УДК 623.9

Олег БОРОВИК,
доктор технічних наук, професор
Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького, м. Хмельницький

Лілія ТРАСКОВЕЦЬКА,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького, м. Хмельницький

Людмила БОРОВИК,
кандидат психологічних наук, доцент
Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького, м. Хмельницький

МОДЕЛЮВАННЯ ЗМІНИ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ НА МЕЖІ ДВОХ СЕРЕДОВИЩ

У роботі побудована математична модель зміни характеристик гравітаційного поля на межі двох середовищ, яка дозволяє визначати відповідні аналітичні розв'язки. Модель отримана завдяки розв'язанню крайової задачі, що враховує неоднорідності розподілу густини речовин на межі стику двох середовищ, на основі застосування математичного апарату інтегральних перетворень.

Ключові слова: *математична модель, радар, імпульси сигналів, оператори перетворення функції, перетворення Фур'є.*

© Боровик О., Трасковецька Л., Боровик Л.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Упродовж останнього періоду в оперативно-службову діяльність (ОСД) органів і підрозділів Державної прикордонної служби України (ДПСУ) впроваджено сучасну модель охорони кордону. З урахуванням ситуації, що склалася в країні на даний час, і світових тенденцій нагальним стає посилення контролю за обстановкою на державному кордоні (ДК). Такий контроль передбачає контроль за переміщенням осіб, транспортних засобів і вантажів як у пунктах пропуску через ДК, так і поза їх межами. При цьому в останній період актуальності набуває завдання пошуку малогабаритних об'єктів у непрозорих середовищах загалом і пошуку підземних комунікацій, місць закладання мін у металевих і неметалевих корпусах, а також виявлення тайників зокрема [1, 2].

Це спонукає до необхідності дослідження та впровадження сучасних технологій пошуку, що здійснюється технічними засобами прикордонного контролю, дія яких ґрунтується на різних фізичних принципах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано вирішення даної проблеми та на які опираються автори. Із усіх відомих методів виявлення малорозмірних об'єктів, у тому числі і тайників, найефективнішим є радіолокаційний метод [3, 4]. Прилади, які базуються на радіолокаційному методі (радари) можуть виявляти в ґрунті схованки, міни, металеві та пластмасові труби, пустоти тощо. Специфікою радарів є використання надширокосмугових сигналів, які поширюються в середовищах з яскраво вираженими затуханням і дисперсією. Однак, незважаючи на істотні досягнення в дослідженні і розробці радарів підповерхневого зондування, проблема забезпечення достовірності результатів зондування залишається не до кінця вирішеною [5]. І основною причиною цього є порівняно великі питомі втрати при проходженні електромагнітної хвилі через шар прикриття неоднорідного середовища [6].

Отже, подальше дослідження та вдосконалення функціювання радарів залежить від можливості використання результатів моделювання поширення імпульсів надширокосмугових сигналів радарів на межі двох середовищ.

Саме тому м**етою статті** є створення відповідної адекватної електродинамічної моделі.

Виклад основного матеріалу дослідження. Традиційні процедури інтерпретації результатів підповерхневого зондування та ідентифікації об'єктів покладені на оператора. Це знижує достовірність інтерпретації, оперативність моніторингу та істотно стримує використання радарів для розв'язання широкого спектру задач. Підвищення достовірності діагностики та ідентифікації аномалій за результатами зондування можливе на основі реконструкції їх геометричних і електрофізичних параметрів. А це призводить до необхідності розв'язування прямих і обернених задач розсіювання.

Пряма задача полягає у визначенні характеристик електромагнітного поля у точках досліджуваного середовища. Її розв'язування являє собою аналітичну процедуру, за допомогою якої моделі об'єкта ставиться у відповідність модель поля (з урахуванням спрощень, які випливають із суті розв'язуваної задачі). Знання особливостей розв'язання прямої задачі надає інтерпретатору можливість якісно уявити гравітаційні і магнітні аномалії, скоротити можливий набір моделей, які підлягають аналізу, перевірити достовірність моделі об'єкта.

