УДК 539.3

© Т.С. Кагадий, А.Г. Шпорта

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ

В статье приведены точные решения, полученные в замкнутой форме для четырех задач о напряженно-деформируемом состоянии ортотропной пластины с цилиндрической анизотропией.

У статті наведені точні розв’язки, що отримані у замкненій формі для чотирьох задач про напружено-деформований стан ортотропної пластини з циліндричною анізотропією.

The exact decisions received in the closed form for four tasks about an intense-deformable condition of an orthotropic plate with cylindrical anisotropy are resulted in the article.

Решения краевых задач с учетом анизотропии упругой среды сопряжено с дополнительными трудностями. В случае прямолинейной анизотропии приходится рассматривать пару связанных аналитических функций, зависящих от различных комплексных переменных [1]. Для среды с криволинейной анизотропией непосредственное применение методов теории аналитических функций вообще оказывается невозможным.

Эти трудности удается преодолеть в некоторых специальных случаях (малая анизотропия, специальный закон изменения упругих свойств и т. п.), причем соответствующая задача для изотропной среды считается обычно эталоном простоты. В задачах 3 и 4 решения получены с помощью методов возмущения [2].

Преимущество предложенного подхода состоит в том, что исходная задача сводится к последовательному решению задач теории потенциала, учитывается любая степень анизотропии материала.

1. Рассматривается пластина, ослабленная круговым отверстием радиуса $R$, со свободной границей либо с жестким подкреплением и подвергается осевому растяжению на бесконечности усилиями интенсивности $p_1$ и $p_2$. Уравнения равновесия в полярных координатах удовлетворяются, если ввести функцию напряжений $F(r,\theta)$:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}; \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \; \tau_{r\theta} = -\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{F}{r}\right).$$

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений, для пластины с цилиндрической ортотропией, записывается в виде [1]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} - 4\frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} + 5\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial F}{\partial \xi} + a\frac{\partial^4 F}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - 2a\frac{\partial^3 F}{\partial \xi \partial \eta^2} + q\frac{\partial^4 F}{\partial \eta^4} -$$

$$-q\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + 2q\frac{\partial F}{\partial \xi} + a\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2q\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0, \; a = q\varepsilon^{-1}\left(1 - \nu_{1_1}^2 q - 2\nu_1 \varepsilon\right);$$

$$\sigma_{11} = e^{-2\xi}\frac{\partial F}{\partial \xi} + e^{-2\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \; \sigma_{22} = e^{-2\xi}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + e^{-2\xi}\frac{\partial F}{\partial \xi},$$

$$\tau = -\left( e^{-2\xi} \frac{\partial^2 F}{\partial\xi\partial\eta} + e^{-2\xi} \frac{\partial F}{\partial\eta} \right), \; (\sigma_{11} = \sigma_r, \sigma_{22} = \sigma_\theta, \tau_{r\theta} = \tau) \tag{1}$$

Здесь

$$q = \frac{E_\theta}{E_r}, \; \varepsilon = \frac{G_{r\theta}}{E_r/(1-\nu_1\nu_2)}, \; \nu_1 = \nu_r, \; \nu_2 = \nu_1 q, \; r = R\cdot e^{\xi}, \; \xi = \ln\left(\frac{r}{R}\right), \; \theta = \eta .$$

В сплошной пластине без отверстия:

$$\sigma_{11}^0 = \frac{p_1+p_2}{2} + \frac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta ; \; \sigma_{22}^0 = \frac{p_1+p_2}{2} - \frac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta ;$$

$$\tau^0 = -\frac{p_1-p_2}{2}\sin 2\eta . \tag{2}$$

Образование отверстия в пластине равносильно приложению к точкам воображаемого контура напряжений $\sigma_{11} = -\sigma_{11}^0$, $\tau = -\tau_0$. Действие нормальных и касательных напряжений приводит к возникновению второго поля напряжений. Полное решение задачи с отверстием состоит из сумы решения (2) и указанного второго поля напряжений. Для определения второго поля напряжений необходимо рассмотреть задачу, когда контур отверстия ($\xi = 0$) нагружен нормальными и касательными напряжениями, на бесконечности напряжения равны нулю, т.е. граничные условия имеют вид:

