УДК 621.01: 539.3

Андрій Володимирович ГОРОШКО,
кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики і електротехніки Хмельницького національного університету

Вілен Петрович РОЙЗМАН,
доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри радіотехніки та зв'язку Хмельницького національного університету

СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕКОРЕКТНО ПОСТАВЛЕНИХ ЗАДАЧ У ВИПАДКУ ПОЛІМОДАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ВИМІРЯНИХ ДАНИХ

Запропоновано статистичні підходи до розв'язання лінійних некоректно поставлених задач. Зокрема, у випадку полімодального розподілу ймовірностей виміряних вільних членів системи рівнянь обґрунтовано перехід від таких систем до систем рівнянь з нормально розподіленими векторами вільних членів. Для забезпечення стійкості розв'язків лінійних некоректно поставлених задач запропоновано використання методу усіченої оцінки. Метод базується на залученні методу головних компонент як лінійної фільтрації оцінок найменших квадратів (ОНК). Суть фільтрації полягає у такій дії на ОНК, яка б істотно звузила еліпсоїд розсіяння оцінок найменших квадратів за допомогою стиснення інформації, що міститься у матриці розсіяння, завдяки "усіченню" "хвоста" спектра матриці Фішера. Ефективність методу усічених оцінок продемонстровано для розв'язання оберненої

задачі визначення невідомих ексцентриситетів ротора компресора авіадвигуна АИ-20 за допомогою коефіцієнтів впливу і виміряних експериментально прогинів ротора.

Ключові слова: *обернена задача, некоректність, полімодальний розподіл імовірностей, ОНК, метод головних компонент, ексцентриситети, ротор.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Значна частина задач проектування, виробництва структурно-складних технічних виробів і технологічних процесів їх виготовлення, їх діагностування є оберненими задачами. Часто ці задачі або описуються лінійними моделями, або ж їх розв'язок зводиться до розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Унаслідок некоректності постановки таких задач їх розв'язок може сильно відрізнятись від істинних значень шуканих параметрів об'єкта, у першу чергу через свою нестійкість, і чисельне розв'язання СЛАР навіть на найсучасніших обчислювальних системах не звільняє дослідника від необхідності врахування впливу похибок у вхідних даних на результат.

Нехай об'єкт описується лінійною моделлю виду

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \tag{1}$$

де $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ - вектор невідомих (об'єкт), $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ - вектор даних спостережень, матриця $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ є лінійним оператором, що описує явні відношення між даними і параметрами моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано вирішення даної проблеми та на які опирається автор. Припустимо, що елементи матриці A задані точно. Для розв'язання оберненої задачі (1) необхідно знати (виміряти) $\mathbf{y}$, компоненти якого y_j є випадковими числами. Припущення, що y_j розподілені нормально, не завжди правомірне, і стосується лише випадкових похибок вимірювання. На практиці, як показано в роботі [1], на розподіл емпіричних даних можуть впливати й інші чинники, тому густина розподілу (ГР) імовірностей y_j досліджуваних параметрів може бути більш складною, зокрема полімодальною. З полімодальністю часто зустрічаються, наприклад, на виробництві, при статистичній оцінці параметрів деякої вибірки деталей, які потрапили із різних партій. У роботі [1] наведені приклади полімодальних гістограм розподілу фізико-механічних та інерційних характеристик деяких технічних об'єктів та причини появи полімодальності. Першою проблемою, що постає перед дослідником, є задача ідентифікації компонент y, без якої неможливе розв'язання (1). Природно, що таку ідентифікацію необхідно здійснювати в рамках статистичної обробки даних.

Метою досліджень є підвищення точності розв'язання лінійних некоректно поставлених задач у випадку полімодального розподілу ймовірностей виміряних величин шляхом розробки статистичних методів обґрунтованого переходу до систем рівнянь з нормально розподіленими векторами вільних членів і забезпечення стійкості розв'язків.

