\psi_i(\mathbf{X}) = 0$ , а сама  $i$ -та функція перемикавання може бути знайдена із лінійного диференційного рівняння першого порядку відносно функції перемикавання зі змінними коефіцієнтами. Для об'єкту керування можна записати  $m$  функціональних рівнянь (11) відносно функцій перемикавання.

Згідно з властивостями функціонального рівняння та функцій перемикавання в роботі [6] приводиться наступний висновок: для того, що б керування (8) для об'єкту керування було оптимальним за критерієм (6) при  $T \rightarrow \infty$  і обмеженнях  $|\mathbf{U}_i(t)| \leq 1$  та (7) необхідно і достатньо визначити матрицю коефіцієнтів  $\mathbf{G}$ , або, що те ж саме, необхідно і достатньо визначити структуру складових  $f(\mathbf{X}, \mathbf{U}_i')$  і  $\varphi(\mathbf{X})$  основного функціонального рівняння (11).

Для того, що б перейти до вирішення задачі синтезу оптимального керування, необхідно скласти математичну модель електроприводу на базі СДПМ.

Система рівнянь, що описує динаміку руху СДПМ має вигляд:

$$\begin{cases} u_d = p\Psi_d + i_d r_s - \omega_R \Psi_q; \\ u_q = p\Psi_q + i_q r_s + \omega_R \Psi_d; \\ \Psi_d = x_d i_d + x_{dM} I_{M0}; \\ \Psi_q = x_q i_q; \\ Hp\omega_R = \Psi_d i_q - \Psi_q i_d - M_3; \\ I_{M0} = \text{const.} \end{cases} \quad (12)$$

Підставивши 3 і 4 рівняння системи (12) в рівняння 1, 2, 5 і враховуючи, що  $p x_{dM} I_{M0} = 0$  отримаємо:

$$\begin{cases} u_d = x_d p i_d + i_d r_s - \omega_R x_q i_q; \\ u_q = x_q p i_q + i_q r_s + \omega_R x_{dM} I_{M0} + \omega_R x_d i_d; \\ Hp\omega_R = x_{dM} I_{M0} i_q + x_d i_d i_q - x_q i_q i_d - M_3. \end{cases} \quad (13)$$

Прийmemo, що наведені нижче складові рівнянь системи (13) є збуреннями:

$$\begin{cases} f_1 = -\omega_R x_q i_q; \\ f_3 = \omega_R x_d i_d; \\ f_5 = x_d i_d i_q - x_q i_q i_d - M_3. \end{cases} \quad (14)$$

Із урахуванням (14) система (13) набуде вигляду:

$$\begin{cases} u_d = x_d p i_d + i_d r_s + f_1; \\ u_q = x_q p i_q + i_q r_s + \omega_R x_{dM} I_{M0} + f_2; \\ Hp \omega_R = x_{dM} I_{M0} i_q + f_3. \end{cases} \quad (15)$$

Враховуючи введені вище позначення введемо нові змінні:

$$\eta_1 = I_d = i_d - i_d^*; \quad \eta_2 = I_q = i_q - i_q^*; \quad \eta_3 = \Omega_R = \omega_R - \omega_R^*, \quad U_1 = u_d - u_d^*, \quad U_2 = u_q - u_q^*.$$

Система диференціальних рівнянь збуреного руху прийме вигляд:

$$\begin{cases} U_1 = \eta_1 (r_s + p x_d); \\ U_2 = \eta_2 (r_s + p x_q) + \eta_3 x_{dM} I_{M0}; \\ 0 = \eta_2 x_{dM} I_{M0} - \eta_3 p J. \end{cases} \quad (16)$$

Проаналізувавши вигляд системи рівнянь (16) можна побачити, що перше рівняння лінійно незалежне від двох останніх. Зважаючи на це, в процесі аналізу режимів роботи СДПМ без урахування пускових обмоток, як і в попередньому випадку, можна розглядати два незалежні канали по осях  $d$  і  $q$