$$\text{при } \xi = 0 \; \sigma_{11} = -\frac{p_1+p_2}{2} - \frac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta , \; \tau = \frac{p_1-p_2}{2}\sin 2\eta ,$$

$$\text{при } \xi \to \infty \; \sigma_{11} \to 0 , \; \tau \to 0 \tag{3}$$

Граничные условия (3) могут быть разбиты на две части:

$\sigma_{11}^{(1)} = -\dfrac{p_1+p_2}{2}$, $\tau = 0$ (часть, которая не зависит от координаты $\eta$)

$\sigma_{11}^{(2)} = -\dfrac{p_1-p_2}{2}\cos 2\eta$, $\tau = \dfrac{p_1-p_2}{2}\sin 2\eta$ (зависит от координаты $\eta$).

Полное решение поставленной задачи состоит из суперпозиции решений для первой и второй части граничных условий и имеет вид:

$$\sigma_{11} = \frac{p_1+p_2}{2}\left(1 - e^{-\left(1+\sqrt{q}\right)\xi}\right) + \frac{p_1-p_2}{2}\left[1 - \frac{\left(3+\sqrt{t_1}\right)\left(1+\sqrt{t_2}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)} e^{-\left(1+\sqrt{t_1}\right)\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(3+\sqrt{t_2}\right)\left(1+\sqrt{t_1}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)} e^{-\left(1+\sqrt{t_2}\right)\xi} \right]\cos 2\eta ; \tag{4}$$

$$\sigma_{22} = \frac{p_1+p_2}{2}\left(1 + \sqrt{q}e^{-\left(1+\sqrt{q}\right)\xi}\right) - \frac{p_1-p_2}{2}\left[1 + \frac{\sqrt{t_1}\left(1-\sqrt{t_1}\right)\left(1+\sqrt{t_2}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)} e^{-\left(1+\sqrt{t_1}\right)\xi} + \right.$$

$$+\frac{\sqrt{t_2}\left(\sqrt{t_2}-1\right)\left(1+\sqrt{t_1}\right)}{2\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_2}\right)\xi}\Bigg]\cos 2\eta;$$

$$\tau=-\frac{p_1-p_2}{2}\left[1+\frac{\sqrt{t_1}\left(1+\sqrt{t_2}\right)}{\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_1}\right)\xi}-\frac{\sqrt{t_2}\left(1+\sqrt{t_1}\right)}{\left(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\right)}e^{-\left(1+\sqrt{t_2}\right)\xi}\right]\sin 2\eta,$$

где $t_1=(1+2a)-\sqrt{(1+2a)^2-9}$, $t_2=(1+2a)+\sqrt{(1+2a)^2-9}$

В случае изотропной пластины ($q=1$, $\varepsilon=\frac{1-\nu}{2}$, $a=2$, $t_1=1$, $t_2=9$) решение (4) переходит в известное решение аналогичной задачи.

2. Рассмотрим случай, когда контур отверстия в пластине подкреплен жестким кольцом (бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности $p_1$ и $p_2$). В сплошной пластине кроме соотношений (2) имеют место выражения:

$$U_1^0=\frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2}+\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta\right],$$

$$U_2^0=\frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta+\frac{p_1-p_2}{2}\frac{1+q^{-1}+2\nu_1}{2}\sin 2\eta\right] \qquad (5)$$

В (5) отброшены функции, появляющиеся при интегрировании.