Виклад основного матеріалу дослідження. У роботі [2] розв'язок задач статистичної обробки даних з полімодальними ймовірнісними розподілами автори пропонують здійснювати, апроксимуючи емпіричну ГР сумішшю законів розподілу ймовірностей з подальшою її декомпозицією і статистичною оцінкою параметрів компонентів суміші. На відміну від непараметричного підходу до обробки емпіричних даних, запропонований підхід дає правила роботи з такими статистичними матеріалами, як, зокрема, методи визначення обґрунтованих допустимих значень досліджуваних параметрів. Запропонований підхід в умовах серійного виробництва і змішування партій деталей дозволяє реалізувати селективний підбір матеріалів і деталей для їх ефективнішого використання, що призводить до збільшення економічної ефективності виробництва.

Суть запропонованого методу обробки емпіричних даних, що не підкоряються унімодальним законам розподілу, полягає у представленні й обробці емпіричної ГР у вигляді суперпозиції k функцій ГР f_i з вектором параметрів θ_i (компонент суміші), $i = 1, 2, ..., k$, $2 \le k < \infty$ у вигляді

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\rho_i f_i(x,,_i),$$

де $x\in \mathrm{R}$, ρ_i – апріорна ймовірність (ваговий коефіцієнт) i-ї компоненти суміші, $\rho_i\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{k}\rho_i=1$.

У загальному випадку умова приналежності $f_i(x,,_i)$, $\forall i$ до одного параметричного сімейства не ставиться. Як частинний випадок полімодальна ГР може бути апроксимована лінійною комбінацією Гаусових функцій ГР з ваговими коефіцієнтами ρ_i виду

$$f(x,\mu_i,\sigma_i,\rho_i)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^{-1}\rho_i\exp\left[-(x-\mu_i)^2\left(2\sigma_i^2\right)^{-1}\right], i=1,2,...,k,\ 2\le k<\infty, \quad (2)$$

де $\propto_i$, σ_i – сталі, але невідомі параметри нормально розподіленої i-ї підвибірки.

Нехай у загальному випадку вектор виміряних величин $\mathbf{y}=(y_1,y_2,...,y_n)^T$ у (1) містить компоненти y_j, що мають полімодальний розподіл імовірностей. Представлення ГР y_j як суміші нормальних розподілів у вигляді $f_j(y_j)=\sum_{i=1}^{k}\rho_{ji}f_{ji}(y_j,\mu_{ji},\sigma_{ji})$, $j=1,2,...,n$, де f_{ji} – нормальна густина розподілу, з подальщою декомпозицією суміші дозволяє за емпіричними даними лише оцінити параметри $\rho_{ji},\mu_{ji},\sigma_{ji}$ полімодального розподілу, тоді як дослідника цікавить конкретне значення y_j, яке він має врахувати для розв’язання (1).

Для вирішення цієї проблеми пропонується спочатку проводити декомпозицію суміші, а далі перейти від отриманого неперервного розподілу (2) до дискретного розподілу $y_j=\{y_{j1},y_{j2},...,y_{jp}\}$ виміряних величин з їх одночасною класифікацією, де p – кількість вимірювань параметра y_j, $p\ge k$. Така класифікація передбачає проведення дискримінантного аналізу [3]. Для визначення приналежності y_{ji} до f_{ji} необхідно оцінити функції максимальної правдоподібності $L(f_{ji}\,|\,y_{ji})$ і порівняти між собою. Елемент y_{ji} слід віднести до такого класу f_{ji}, у рамках якого він виглядає найбільш правдоподібним, тобто функція правдоподібності якого максимальна. Оскільки відомо [4], що добуток нормально розподіленої випадкової величини $z \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ на коефіцієнт ρ дає величину з розподілом $N\left(\rho\mu, \rho^2\sigma^2\right)$, провівши класифікацію для всіх виміряних y_{ji}, систему (1) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11}\mu_{11} + \rho_{12}\mu_{12} + \dots + \rho_{1k_1}\mu_{1k_1} \\ \rho_{21}\mu_{21} + \rho_{22}\mu_{22} + \dots + \rho_{2k_2}\mu_{2k_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \rho_{n1}\mu_{n1} + \rho_{n2}\mu_{n2} + \dots + \rho_{nk_n}\mu_{nk_n} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Очевидно, що безпосередній розв’язок системи (3) для кінцевої вибірки не дасть вірних результатів. Тому у (1) замість у пропонується почергово підставити вектори

