

РАСЧЕТ С УЧЕТОМ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ОБРАЗЦОВ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ИХ РАЗРУШЕНИИ В ВИДЕ УСЕЧЕННЫХ ПИРАМИД

В работе учтено дифференциальное и алгебраическое уравнения равновесия для различных значений коэффициентов контактного трения с учетом его экспериментальной закономерности от нагрузки. Получена удовлетворительная сходимость расчетного предела прочности горных пород образцов при их одноосном сжатии с экспериментальными данными.

У роботі враховано диференціальне та алгебраїчне рівняння рівноваги для різних значень коефіцієнтів контактного тертя з врахуванням його експериментальної закономірності від навантаження. Одержана задовільна збіжність розрахункової межі міцності зразків гірських порід при їх одноосному стисненні з експериментальними даними.

In this work differential and algebraic balance equations are taken into account for different values of coefficients of contact friction taking with a subject to his experimental conformity to the law from loading. The satisfactory convergence of calculated breaking point of the rock strength sample at their uniaxial compression with experimental information is obtained.

В работе [1] разработан метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при постоянном значении контактного касательного напряжения. Однако авторами не учтены дифференциальные уравнения и алгебраическое уравнение равновесия, которые, как известно обязательны для всех точек деформируемого тела.

Для решения поставленной задачи оговорим граничные условия. В качестве исходного объекта возьмем выпуклый вследствие деформирования образец (рис. 1), удовлетворяющий условиям парности касательных напряжений в угловых областях. Сжимающие напряжения принимаем положительными. Знаки касательных напряжений: на верхней левой вертикальной половине – положительные, на верхней правой – отрицательные. На нижних половинах знаки имеют противоположные значения.

Теперь запишем при заданных осях координат дифференциальные уравнения равновесия для плоской деформации [2]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad , \quad (2)$$

где σ_x , σ_y , τ_{xy} – нормальные и касательные напряжения, x , y – координаты.

Присовокупим к этим дифференциальным уравнениям алгебраическое уравнение равновесия [3]

$$\sigma_x = \frac{2(k_n + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} \left(\sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2} \right) + \sigma_y \quad , \quad (3)$$

где k_n – предел сопротивляемости породы сдвигу; μ и ρ – коэффициент и угол

внутреннего трения породы; где $b_a = \frac{\tau_k}{k_n + \mu\sigma_y}$ - параметр трения.

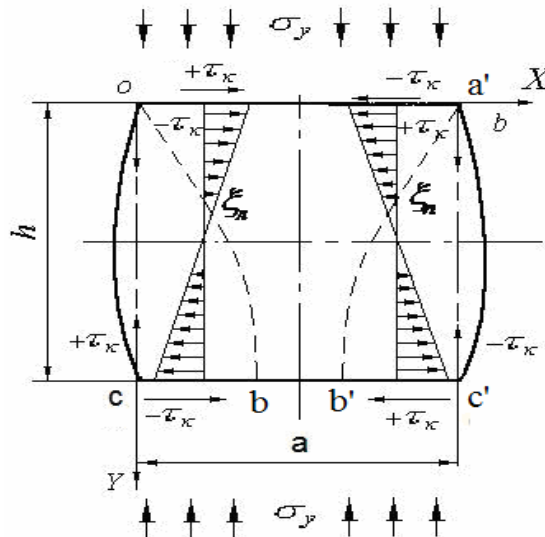


Рис. 1. Схема контактных нагрузок в образце горной породы при наличии внешнего трения

Следует отметить, что у исследователей [2] в смежной области – обработки металлов давлением возникли непреодолимые трудности точного интегрирования дифференциальных уравнений равновесия совместно с условием предельного состояния при наличии трения, вследствие чего они были вынуждены вводить упрощающие предпосылки, в частности, принимать, что нормальные напряжения зависят только от одной из координат. В результате число дифференциальных уравнений сокращается до одного, которое будет содержать простые производные вместо частных. Как правило, задачу решают при предельном значении контактного касательного напряжения τ_k , равного пределу сопротивления материала сдвигу k_n . В этом случае получено соотношение

$$\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{d\sigma_x}{dx}$$

. В области обработки металлов этого достаточно, так они ограничивают свое решение определением максимального контактного удельного усилия деформирования. Проверка на экспериментальных данных таким образом полученного приближенного метода расчета деформирующих усилий подтвердила его вполне удовлетворительную практическую точность. Поскольку нас интересует связь между напряжениями внутри материала, т.е. при изменении касательных напряжений τ_k по мере удаления от контактной поверхности для построения в последующем запредельных кривых разрушения возникает необходимость определения упомянутого соотношения не только на контактной поверхности, но и внутри тела, при этом когда $\tau_k < k_n$.