В пластине с жестким кольцом на контуре отверстия $R(\xi=0)$ отсутствуют смещения $U_1$ и $U_2$, т.е. образование отверстия, подкрепленного жестким кольцом в пластине равносильно приложению к точкам воображаемого контура перемещений $U_1=-U_1^0$ и $U_2=-U_2^0$. Действие $U_1$ и $U_2$ приводит к появлению второго поля смещений. Полное решение задачи с отверстием состоит из сумы решения (5) и указанного второго поля смещений. Для определения второго поля смещений необходимо рассмотреть задачу, когда на контуре отверстия ($\xi=0$) заданы перемещения $U_1$ и $U_2$, на бесконечности смещения равны нулю, т.е. граничные условия имеют вид:

при $\xi=0$, $U_1=-\frac{R}{E_1}\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2}-\frac{R}{E_1}\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta$,

$$U_2=-\frac{R}{E_1}\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta+\frac{R}{E_1}\frac{(p_1-p_2)\left(1+q^{-1}+2\nu_1\right)}{4}\sin 2\eta, \qquad (6)$$

при $\xi\to\infty$ $U_1\to 0$, $U_2\to 0$.

Граничные условия (6) могут быть разбиты на две части:

$$U_1=-\frac{R}{E_1}\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2},\ U_2=-\frac{R}{E_1}\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta;$$

$$U_1=-\frac{R}{E_1}\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta,\ U_2=\frac{R}{E_1}\frac{(p_1-p_2)\left(1+q^{-1}+2\nu_1\right)}{4}\sin 2\eta$$

Полное решение поставленной задачи имеет вид:

$$U_1=\frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{(1-\nu_1)(p_1+p_2)}{2}+\frac{(1+\nu_1)(p_1-p_2)}{2}\cos 2\eta\right]+$$

$$+\frac{Rq^{-1}(m\varepsilon+\varepsilon+\nu_1 q)}{E_1}\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\sqrt{q}\xi}-$$

$$-\frac{Rq^{-1}(m\varepsilon+\varepsilon+q)}{E_1}\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\xi}+\frac{1}{E_1}\left[\frac{4-(1-t_1)\left(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_1}\right)}{\sqrt{t_1}}C_1e^{-\sqrt{t_1}\xi}+\right.$$

$$\left.+\frac{4-\left(1-\sqrt{t_2}\right)\left(1-2\nu_1+\nu_1\sqrt{t_2}\right)}{\sqrt{t_2}}C_3e^{-\sqrt{t_2}\xi}\right]\cos 2\eta;$$

$$U_2=\frac{\mathrm{Re}^{\xi}}{E_1}\left[\frac{\left(q^{-1}-1\right)(p_1+p_2)}{2}\eta-\frac{p_1-p_2}{2}\frac{1+q^{-1}+2\nu_1}{2}\sin 2\eta\right]-$$

$$-\frac{R\left(q^{-1}-1\right)}{E_1}\frac{p_1+p_2}{2}e^{-\xi}\eta+\frac{1}{E_1}\left[\frac{4\left(\nu_1\sqrt{t_2}-1\right)-\left(1-\sqrt{t_2}\right)\left(q^{-1}t_2-1+2\nu_1\right)}{2\sqrt{t_2}}C_3e^{-\sqrt{t_2}\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{4\left(1-\nu_1\sqrt{t_1}\right)+\left(1-\sqrt{t_1}\right)\left(q^{-1}t_1-1+2\nu_1\right)}{2\sqrt{t_1}}C_1e^{-\sqrt{t_1}\xi}\right]\sin 2\eta;$$

$$\sigma_{11}=E_*(e_{11}+\nu_1 q e_{22});\ \sigma_{22}=E_*q(e_{22}+\nu_1 e_{11});\ \tau=Ge_{12};$$

$$e_{11}=\frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\xi}\right);\ e_{22}=\frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\eta}+U_1\right);\ e_{12}=\frac{e^{-\xi}}{R}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\xi}+\frac{\partial U_1}{\partial\eta}-U_2\right).$$

Проведены сравнения результатов с известными точными решениями, в частности, для изотропного материала.

3. Пластина ослаблена эллиптическим отверстием со свободной границей ина бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности $p_1$ и $p_2$.