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{11}\mu_{11} \\ \rho_{21}\mu_{21} \\ \vdots \\ \rho_{n1}\mu_{n1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{12}\mu_{12} \\ \rho_{22}\mu_{22} \\ \vdots \\ \rho_{n2}\mu_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \ \mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \rho_{1k}\mu_{1k} \\ \rho_{2k}\mu_{2k} \\ \vdots \\ \rho_{nk}\mu_{nk} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

де $k = \max\left(k_1, k_2, \dots, k_n\right)$ і замість (3) розв’язувати k систем рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{y}_1, \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{y}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{y}_k. \end{aligned} \qquad (5)$$

При цьому в загальному випадку для $k_l < k,\ l = 1, 2, \dots, m$, для всіх $k_{l+1}, k_{l+2}, \dots, k$, компоненти замінюються $\rho\mu = 0$. У результаті розв’язання лінійної некоректно поставленої задачі (1) у випадку полімодального розподілу ймовірностей виміряних даних $\mathbf{y}$ зводиться до розв’язання k систем рівнянь (4), де $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ – багатомірні нормальні величини.

Іншою задачею на шляху розв'язання оберненої задачі є подолання нестійкості її розв'язків, викликаної поганою обумовленістю матриці $\mathbf{A}$ в загальній моделі (1). Задача буде некоректною і її розв'язок нестійким з тієї причини, що маленькі похибки в $\mathbf{y}$ будуть набагато збільшені у розв'язку $\mathbf{x}$ [5, 6].

Оскільки $\propto_j$ у (4) – оцінка матсподівання, яка є завжди випадковою, найбільш природною видається постановка обернених задач у рамках теорії статистичної оцінки невідомих параметрів. На відміну від самих числових характеристик, оцінки є випадковими, причому їх значення залежать від обсягу експериментальних даних, а закони розподілу імовірності – від законів розподілу імовірності самих випадкових чисел або значень вимірювальних величин.

З позицій математичної і прикладної статистики, розв'язок оберненої задачі полягає у пошуку такої оцінки об'єкта, яка розглядається як сукупність невідомих параметрів на основі експериментальних даних, а також апріорних відомостей відносно об'єкта $\mathbf{x}$ і моделі $\mathbf{A}$. Оскільки реалізація відображення $\mathbf{y}$ випадкова, оцінка об'єкта $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ теж є випадковою і загалом багатомірною величиною.

Відомо, що знайти "точний" розв'язок обернених задач для систем, які описуються погано обумовленими СЛАР з неточними вільними членами, неможливо в принципі, тому мова може йти лише про наближений розв'язок.

Оскільки у випадку $m = n$ задача (1) нестійка, пропонується збільшувати інформацію про об'єкт шляхом збільшення кількості рівнянь $n > m$, отримуючи при цьому перевизначену СЛАР. На практиці це означає збільшення кількості вимірювань [7].

Саме у випадках, якщо дослідник має змогу провести декілька вимірювань $\mathbf{y}$, найбільш ефективними методами отримання стійких розв'язків є статистичні, оскільки кожне подальше вимірювання містить у собі додаткову інформацію про шуканий об'єкт $\mathbf{x}$. Ця апостеріорна інформація наближає дослідника до одержання найбільш "точного" розв'язку некоректної задачі.

Розглянемо перевизначену СЛАР. У строгому сенсі отримана система рівнянь є несумісною, оскільки, вибравши з неї різні сукупності по m рівнянь кожна, ми отримаємо різні результати при розв'язанні підсистем. Отже, пропонується знайти розв'язок у вигляді єдиного об'єкта $\hat{x}$, при підстановці якого замість $\mathbf{x}$ у праву частину (1) досягається найточніше представлення всієї сукупності експериментальних даних.