Розглянемо математичну модель динаміки руху СДПМ для контуру  $q$ . Для цього запишемо останні два рівняння системи (16), що описують динаміку руху СДПМ по осі  $q$ :

$$\begin{cases} U_2 = \eta_2 (r_s + p x_q) + \eta_3 x_{dM} I_{M0}; \\ 0 = \eta_2 x_{dM} I_{M0} - \eta_3 p J. \end{cases} \quad (17)$$

Після алгебраїчних перетворень систему рівнянь для контурів  $d$  і  $q$  можна записати в стандартному вигляді:

$$\begin{cases} p \eta_1 = -\frac{r_s}{x_d} \eta_1 + \frac{1}{x_d} U_1 = A_d \eta_1 + B_d U_1 \\ p \eta_2 = -\frac{r_s}{x_q} \eta_2 - \frac{x_{dM} I_{M0}}{x_q} \eta_3 + \frac{1}{x_q} U_2; \\ p \eta_3 = \frac{x_{dM} I_{M0}}{J} \eta_2. \end{cases} \quad (18)$$

Таким чином, можна визначити матриці стану  $\mathbf{A}_q$  і керування  $\mathbf{B}_q$  системи, що описують динаміку процесів системи СДПМ для вісі  $q$ .

Виконаємо синтез регуляторів струму  $i_q$  та швидкості  $\omega_R$  згідно з методикою перетворення основного функціонального рівняння. Згідно з цією методикою, для синтезу оптимального керування за критерієм узагальненої роботи необхідно і достатньо визначити параметри основного функціонального рівняння  $p\Psi = \Phi$ . Для цього переписемо друге і третє рівняння системи (18), ввівши для зручності нові позначення:

$$\begin{cases} p\eta_2 = -\frac{r_s}{x_q}\eta_2 - \frac{x_{dm}I_{M0}}{x_q}\eta_3 + \frac{1}{x_q}U_2 = b_{22}\eta_2 + b_{23}\eta_3 + mU_2; \\ p\eta_3 = \frac{x_{dm}I_{M0}}{J}\eta_2 = b_{32}\eta_2. \end{cases} \quad (19)$$

Знайшовши координату  $\eta_2$  із другого рівняння системи (19) і підставивши в перше, а також отримаємо:

$$p\eta_2 - p\frac{b_{22}}{b_{32}}\eta_3 - b_{23}\eta_3 = mU_2. \quad (20)$$

Винісши позначення похідної  $p$  за дужки отримаємо рівняння:

$$p\left(\eta_2 - \frac{b_{22}}{b_{32}}\eta_3 - \frac{1}{p}b_{23}\eta_3\right) = mU_2. \quad (21)$$

Таким чином, функція перемикування буде мати вигляд:

$$\psi = \eta_2 - \frac{b_{22}}{b_{32}}\eta_3 - \frac{1}{p}b_{23}\eta_3. \quad (22)$$

Так як  $m = 1/x_q > 0$ , то оптимальне керування буде мати наступний вигляд:

$$u = -\text{sign}\left(\eta_2 - \frac{b_{22}}{b_{32}}\eta_3 - \frac{1}{p}b_{23}\eta_3\right). \quad (23)$$

Рівняння (23) є основним рівнянням закону керування для системи (19), яке гарантує стійкі аперіодичні перехідні процеси для довільних відхилень координат об'єкту керування.

Як було сказано вище, для систем підпорядкованого керування кожна з координат повинна регулюватись окремо.

Проведемо синтез регулятора струму, основною змінною стану для якого є величина  $\eta_2$ . Виразимо з другого рівняння системи (22) величину  $\eta_2$  і підставивши у вираз (23) отримаємо алгоритм оптимального керування регулятора струму в функції основної змінної:

$$u_i = -\text{sign}\left(\eta_2 - \frac{1}{p}b_{22}\eta_2 - \frac{1}{p^2}b_{23}b_{22}\eta_2\right). \quad (24)$$