Касательные напряжения τ_{xy} по мере удаления от каждой контактных поверхностей по абсолютной величине уменьшаются и при $y=0,5$ обращается в нуль, как на оси симметрии. Допустим, что напряжения τ_{xy} является линейной функцией оси y , т.е.

$$\tau_{xy} = \tau_{\kappa} \left(1 - \frac{2Y}{h}\right) \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = -\frac{2\tau_{\kappa}}{h} \quad (5)$$

Теперь найдем связь между производными $\frac{d\sigma_y}{dx}$ и $\frac{d\sigma_x}{dx}$ при любых соотношениях τ_{xy} . Для этого продифференцируем выражение (3) по x

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \left[\frac{2\mu}{\cos\rho} \left(\sin\rho - \sqrt{1-b_a^2} \right) + 1 \right] \frac{d\sigma_y}{dx} + \frac{2(k_n + \mu\sigma_y) \cdot b_a}{\cos\rho \sqrt{1-b_a^2}} \cdot \frac{db_a}{dx}, \quad (6)$$

$$b_a = \frac{f\sigma_y}{k_n + \mu\sigma_y}$$

где параметр

Производная от b_a по x равна

$$\frac{db_a}{dx} = \frac{f - \mu b_a}{k_n + \mu\sigma_y} \cdot \frac{d\sigma_y}{dx \cdot h} \quad (7)$$

Тогда выражение (6) будет иметь окончательный вид

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \left(1 + 2\mu^2 + \frac{2bf - 2\mu}{\cos\rho \cdot \sqrt{1-b_a^2}} \right) \frac{d\sigma_y}{dx \cdot h}$$

Обозначим выражение в больших скобках через u . Тогда

$$\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{d\sigma_x}{dx} \quad (8)$$

Используя первое дифференциальное уравнение (1) и выражения (5) и (8), имеем

$$\frac{d\sigma_y}{dx} = \frac{2\tau_{\kappa}}{uh} \quad (9)$$

Из решения уравнения (9) имеем

$$\sigma_y = \frac{2\tau_{\kappa}}{u \cdot h} \cdot x + c$$

Учитывая, что при $x=0$ постоянная интегрирования $c = \sigma_{y0}$, получаем

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + \frac{2\tau_k}{u \cdot h} \cdot x$$

Теперь следует определиться с описанием значения τ_k .

По этому поводу многие специалисты [2] в области обработки металлов пишут, что при увеличении предельного давления деформация контактной поверхности необратимо приближающая действительную площадь к номинальной обуславливает потерю линейной зависимости сил трения от нормальной нагрузки. Поэтому ряд исследователей рекомендовали принимать трение независимым от нормальной нагрузки, а коэффициент контактного трения f принимать по пределу прочности, равным f_s .

$$\tau_k = f_s \cdot \sigma_{y0} \quad (10)$$

Тогда

$$\sigma_y = \sigma_{y0} (1 + 2f_s \cdot x / (u \cdot h)) \quad (11)$$

На рис. 2 представлены эпюры контактных касательных по уравнениям (10) и (11) нормальных напряжений.