Для цього використаємо найпоширеніший спосіб одержання оцінок оригінала – метод максимальної правдоподібності (ММП). Хоча оцінка ММП є нестійкою, її область допустимих оцінок (ОДО) вужча, ніж ОДО інверсної оцінки $\hat{x} = A^{+}y$, де $\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{T}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{T}$. Більш того, оцінку ММП можна наближати до істинного значення, збільшуючи кількість реалізацій [8].

Для (1) ММП вимагає, щоб нев'язка $\left\|\hat{x} - x\right\|^{2}$ була мінімальною. Отже, для випадку нормального розподілу похибок МП-оцінкою є оцінка методу найменших квадратів (МНК). Метод найменших квадратів відносять до умовно-регулярних стохастичних методів розв'язку зворотних задач, оскільки даний метод звужує множину можливих розв'язків до класу коректності, а саме до компакту [9].

Як відомо, для нормального закону розподілу похибок ОНК є спроможною, незміщеною та ефективною оцінкою. Спроможність забезпечується тим фактом, що ймовірність події $\left\|\hat{x} - x\right\| < \varepsilon$ при $n \to \infty$ прямує до одиниці. Незміщеність (асимптотична) випливає із факту $\lim\limits_{n\to\infty} M\left(\hat{x}\right)_{k} = x$. Більш того, МНК можна застосовувати навіть тоді, коли похибки вимірювань не підпорядковуються нормальному закону, щоправда, у таких випадках одержуються квазіправдоподібні оцінки, які можуть стати правдоподібними при застосуванні так званих вагових характеристик.

Одним із способів звуження множини можливих розв'язків до класу коректності є спосіб багатократного розв'язання (1) і знаходження шуканого розв'язку як математичного сподівання всіх отриманих розв'язків. У певних умовах до того ж результату можна прийти, якщо, провівши вимірювання, усереднити їх і підставляти як компоненти вектора $\mathbf{y}$ їх матсподівання. У роботі [8] показано, що такий підхід є нічим іншим, як застосуванням МНК, а одержані при цьому розв'язки - оцінками за МНК.

Незважаючи на те, що ОНК – незміщена оцінка, вона є нестійкою, і для СЛАР з великими числами обумовленості МНК малоефективний. Причиною нестійкості є величезна дисперсія ОНК. Як зазначають автори [7], при розв'язанні оберненої задачі функція правдоподібності має застосовуватись лише як попередній інструмент. Замість цього слід опиратись на деяку некомунікативну статистику, яка б брала до уваги систематичні відхилення порівнюваних випадкових послідовностей.

Тому пропонується застосувати до ОНК лінійну фільтрацію. Суть фільтрації як одного із методів регуляризації полягає у тому, щоб свідомо піти на деяку зміщеність отриманої оцінки, при цьому істотно зменшивши її розсіяння. Отже, необхідно знайти таку оцінку, зміщеність якої ще прийнятна, а дисперсія – значно менша, ніж у ОНК. З метою фільтрації пропонується застосувати стиснення інформації і одержання усіченої оцінки (truncated estimate). Для цього пропонується використати відомий із статистики і багатомірного аналізу метод стиснення даних – метод головних компонент (*PCA*).

Нехай замість (1) розв'язується

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}\,, \tag{6}$$

де y – істинне значення, Δy- вектор значень "шуму", компоненти якого розподілені нормально $\Delta y_{\mathrm{i}} \sim N(0,\sigma_i)$. Тоді Δy є багатомірною нормальною величиною з нульовим середнім $\langle \Delta\mathbf{y} \rangle = 0$ і коваріаційною матрицею $\Sigma = \mathrm{cov}(\Delta\mathbf{y})$.

Як відомо, одну із важливіших ролей в аналізі формування нестійкості розв'язків лінійних обернених задач відіграє матриця Фішера $\mathbf{I}$, оскільки дорівнює оберненій коваріаційній матриці ОНК $\Omega = I^{-1}$. Матриця Фішера для ОНК оцінки моделі (6) може бути знайдена за формулою

$$I = A^T \Sigma^{-1} A\,,$$

де коваріаційна матриця "шуму" знаходиться як $\Sigma = (\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)^T (\mathbf{y} - \langle \mathbf{y} \rangle)$, або за формулою

$$I = \left(\left(x - \widehat{x} \right)^T \left(x - \widehat{x} \right) \right)^{-1},$$

де $\widehat{\mathbf{x}}$ – ОНК.