Обернені задачі поділяються на теоретичні і практичні. Теоретичні обернені задачі полягають у знаходженні інтерпретаційних моделі за її абсолютно точним полем, заданим на нескінченній множині точок. При розв'язуванні практичних обернених задач ураховують скінченну кількість спостережень, обмеженість ділянки місцевості, де проводиться зондування, і наявність перешкод. Таким чином, теоретичні обернені задачі є спрощеними моделями практичних обернених задач і дають можливість їх глибоко аналізувати. Вивчення обернених задач фактично привело не тільки до розуміння основних особливостей інтерпретаційного процесу, але і до розробок багатьох практично важливих методів інтерпретації. Математичні обернені задачі зводяться до розв'язування операторних рівнянь. При цьому інтерпретаційні моделі описуються як елементи деяких метричних просторів.

У теоретичних обернених задачах як інтерпретаційні моделі виступають функції, а в практичних – зазвичай багатомірні вектори.

Практична обернена задача може мати такий вигляд. Нехай інтерпретаційна модель визначається n параметрами. Деякі з них описують місце розташування аномалій (об'єктів), інші характеризують їх форму, розміри, глибину залягання і фізичні властивості. За даними гравітаційних вимірювань необхідно зробити висновок про наявність аномалії, її розташування і форму.

При дослідженні цієї задачі слід враховувати таке. Неоднорідності розподілу густини речовин служать причиною того, що напруженість гравітаційного поля на поверхні Землі відхиляється від середнього значення. У випадку, якщо віддаль між тілами (аномаліями) більша, ніж віддаль від них до поверхні Землі, положення тіл відповідають локальним максимумам аномалій. У протилежному випадку декільком тілам відповідає один локальний максимум. У випадку, якщо аномалія на глибині забезпечує наявність одного локального мінімуму, можна з більшою достовірністю говорити про те, що аномалія породжена одним тілом.

Дослідження характеристик гравітаційного поля призводить до іншої задачі, математична постановка якої така.

Нехай існує границя розділу двох середовищ на глибині h під поверхнею Землі; x, y – горизонтальна та вертикальна координати, відповідно; джерела аномального гравітаційного поля знаходяться під поверхнею Землі на глибині $y \geq h$, а при $0 < y < h$ їх немає; $u(x, y)$ – напруженість гравітаційного поля, що породжене аномаліями; на поверхні Землі ($y = 0$) величину $u(x, y)$ можна виміряти. Потенціал поля і компоненти напруженості поза масами, що породжують гравітаційне поле, задовольняють рівняння Лапласа [7].

Нехай функція $u(x, y)$ має вигляд

$$u(x, y) = \vartheta(-x)u_1(x, y) + \vartheta(x)u_2(x, y)\,. \qquad (1)$$

Функція (1) обмежена в області $D_1 = \{(x,y): x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty);$ $y \in (0,+\infty)\}$, де $\vartheta(x)$ – одинична функція Хевісайда [8] є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = 0, \quad j = 1,2 \tag{2}$$

і регулярна в півплощині $y < h$.

Для функції (1) на прямій $x = 0$ виконуються ідеальні умови спряження

$$u_1(0,y) = u_2(0,y), \qquad k\frac{\partial u_1(0,y)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(0,y)}{\partial x}, \; k > 0. \tag{3}$$

Нехай $u(x,y) = g(x)$, де $g(x) = \vartheta(-x)g_1(x) + \vartheta(x)g_2(x)$. Функція $g(x)$ визначена в області $I_1 = \{x : x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)\}$.

Потрібно знайти закон розподілу гравітаційного поля

$$u_j(x,h) = f_j(x), \quad j = 1,2, \tag{4}$$

де

$$f(x) = \vartheta(-x)f_1(x) + \vartheta(x)f_2(x). \tag{5}$$

Тобто потрібно знайти такі функції $f_1(x)$, $f_2(x)$, що є розв'язком задачі (1)-(5).

Для відшукання розв'язку сформульованої задачі застосуємо прямий Π і обернений Π^{-1} оператори перетворення функцій.