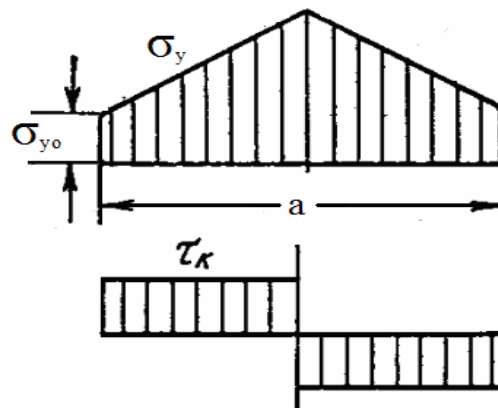


Рис.2. Эпюры контактных нормальных и касательных напряжений

Суммируя нормальные напряжения на контактной поверхности на единицу ширины образца, находим полное давление. Разделив полученное значение на длину образца, находим удельное давление – предел прочности

$$P = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{f_s \cdot a}{2h \cdot u} \right) \quad (12)$$

Определение в работе [1] нормальных напряжений σ_{y0} осуществляют с использованием критерия Кулона

$$\tau_{эф} = \tau_\alpha - \mu \sigma_\alpha, \quad (13)$$

где $\tau_{эф}$ - эффективное касательное напряжение на наклонной площадке по траектории максимальных касательных напряжений (линии скольжения);

μ - коэффициент внутреннего трения;

σ_α - нормальное напряжение на наклонной площадке по линии скольжения ξ_l (рис. 1).

При $\tau_{эф} \geq k_n$ (сопротивление сдвигу) с учетом выражения (13) получим дифференциальное выражение по типу известного в теории пластичности уравнения Генки [2].

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \cdot (k_n + \mu\sigma_\alpha) \quad (14)$$

где α - угол наклона линии скольжения на которой эффективные касательные напряжения имеют максимальные значения;

Решение уравнения (14) сводится к решению интеграла на линии скольжения ξ между точками а и б.

$$\int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} \frac{d(k_n + \mu\sigma_\alpha)}{\mu} = 2 \int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} d\alpha. \quad (15)$$

Подробное решение интеграла дано в работе [1]. Приведем некоторые фрагменты этого решения.

Нормальное решение в точке а будет:

$$\sigma_{\alpha_a} = \sigma_{y_0} (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}) - k_n \cos \rho \sqrt{1 - b_a^2}, \quad (16)$$

а в точке б –

$$\sigma_{\alpha_b} = k_b \cos \rho \sqrt{1 - b_b^2} \quad (17)$$

где ρ - угол внутреннего трения, равный $\rho = \arctg \mu$;

$$b_a = \frac{f\sigma_{y_0}}{(k_n + \mu\sigma_{y_0})}, \quad b_b = \frac{f\sigma_{y_0}}{(k_b + \mu\sigma_{y_0})}.$$

Угол α в точке а

$$\alpha_a = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta_a,$$

а в точке б

$$\alpha_b = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta_b,$$

где β_a и β_b - углы поворота линии скольжения от внешнего трения в точках а и б.

$$\text{Угол } \beta_a = \frac{1}{2} \arctg \frac{b_a \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2}}, \quad \text{Угол } \beta_b = -\frac{1}{2} \arctg \frac{b_b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_b^2}}.$$

Общий угол поворота линии скольжения между точками а и б с учетом знаков β_a и β_b будет

$$\alpha_{ab} = \beta_a + \beta_b \quad (18)$$

Тогда, решая интеграл (15), имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{y_0} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{k_n \cdot (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}) \cdot e^{2\mu(\beta_a + \beta_b)}}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}} - k_b \right] \\ k_b &= \frac{(k_n + \mu \sigma_{y_0})(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2})}{(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}) \cdot e^{2\mu(2\beta_b)}} \end{aligned} \right. \quad (19)$$

С учетом распределения нормальных напряжений на контактной плоскости находим удельное давление, фиксируемое на прессе при раздавливании образцов горных пород при одноосном нагружении согласно (12).

$$P = \frac{1}{\mu} \left[\frac{k_n \cdot (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}) \cdot e^{2\mu(\beta_a + \beta_b)}}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}} - k_b \right] \cdot \left(1 + \frac{f_s \cdot a}{2h \cdot u} \right) \quad (20)$$

Теперь проведем сопоставление расчетных результатов при различных значениях коэффициентов внешнего и внутреннего трения с экспериментальными данными, которые позаимствованы из кадастра [4], и сведем их в таблицу 1.