Отримаємо спектральне представлення інформаційної матриці Фішера у вигляді

$$I = VDV^T,\ D = diag\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \right),\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \lambda_n > 0, \qquad (7)$$

де $\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \right)$ - власні значення матриці Фішера, V – ортогональна матриця, стовпці якої $\left(V_1, V_2, ..., V_n \right)$ задають напрямки головних осей еліпсоїдальної області допустимих оцінок некоректно поставленої задачі (1) [7]. У той час ОНК розкладається за системою власних векторів матриці Фішера як

$$\hat{x} = V\widehat{p}, \qquad (8)$$

де $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, ..., \widehat{p}_n$ – головні компоненти ОНК. Це компоненти $\hat{x}$ у системі координат, яка повернута відносно початкової таким чином, щоб координатні вісі стали паралельні головним осям еліпсоїда розсіяння ОНК.

Як відомо [7], слід коваріаційної матриці ОНК дорівнює сумі її власних значень

$$tr(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left(\widehat{x}_i - x_i \right)^2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}.$$

Звідси видно, що сумарне відхилення ОНК від істинного об’єкта визначається спектром матриці I. Найбільший внесок у сумарне відхилення роблять найменші власні значення, тобто “хвіст” матриці Фішера. Отже, суть фільтрації полягає у компромісному виборі такої кількості головних компонент $v \leq n$, яка б забезпечила достатню точність оцінки при прийнятній дисперсії. Збільшуючи v, ми досягаємо більш точного в середньому представлення $\mathbf{x}$ через $\hat{x}_v$, але при цьому враховується все більше доданків λ_k^{-1} із “хвоста” спектра матриці Фішера, і це дуже швидко погіршує якість усіченої оцінки.

Усічена оцінка має вигляд

$$x_{tr} = V_{v_{\min}} \widehat{p}.$$

Ураховуючи, що із (8) $\hat{p} = V^T \hat{x}$, маємо

$$x_{tr} = V_{v_{\min}} V^T \hat{x} \,. \qquad (9)$$

Запропоновані статистичні методи ОНК і усіченої оцінки були застосовані для розв'язання оберненої задачі визначення невідомих ексцентриситетів ротора компресора авіаційного газотурбінного двигуна АИ-20. Ротор компресора дисково-барабанного типу містить десять окремих дисків, які несуть на своїх вінцях робочі лопатки, задній вал ротора і лабіринти ущільнення вузлів заднього і переднього підшипника (рис. 1).

Усі диски і задній вал компресора після механічної обробки піддаються статичному балансуванню в динамічному режимі, а зібраний ротор компресора – динамічному балансуванню до залишкового дисбалансу 5 г·см на кожну опору.

У процесі експлуатації двигунів АИ-20 і при проведенні тривалих випробувань на стендах були знайдені такі дефекти, як погнутість заднього вала, поломки штифтового з'єднання ротора компресора, головним чином, у зчленуванні заднього вала з десятим ступенем ротора, а також низка дефектів по корпусу камери згоряння.

Розглянемо застосування ОНК і усіченої оцінки для розв'язання оберненої задачі визначення невідомих ексцентриситетів ротора за допомогою коефіцієнтів впливу шляхом розв'язку матричного рівняння

$$y = A\omega^2 \left(y + e \right), \qquad (10)$$

де y – вектор прогинів ротора у n його перерізах, виміряних на частоті обертання ω, e – вектор ексцентриситетів ротора у цих же перерізах, A - матриця добутків коефіцієнтів впливу α_{ik} і мас m_k, розташованих у досліджуваних перерізах.

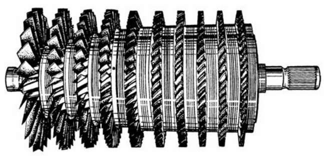

Рис. 1. Зовнішній вигляд ротора компресора газотурбінного двигуна АИ-20

Для пошуку ексцентриситетів була створена п'ятимасова математична модель ротора компресора (рис. 2).