Функция $\omega(\zeta)=R\left(\zeta+c\zeta^{-1}\right)$. Тогда $x=R\left(e^{\xi}+ce^{-\xi}\right)\cos\eta$, $y=R\left(e^{\xi}-ce^{-\xi}\right)\sin\eta$, $H=R\left(e^{2\xi}-2c\cdot\cos 2\eta+c^2e^{-2\xi}\right)^{\frac{1}{2}}$. Здесь $R=\frac{1}{2}a\left(1+\frac{b}{a}\right)$, $c=\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-1}$, $a,b$ – полуоси эллиптического отверстия.

В пластине без отверстия

$$\sigma_{11}^{0}=\left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}(p_1+p_2)\left(e^{4\xi}+c^2\right)-c(p_1-p_2)e^{2\xi}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}(p_1-p_2)\left(e^{4\xi}+c^2\right)-c(p_1+p_2)e^{2\xi}\right)\cos\eta\right],$$

$$\sigma_{22}^{0}=\left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\left[\frac{1}{2}(p_1+p_2)\left(e^{4\xi}+c^2\right)+c(p_1-p_2)e^{2\xi}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}(p_1-p_2)\left(e^{4\xi}+c^2\right)+c(p_1+p_2)e^{2\xi}\right)\cos\eta\right],$$

$$\sigma_{12}^{0}=-\frac{1}{2}(p_1-p_2)\left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\cdot\left(e^{4\xi}-c^2\right)\sin 2\eta .$$

Квазиосесимметричное решение

$$\sigma_{11}=-\sigma_{22}=-\frac{1}{2}\left(e^{4\xi}-2ce^{2\xi}\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\left[p_1(1-c)^2+p_2(1+c)^2\right]e^{2\xi},\ \sigma_{12}=0 .$$

Решение задачи с граничными условиями

$$\sigma_{11}=-\frac{1}{2}\left(1-2c\cdot\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\left[p_1(1-c)^2-p_2(1+c)^2\right]\cos 2\eta ,$$

$$\sigma_{12}=\frac{1}{2}(p_1-p_2)\left(1-2c\cdot\cos 2\eta+c^2\right)^{-1}\cdot(1-c)^2\sin 2\eta,\quad (\xi=0),$$

$\sigma_{11}\to 0$, $\sigma_{12}\to 0$, $(\xi\to\infty)$ разыскивается методом возмущений [2]. При этом предполагается, что $\frac{b}{a}=1-\chi\varepsilon \quad (\chi\sim 1)$, $R=a\left(1-\frac{1}{2}\chi\varepsilon\right)$, $c=x\varepsilon(2-x\varepsilon)^{-1}$.

Тогда ряды метода принимают вид:

$$H=ae^{\xi}-\frac{1}{2}a\chi e^{\xi}\left(1+e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon+0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$f_1=1+\left(\chi e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon+0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],\ f_2=\left(\chi e^{-2\xi}\sin 2\eta\right)\varepsilon+0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$f_3=\left(-2\chi e^{-2\xi}\cos 2\eta\right)\varepsilon+0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],\ f_4=\left(-2\chi e^{-2\xi}\sin 2\eta\right)\varepsilon+0\left[(\chi\varepsilon)^2\right];$$

$$\psi_1(\eta) = -\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\cos 2\eta + \frac{1}{2}\chi\Big[(p_1 + p_2)\cos 2\eta -$$

$$(p_1 - p_2)\cos^2 2\eta\Big]\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right],$$

$$\psi_2(\eta) = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)\left(\sin 2\eta + (\chi \sin 2\eta \cos 2\eta)\varepsilon + 0\left[(\chi\varepsilon)^2\right]\right),\ \eta_1 = \eta_2 = 2\eta.$$

Приведем окончательную формулу для определения напряжений $\sigma_{22}$, действующих на площадках, нормальных к контуру эллиптического отверстия $(\xi = 0)$, которые представляют наибольший интерес. Напряжения $\sigma_{11}$, $\sigma_{12}$ на контуре равны нулю.