За [8] оператор перетворення Π функції $g(x)$ ставить у відповідність функцію $g(x)$ $(\Pi : g(x) \to g(x))$, визначену на всій дійсній осі за правилом:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2} g_1(x), & x < 0, \\ \dfrac{k-1}{2} g_1(-x) + g_2(x), & x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Застосовуючи оператор Π до задачі (1)–(5), отримаємо іншу задачу для однорідного середовища. Необхідно знайти вертикальну компоненту напруженості гравітаційного поля $u(x,y)$, де $u(x,y)$ – функція, що гармонічна в області $x \in (-\infty, +\infty)$, $y < h$, і яка може бути знайдена з рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{7}$$

за умови

$$u(x,h) = f(x), \tag{8}$$

де $f(x) = \Pi[f(x)]$.

Розв'язок задачі (7)–(8) подається інтегральною формулою Пуассона [8]

$$u(x,y) = \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2 + (y-h)^2}. \tag{9}$$

Оскільки при $y = 0$ значення $u(x,0) = g(x)$, де $g(x) = [g(x)]$, може бути виміряне безпосередньо, то визначення $f(x)$ здійснимо з інтегрального рівняння типу згортки

$$\frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2 + h^2} = g(x). \tag{10}$$

Застосуємо до рівняння (10) оператори Π^{-1} і Π^*.

Оператор $\Pi^{-1} : g(x) \to g(x)$, обернений до оператора Π, має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{2}{k+1} g(x), & x < 0, \\ g_2(x) &= g(x) - \frac{k-1}{k+1} g(-x), & x > 0. \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

а оператор Π^*, спряжений до оператора Π:

$$\Pi^*[g(x)] = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2} g(x) + \dfrac{k-1}{2} g(-x), & x < 0, \\ g(x), & x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

У результаті елементарних перетворень отримаємо сепаратну систему інтегральних рівнянь типу згортки відносно функцій $f_j(x),\ j = 1,2$

$$\left.\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{h}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{1}{(x-\xi)^2+h^2} + \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{(x+\xi)^2+h^2}\right) f_1(\xi)d\xi + \frac{2}{k+1}\int_{0}^{+\infty}\frac{f_2(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2+h^2}\right], x<0 \\ g_2(x) &= \frac{h}{\pi}\left[\frac{2k}{k+1}\int_{-\infty}^{0}\frac{f_1(\xi)d\xi}{(x-\xi)^2+h^2} + \int_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-\xi)^2+h^2} - \frac{k-1}{k+1}\frac{1}{(x+\xi)^2+h^2}\right) f_2(\xi)d\xi\right], x>0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Для розв'язання сепаратної системи інтегральних рівнянь (13) визначимо пряме F і обернене F^{-1} [7] інтегральні перетворення Фур'є на осі з однією точкою спряження за таким правилом:

$$\tilde{g}(\lambda) = F[g_1, g_2] = \frac{h}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{k+1}{2}\frac{1}{(\lambda+\xi)^2+h^2} + \frac{k-1}{2}\cdot\frac{1}{(\lambda-\xi)^2+h^2}\right) g_1(\xi)d\xi + \int_{0}^{+\infty}\frac{g_2(\xi)d\xi}{(\lambda+\xi)^2+h^2}\right].$$

Діючи оберненим перетворенням Фур'є, отримаємо функції:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= F^{-1}[\tilde{f}(x)] = \frac{2h}{\pi(k+1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{f}(\lambda)d\lambda}{(x-\lambda)^2+h^2} \qquad x<0, \\ f_2(x) &= F^{-1}[\tilde{f}(x)] = \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-\lambda)^2+h^2} - \frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{(x+\lambda)^2+h^2}\right)\tilde{f}(\lambda)d\lambda \quad x>0, \end{aligned} \tag{14}$$

для яких справедлива основна тотожність інтегрального перетворення Фур'є $F[f_1'', f_2''] = -\lambda^2 F[f_1, f_2]$.

Система (14) є розв'язком сепаратної системи інтегральних рівнянь (13) і задачі (1)–(5). Інтеграли в перетвореннях Фур'є апроксимовані за формулами прямокутників. Знайдений аналітичний розв'язок задачі (1)–(5) носить алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і в прикладних.