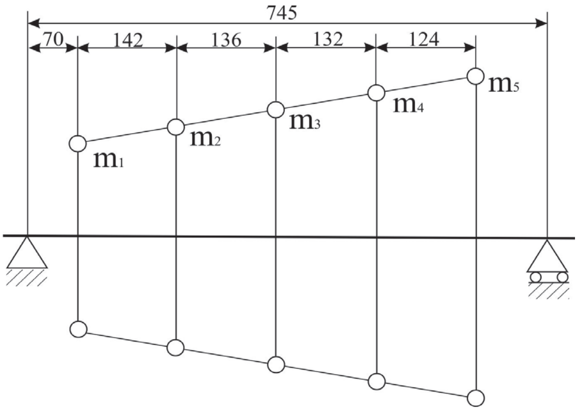

Рис. 2. П'ятимасова математична модель ротора компресора

У роботі [10] показані залежності відносних похибок ексцентриситетів від відносних похибок вимірювання прогинів, коефіцієнтів впливу матриці і частоти обертання ротора, виражені через число обумовленості матриці. Зважаючи на ці залежності була досліджена п'ятимасова модель впливу, маси якої задаються матрицею добутків $\alpha_{ik} \times m_k$, $i, k = 1,2,\ldots,5$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.228 & 0.203 & 0.195 & 0.155 & 0.1299 \\ 0.184 & 0.246 & 0.284 & 0.246 & 0.2457 \\ 0.143 & 0.230 & 0.303 & 0.295 & 0.3472 \\ 0.111 & 0.195 & 0.290 & 0.336 & 0.4440 \\ 0.067 & 0.139 & 0.234 & 0.316 & 0.5200 \end{bmatrix}, \ c^{-2}.$$

Критичні частоти обертання ротора на жорстких опорах дорівнюють 14 000, 28 900, 65 300, 130 600, 419 300 об./хв. Число обумовленості матриці $cond(A) \approx 573$. Це означає, що при точності вимірювання прогинів ротора 10^{-5} м, що відповідає відносній похибці 6–10 %, похибка у визначенні ексцентриситетів для звичайного інверсного розв'язку $e = A^{-1}y$ системи (10) може сягнути 5 730 %, тобто отриманий розв'язок буде ненадійним.

Для перевірки дієвості запропонованого методу лінійної фільтрації з використанням методу головних компонент за допомогою програми MATLAB [11] був проведений чисельний експеримент. На основі заданих точних значень ексцентриситетів перерізів e =(77.4, 89.9, 105.0, 79.0, 59.5)$^{T}\cdot 10^{-6}$ м були визначені точні значення прогинів $\mathbf{y}$ ротора шляхом розв'язку прямої задачі, в якому матриця A передбачалась заданою без похибок. Ці значення y =(76.35, 100.23, 107.52, 109.53, 98.16)$^{T}\cdot 10^{-6}$ м були прийняті за математичне сподівання прогинів у заданих перерізах. Далі, задаючи СКВ $\sigma = \Delta/3$, де $\Delta = 10^{-5}$ м – точність вимірювань, використовуючи комп'ютерний генератор випадкових чисел, були отримані різні реалізації прогинів, як випадкових величин, розподілених за нормальним законом розподілу із вказаними вище параметрами. У наведеному експерименті було передбачено генерування 50 реалізацій прогинів у кожному із розглянутих перерізів. Для кожної реалізації $\mathbf{y}$ були знайдені реалізації $\mathbf{e}$ і за ними – їх математичні сподівання, що співпадають із ОНК $\hat{\mathbf{e}}$.