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}\left(1 - 2c\cdot\cos 2\eta + c^2\right)^{-1}\left(2\left(1 + c^2\right)(p_1 + p_2) - \Big[p_1(1 + c)^2 -\right.$$

$$\left. -p_2(1 - c)^2\Big]\cos 2\eta\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1 - p_2)\cos 2\eta - \varepsilon\left\{\frac{1}{2}(p_1 - p_2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cos 2\eta -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\chi\left[(p_1 + p_2)\cos 2\eta - \frac{1}{4}\left(1 + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1 - p_2)(1 + 2\cos 4\eta)\right]\right\} + 0\left(\varepsilon^2\right), \qquad (1)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0.$$

Если $c = 0$ $(\chi = 0)$, то (1) переходит в решение соответствующей задачи для пластины с круговым отверстием.

Сравнение $(\sigma_{22})_{max}$, вычисленного по формуле (1) для изотропной пластины с учетом первых двух приближений, с точным решением [3] показывает, что, например, при $\frac{b}{a} = 0,65$ погрешность для различных случаев нагружения не превышает 5-10%.

4. Рассмотрим анизотропную пластину, ослабленную гипотрохоидным отверстием, которая на бесконечности подвергается осевому растяжению усилиями интенсивности $p_1$ и $p_2$.

Здесь $\omega(\zeta) = R\left(\zeta + ck^{-1}\zeta^{-k}\right)(0 < c < 1), x = R\left(e^{\xi}\cos\eta + ck^{-1}e^{-k\xi}\cos k\eta\right)$,

$$y = R\left(e^{\xi}\sin\eta - ck^{-1}e^{-k\xi}\sin k\eta\right), H = R\left(e^{2\xi} - 2ce^{-(k-1)\xi}\cos(k+1)\eta + c^2e^{-2k\xi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $k = 1$ возвращаемся к случаю эллипса, при целых $k > 1$ получаем кривые, представляющие собой правильные криволинейные многоугольники со скругленными углами: треугольник при $k = 2$, квадрат при $k = 3$ и т.д.

На контуре отверстия

$$\sigma_{22}=\frac{1}{2}\left(1-2c\cdot\cos(k+1)\eta+c^2\right)^{-1}\left(2\left(1+c^2\right)(p_1+p_2)-(p_1-p_2)\cos 2\eta+\right.$$

$$\left.+2c(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-2c(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta-c^2(p_1-p_2)\cos 2k\eta\right]- \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1-p_2)\cos 2\eta-\varepsilon\left\{\frac{1}{2}(p_1-p_2)\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\cos 2\eta+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\chi\left[\left(2\varepsilon^{-\frac{1}{2}}-1\right)(p_1-p_2)\cos(k-1)\eta-2(p_1+p_2)\cos(k+1)\eta+\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)(p_1-p_2)\cos(k+3)\eta\right]\right\}+0\left(\varepsilon^2\right),\quad (k=2,3,...).$$

При решении задачи предложенным методом предполагалось, что $c=\chi\varepsilon\ (\chi\sim 1)$.

Для изотропной пластинки имеется возможность провести сравнение полученного решения с точным. Погрешность при вычислении $(\sigma_{22})_{\max}$ (в частности, при $k=3$, $c=\frac{1}{3}$) по формуле (2) с учетом первых двух приближений даже в этом, неблагоприятном с точки зрения применяемого метода, случае не превышает 5-10% при различных видах нагружения.

Таким образом, предложенный метод может быть с успехом применен в исследовании краевых задач теории упругости для изотропных пластин.

Список литературы

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела/ С.Г. Лехницкий.– М.: Наука, 1977.- 416 с.
2. Маневич Л.И. Асимптотический метод в теории упругости ортотропного тела/ Л.И. Маневич, А.В. Павленко, С.Г. Коблик.-К.:Вища школа, 1991.-131с.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости/ Н.И. Мусхелишвили.-М.: Наука, 1966.-708с.

*Рекомендовано до публікації д.т.н. Сдвіжковою О.А..*
*Надійшла до редакції 10.03.2013*