Висновки. За результатами проведеного дослідження побудована математична модель зміни характеристик гравітаційного поля на межі двох середовищ, яка дозволяє отримувати відповідні аналітичні розв'язки. Отримання моделі стало можливим завдяки розв'язанню крайової задачі, що враховує неоднорідності розподілу густини речовин на межі стику двох середовищ, на основі застосування математичного апарату інтегральних перетворень.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Напрямами подальших досліджень авторам вбачається побудова алгоритму та програмного додатка, які дозволять за відомими параметрами аналізувати та інтерпретувати отримані результати досліджень.

Список використаної літератури

1. Луцький О. Л. Рекомендації органам управління щодо запровадження сучасних підходів до моніторингу та пошуку підземних комунікацій через державний кордон / О. Л. Луцький. – Честь і закон № 4 (47)/2013. – С. 16–18.

2. Щербаков Г. Н. Обнаружение скрытых объектов для гуманитарного разминирования, криминалистики, археологии, строительства и борьбы с терроризмом / Г. Н. Щербаков. – М. : Арбат-Информ, 2004. – 236 с.

3. Щербаков Г. Н. Параметрическая локация – новый метод обнаружения скрытых объектов / Г. Н. Щербаков // Специальная техника, 2000. – № 4. – С. 52–57.

4. Гринев А. Ю. Вопросы подповерхностной радиолокации / А. Ю. Гринев. – М.: Радиотехника, 2005. – 416 с.

5. Вернигоров Н. С. К вопросу о применении многочастотного сигнала в нелинейной радиолокации / Н. С. Вернигоров, А. Р. Борисов, В. Б. Харин // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 1.

6. Горбачев А. А. Особенности зондирования электромагнитными волнами сред с нелинейными включениями / А. А. Горбачев // Нелинейн. мир. – 2009. – № 7–9.

7. Ленюк М. П. Конечные интегральные преобразования с применением к задачам математической физики : препринт / М. П. Ленюк, Л. М. Трасковецкая // АН УССР. Ин-т математики; 92-12. – К. : 1992. – 64 с.

8. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – СПб. : Лань, 2002. – 688 с.

Боровик О., Трасковецька Л., Боровик Л. **Моделирование изменения характеристик гравитационного поля на границе двух сред**

В работе построена математическая модель изменения характеристик гравитационного поля на границе двух сред, которая позволяет определять соответствующие аналитические решения. Модель получена благодаря решению краевой задачи, учитывающей неоднородности распределения плотности веществ на границе стыка двух сред на основе применения математического аппарата интегральных преобразований.

Ключевые слова: *математическая модель, радар, импульсы сигналов, операторы преобразования функции, преобразования Фурье.*

Borovyk O., Traskavetska L., Borovyk L. **Modeling changes in the characteristics of the gravitational field on the border of two environments**

During the last period in the operational activities of bodies and divisions of the State border service of Ukraine introduced a modern model of border protection. Given the situation in the country at present, and global trends, it is important to gain control over the situation at the state border. Such control implies the control over the movement of persons, vehicles and goods at checkpoints across the state border, and beyond. In the recent period of relevance is the task of finding small objects in opaque media, in General, and the search of underground communications, minelaying in the metallic and non-metallic housings as well as identifying caches, in particular. This motivates the need to study and the introduction of modern technology searches carried out by technical means of border control, which is based on different physical principles.

Of all the known methods of detecting small-size targets, including geocaching, the most effective is the radar method. Instruments based on radar technique (radar) can detect in the soil hiding places, mines, metal and plastic pipes, voids and the like. The specifics of the radar is the use of ultra-wideband signals, which propagate in media with strong attenuation and dispersion. However, despite considerable achievements in the research and development of radar subsurface probing, the problem of ensuring the reliability of the results of sensing is still not completely solved. And the main reason of the comparatively high specific losses in the propagation of electromagnetic wave through a layer pricewelcome heterogeneous environment.

Thus, further study and improve the operation of the radar depends on the possibility of using the results of modeling the propagation of pulses of UWB signals radar on the border of two environments.

In the work a mathematical model of changes in the characteristics of the gravitational field on the border of two environments, which allows to determine the corresponding analytical solution. The model obtained through the solution of a boundary value problem considering the heterogeneity of the distribution of the density of a substance at the boundary interface of two media, based on the application of the mathematical apparatus of integral transforms.

Keywords: *mathematical model, radar, pulse signals, operators, conversion functions, Fourier transform.*