Таким чином алгоритм оптимального регулювання струму по вісі  $q$  має такий кінцевий вигляд:

$$u_{iq} = u_{ym} \text{sign}(i_q^* - i_q). \quad (25)$$

Для синтезу релейного регулятора швидкості виразимо всі змінні основного рівняння закону керування (23) через змінну  $\eta_3$ . В результаті чого отримаємо:

$$u_\omega = -\text{sign}\left(-\frac{b_{22}}{b_{32}}\eta_3 + p\frac{1}{b_{32}}\eta_3 - \frac{1}{p}b_{23}\eta_3\right). \quad (26)$$

Користуючись описаними вище міркуваннями, можна виключити із рівняння (26) інтегральну складову, виразивши рівняння (26) через реальні змінні і враховуючи, що  $1/b_{32} = J/x_{dm}I_{M0} > 0$  отримаємо:

$$u_{\omega} = u_{yom} \operatorname{sign} \left( \omega^* - \omega - p \frac{x_q}{r_s} \omega \right). \quad (27)$$

Аналогічним чином можна отримати і закон оптимального регулювання струму  $i_d$ , який має вигляд:

$$u_{id} = u_{ym} \operatorname{sign} (i_d^* - i_d). \quad (37)$$

Структурна реалізація математичної моделі СДПМ, а також розроблених оптимальних керувань (24), (27), (28) зображена на рис. 1