Матриця Фішера дорівнює

$$I = \begin{bmatrix} 0.3273 & 0.4145 & 0.5008 & 0.4771 & 0.5375 \\ 0.4145 & 0.5629 & 0.7082 & 0.7002 & 0.8257 \\ 0.5008 & 0.7082 & 0.9137 & 0.9263 & 1.1251 \\ 0.4771 & 0.7002 & 0.9263 & 0.9651 & 1.2090 \\ 0.5375 & 0.8257 & 1.1251 & 1.2090 & 1.5683 \end{bmatrix} \times 10^{9}.$$

Здійснивши спектральне розкладання матриці Фішера згідно з (7), одержали діагональну матрицю D з власними значеннями на головній діагоналі (вибірковими дисперсіями головних компонент) і матрицю власних векторів V.

$$D=\begin{bmatrix} 64215 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14310 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2919 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 104 \end{bmatrix},$$

$$V=\begin{bmatrix} -0.2463 & 0.5968 & 0.7071 & -0.2176 & 0.1891 \\ -0.3559 & 0.4432 & -0.1751 & 0.5095 & -0.6218 \\ -0.4670 & 0.2426 & -0.5148 & 0.1023 & 0.6690 \\ -0.4831 & -0.1000 & -0.2230 & -0.7616 & -0.3561 \\ -0.6010 & -0.6152 & 0.3932 & 0.3202 & 0.0572 \end{bmatrix}.$$

Звідси видно, що сумарна вибіркова дисперсія складає 82 116. Дисперсія головної компоненти складає 78,2 % сумарної дисперсії, а три головні компоненти вичерпують 99,2 % повної дисперсії. Для фільтрації оцінки обмежимося трьома власними векторами коваріаційної матриці ($v=3$). Тоді маємо

$$V_3=\begin{bmatrix} -0.2463 & 0.5968 & 0.7071 & 0 & 0 \\ -0.3559 & 0.4432 & -0.1751 & 0 & 0 \\ -0.4670 & 0.2426 & -0.5148 & 0 & 0 \\ -0.4831 & -0.1000 & -0.2230 & 0 & 0 \\ -0.6010 & -0.6152 & 0.3932 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{p}=\begin{bmatrix} -0.1741 \\ 0.0686 \\ 0.0012 \\ -0.0508 \\ 0.4897 \end{bmatrix}\times 10^{-3}.$$

Усічена оцінка, підрахована за формулою (9), дорівнює e_{tr} =(84.64, 92.14, 97.31, 76.96, 62.88)^T·10^{-6} м. Відносна похибка усіченої оцінки, підрахована як $\left(\|e_{tr}\|-\|e\|\right)/\|e\|$, склала Δe = 0,18 %. У той же час оцінка за МНК дорівнює $\hat{e}$ =(188.3, 238.3, 419.8, 58.8, 74.6)^T·10^{-6} м. Відносна похибка ОНК склала Δe =182 %, тобто точність розв'язку з використанням усіченої оцінки, порівняно із звичайним ОНК, збільшилась у 1 167 разів. Ці цифри наочно демонструють достатньо високу точність і ефективність описаного статистичного методу одержання регулярних розв'язків лінійних обернених задач.

Висновки. Запропоновано статистичні підходи до розв'язання лінійних некоректно поставлених задач у випадку полімодального розподілу ймовірностей виміряних вільних членів системи рівнянь. Обґрунтовано перехід від таких систем до систем рівнянь з нормально розподіленими векторами вільних членів у СЛАР.

Для забезпечення стійкості розв'язків лінійних некоректно поставлених задач запропоновано використання методу усіченої оцінки з використанням методу головних компонент як лінійної фільтрації оцінок найменших квадратів. Суть фільтрації полягає у такій дії на ОНК, яка б істотно звузила еліпсоїд розсіяння ОНК за допомогою стиснення інформації, що міститься у матриці розсіяння, завдяки "усіченню" "хвоста" спектра матриці Фішера.

Продемонстровано високу ефективність методу усічених оцінок для розв'язання оберненої задачі визначення невідомих ексцентриситетів ротора компресора авіадвигуна АИ-20 за допомогою коефіцієнтів впливу й експериментальних значень прогинів ротора.

Перспективою подальших розвідок у даному напрямі є розробка методів призначення довірчих інтервалів для полімодальних законів розподілу та їх практичне застосування для визначення допустимих значень даних спостережень.