Таблица 1

Сравнение расчетных значений предела прочности с экспериментальными данными

Порода	$P_{\text{эксп}}$, мПа	K , мПа	ρ , град.	μ	$P_{\text{расч}}$ при $f_s=0,15$ мПа	Ошибка при $f_s=0,15$ %	$P_{\text{расч}}$ при $f_s=0,25$ мПа	Ошибка при $f_s=0,25$ %
Роговик	1380	2,5	39	0,809	1489	7,32	1651	16,41
Руда гранат - магнетит	1170	2,2	40	0,839	1350	13,3	1496	21,79
Руда эпидот-магнетит	960	1,0	45	1,00	720	25	795	17,18
Скарн гранатовый	1120	2,0	39	0,809	1192	6,04	1321	15,21
Скарн гранат магнетитовый	970	1,5	42	0,90	979	0,9	1083	10,43
Скарн магнетит гранатовый	680	1,00	39	0,809	596	12,35	661	2,79

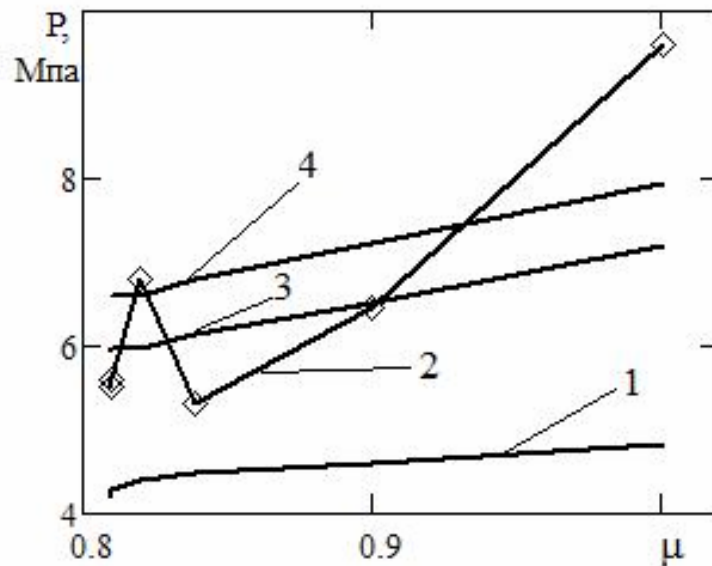


Рис.3. Зависимости предела прочности образцов горных пород (P) при $k=1.0$ от коэффициента внутреннего трения (μ):

1- $f_s=0$; 2- экспериментальная кривая; 3- $f_s=0.15$; 4- $f_s=0.25$

Выводы:

На основании полученной зависимости можно сделать вывод о линейном возрастании предела прочности образцов горных пород от коэффициента трения в пределе $\mu=0,8 \div 1$. Сходимость расчетных результатов с экспериментальными данными при внешнем трении $f_s = 0,15$ составляет 10,81%, при $f_s = 0,25$ - 13,96 %.

Однако следует оговориться, что линейность этих зависимостей при других значениях коэффициентов внутреннего и внешнего трения нарушается, и формы разрушения имеет другие виды: продольного разрушения, пирамид без усечения и спонтанного саморазрушения, что является предметом следующих публикаций.

Список литературы

1. Васильев Л.М. Метод расчета предела прочности при трехосном сжатии образцов горных пород и постоянном значении контактных касательных напряжений. / Л.М. Васильев, Д.Л. Васильев, Р.Н. Наривский, А.А. Потапенко // Геотехническая механика. Межвед сб. научн. тр. – Днепропетровск, 2009. – Вып. 82. – С. 9-17.
2. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
3. Васильев Д.Л. Закономерности формирования горизонтальных нормальных напряжений в массиве горных пород / Васильев Д.Л. // Геотехническая механика. Межвед сб. научн. тр. – Днепропетровск, 2001. – Вып. 29. – С. 17-21.
4. Мельников Н.В., Ржевский В.В., Протодьяконов М.М. Справочник (кадастр) физических свойств горных пород. – М., «Недра», 1975. – 279 с.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Симановичем Г.А.
Надійшла до редакції 05.11.10*