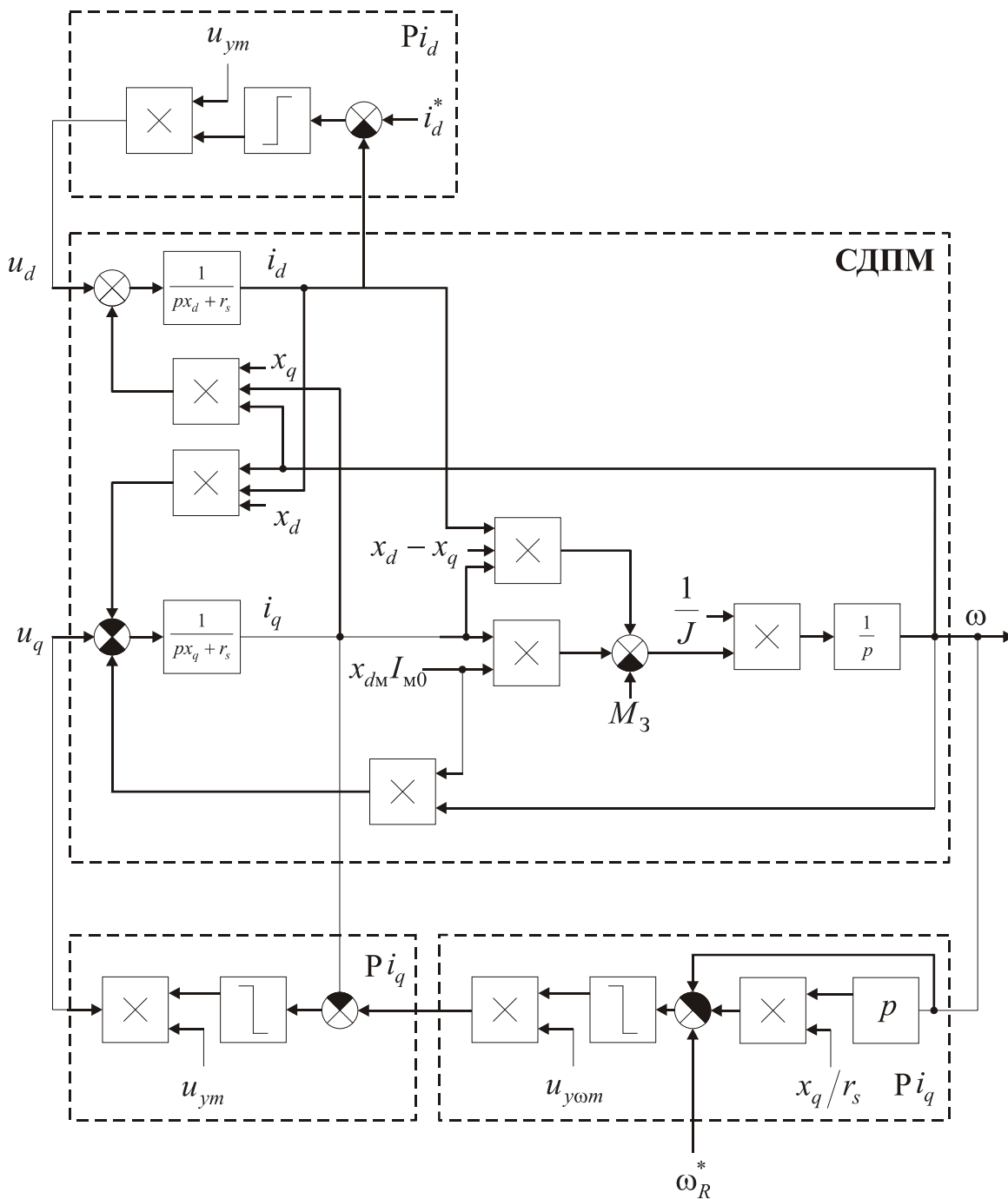


Рисунок 1 - Структурна схема системи оптимального керування електроприводом на базі СДПМ



**Висновки:**

1. Найбільш досконалим способом формалізації вимог до якості перехідних процесів САК є спосіб, заснований на введенні оптимізаційного функціоналу, або критерію якості інтегрального типу. Застосування таких інтегральних критеріїв, а саме квадратичних функціоналів, дозволяє визначити вимоги до перехідних процесів САК шляхом задання значень невеликої кількості їх вагових коефіцієнтів. До того ж практично довільний вибір цих коефіцієнтів забезпечує асимптотичну стійкість САК.

2. Застосування способу визначення оптимальних керувань шляхом перетворення основного функціонального рівняння та дослідження функцій перемикавання дозволяє значно спростити процедуру аналітичного синтезу оптимальних регуляторів.

3. Синтезовані алгоритми оптимального керування САК електроприводом на базі синхронних двигунів с постійними магнітами у вигляді релейних законів керування забезпечують стійкість розробленої САК а також оптимальні за точністю аперіодичні перехідні процеси.

**Список літератури**

1. Солодовников В.В. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов методом фазового пространства. I. Объекты с одномерным управляющим входом / В.В. Солодовников, А.Б. Филимонов, Н.Б. Филимонов // Известия вузов. Приборостроение. – 1982. – № 6. – С. 21–27.
2. Сейдж Э.П. Оптимальное управление системами / Э.П. Сейдж, Ч.С. Уайт. – М.: Радио и связь, 1982. – 392 с.
3. Абдулаев Н.Д. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов / Н.Д. Абдулаев, Ю.П. Петров. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 240 с.
4. Куропаткин П.В. Оптимальные и самонастраивающиеся системы / П.В. Куропаткин. – Л.: Госэнергоиздат, 1975. – 303 с.
5. Олейников В.А. Основы оптимального экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. М.: Высшая школа, 1969. – 296 с.
6. Сурков В.В. Применение метода А.А. Красовского для синтеза агрегированных регуляторов.// Материалы Международной конференции и Российской научной школы "Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий. Москва-Сочи 2000 г. Ч. 4. – С. 12–13.
7. Красовский А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами / А.А. Красовский. – М.: Машиностроение, 1969. – 240 с.

**Ivan Savelenko**

*Kirovograd National Technical University*

**Synthesis of automatic control system of electric synchronous motor with permanent magnets**

The analysis of mathematical models of electric synchronous motors with permanent magnets for the synthesis of system of automatic control.

Comparison of methods formalize requirements for the transition process in automatic control. Deduced the problem of analytical construction of optimal controller for automatic control system. Considered of the mathematical model of dynamics of movement synchronous permanent magnet motor in spatial of the rotating coordinates d-q.

Algorithms of optimal control synthesis of ACS of electric synchronous motors with permanent magnets in the form of relay control laws developed for ACS provide stability and optimum accuracy aperiodic transients.

**automatic control systems, electric drive, synchronous permanent magnet motor**

Одержано 18.04.15