Список використаної літератури

1. Горошко А. В. Уточнення методу обробки статистичних даних / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Збірник наукових праць. Сер. : Військові та технічні науки [гол. ред. Б. М. Олексієнко]. – Хмельницький : Видавництво НАДПСУ, 2014. – № 1(61). С. 304–313.

2. Горошко А. В. Розрахунок допустимих значень параметрів об'єктів у випадку полімодальності їх імовірнісних розподілів / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вібрації в техниці та технологіях. – 2013. – № 4 (72). – С. 19-27.

3. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности : справ. изд. / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин ; под ред. С. А. Айвазяна. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 607 с. : ил.

4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – М. : Высш шк., 2000. – 480 с. : ил.

5. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979.

6. Андрушевский Н. М. Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений : учебное пособие / Н. М. Андрушевский. – М. : Издательский отдел факультета ВМиК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. – 71 с.

7. Теребиж В. Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач / В. Ю. Теребиж – М. : ФИМЗМАТЛИТ, 2005. – 376 с.

8. Горошко А. В. Шляхи підвищення точності розв'язків зворотних задач / А. В. Горошко, В. П. Ройзман // Вісник Хмельницького національного університету. – 2013. – № 6. – С. 60–69.

9. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности : в 2 т. / Ю. М. Мацевитый / НАН Украины. Ин-т проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного. – К. : Наукова думка, 2003.

10. Ройзман В. П. Некоторые вопросы теории балансировки гибких роторов / В. П. Ройзман, Л. Д. Вайнгортин. – М. : Наука, 1979. – С. 55–64.

11. MathWorks: [Електронний ресурс]. The MathWorks, Inc. 1994-2014 URL: http://www.mathworks.com/

Стаття надійшла до редакції 12.11.2015.

Горошко А. В., Ройзман В. П. **Статистические методы решения линейных некорректно поставленных задач в случае полимодального распределения вероятностей измеренных данных**

Предложены статистические подходы к решению линейных некорректно поставленных задач в виде систем уравнений с полимодально распределенными вероятностями измеренных свободных членов путем обоснованного перехода к системам уравнений с нормально распределенными векторами свободных членов и обеспечения устойчивости решений с помощью использования метода усеченной оценки, базирующегося на привлечении метода главных компонент как линейной фильтрации оценок наименьших квадратов. Суть фильтрации заключается в таком действии на ОНК, которая бы существенно сузила эллипсоид рассеяния оценок наименьших квадратов с помощью сжатия информации, содержащейся в матрице рассеяния, благодаря "усечению" "хвоста" спектра матрицы Фишера. Эффективность

метода усеченных оценок продемонстрирована для решения обратной задачи определения неизвестных эксцентриситетов ротора компрессора авиадвигателя АИ-20 с помощью коэффициентов влияния и измеренных экспериментально прогибов ротора.

Ключевые слова: *обратная задача, некорректность, полимодальное распределение вероятностей, ОНК, метод главных компонент, эксцентриситеты, ротор.*

Goroshko A.V., Royzman V. P. **Statistical methods for solving linear ill-posed problems in the case of multimodal probability distribution of the measured data**

The paper suggested statistical approaches to solving linear ill-posed problems. In particular, in the case of multimodal probability distribution of the measured free members of the system of equations to justify the passage of such systems to systems of equations with normally distributed vectors free members. The advantages and disadvantages of the method of least squares estimation for solving ill-posed problems. To ensure the stability of solutions of linear ill-posed problems prompted the use of the method of truncated estimate. The method is based on the involvement of principal component as linear filtering estimate of least squares. The essence of the filter is in such an action on the LSE, which would substantially narrowed the scatter ellipsoid estimate of least squares using the compression of the information contained in the scattering matrix, thanks to the "truncated" "tail" of the spectrum of the Fisher matrix. The effectiveness of the method of truncated assessments demonstrated for solving the inverse problem of determining unknown eccentricities compressor rotor aircraft engine АИ-20 by the influence coefficient and experimentally measured deflection of the rotor.

Keywords: *inverse problem, incorrectness, multimodal probability distribution, estimation of least squares, principal component, eccentricities, rotor*