УДК 519.8

© А.П. Череватенко

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РАЗБИЕНИЯ НЕВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

© A. Cherevatenko

IMPLEMENTATION FEATURES OF ALGORITHMS FOR SOLVING CONTINUOUS PROBLEMS OF OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITIONING OF NONCONVEX SETS

Представлен численный алгоритм решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями и неизвестными координатами центров. Рассмотрены особенности его реализации в том случае, когда разбиваемое множество является невыпуклым или содержит запрещенные зоны. Приведены результаты применения разработанного аппарата для решения тестовых задач.

Представлений чисельний алгоритм розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями і невідомими координатами центрів. Розглянуто особливості його реалізації у тому випадку, коли множина, що підлягає розбиттю, є неопуклою або містить заборонені зони. Наведено результати застосування розробленого апарату для вирішення тестових задач.

Введение. Под задачами разбиения множеств из пространства E_n на подмножества, каждое из которых охватывает точки, имеющие один и тот же набор k ближайших точек (центров) из N выделенных, понимают непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств [1-4]. При этом координаты центров могут быть или известными заранее, или подлежать определению наряду с разбиением. Очевидно, что $k < N$.

Условия разрешимости задач оптимального мультиплексного разбиения множеств (ОМРМ) с ограничениями, при которых класс допустимых разбиений не пуст, доказаны в работе [1]. В [2, 3] описаны методы решения непрерывных линейных задач ОМРМ как без ограничений, так и для случая ограниченных «мощностей» центров. Оптимальное решение указанных задач получено аналитически в виде характеристических функций подмножеств k -го порядка, составляющих оптимальное разбиение заданного множества. Обоснование выбора критерия оптимальности мультиплексного разбиения представлено в работе [4] и обусловлено спецификой самих центров.

Следует отметить, что множество, подлежащее разбиению в представленных ранее модельных примерах решения задач ОМРМ, обладало свойством выпуклости. Целью данной работы является разработка численного алгоритма решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств, а также исследование особенностей его реализации на случай сложной (невыпуклой) формы множества.

Для этого представим общую математическую постановку непрерывной задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств, в которой наряду с разбиением необходимо найти неизвестные координаты центров с учетом их «мощностей».

Математическая постановка непрерывной задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями и размещением центров

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу, замкнутое множество из пространства E_n; $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right) \in \Omega$, для всех $i = \overline{1,N}$, – некоторые точки, называемые «центрами», координаты которых могут быть заранее неизвестны и подлежать определению, $\tau^N = \left(\tau_1,...,\tau_N\right) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N$.

Введем следующие обозначения: $\mathrm{N} = \{1, 2, ..., N\}$ – набор всех индексов центров; $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ – множество всех k-элементных подмножеств множества N, $\left|\mathrm{M}(\mathrm{N},k)\right| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, ..., j_k^l\}$, $l = \overline{1,L}$, – элементы множества $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$. С каждым элементом σ_l множества $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ будем ассоциировать некоторое подмножество Ω_{σ_l} точек из Ω, $l = \overline{1,L}$, а с подмножеством Ω_{σ_l} будем связывать набор центров $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, ..., \tau_{j_k^l}\}$.

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$ из $\Omega \subset E_n$ называют разбиением k-го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$, если

$$\bigcup_{l=1}^{L} \Omega_{\sigma_l} = \Omega,\ \mathrm{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \bigcap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0,\ \sigma_i, \sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k),\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,L},$$

где $\mathrm{mes}(\cdot)$ означает меру Лебега. Подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$ множества Ω называются подмножествами k-го порядка множества Ω.

Пусть $\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ – класс всех возможных разбиений k-го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \ldots \Omega_{\sigma_L}$:

$$\Sigma_{\Omega}^{N,k} = \left\{\bar{\omega} = \left\{\Omega_{\sigma_1}, \ldots, \Omega_{\sigma_L}\right\} :\ \bigcup_{l=1}^{L} \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \mathrm{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \bigcap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0,\right.$$

$$\left.\sigma_i, \sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k), i \neq j, i, j = \overline{1,L}\right\}.$$

Непрерывная задача оптимального мультиплексного разбиения k-го порядка множества $\Omega \subset E_n$ при ограничениях с размещением центров формулируется следующим образом [1].

Задача А-k. $$F(\bar{\omega},\tau^N)\to \min_{\substack{\bar{\omega}\in\Sigma_{\Omega}^{N,k}\\ \tau^N\in\Omega^N}},$$

$$\sum_{\substack{l=1\\ l:\, i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx=b_i,\quad i=\overline{1,p},\qquad \sum_{\substack{l=1\\ l:\, i\in\sigma_l}}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\gamma_i^l\rho(x)dx\le b_i,\quad i=\overline{p+1,N}. \quad (1)$$

Здесь $x=\left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)\in\Omega$; функция $\rho(x)$ − ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве Ω. Коэффициенты γ_j^l в левых частях ограничений таковы, что для всех $j=\overline{1,N}$, $\sigma_l=\{j_1^l,j_2^l,...,j_k^l\}$, $l=\overline{1,L}$ имеют место соотношения:

$$0\le\gamma_j^l\le 1,\ \gamma_{j_1^l}^l+\gamma_{j_2^l}^l+...+\gamma_{j_k^l}^l=1.$$

Примеры задания функционала F подробно рассмотрены в работе [4]. Для наглядности далее в работе введем в рассмотрение линейный критерий качества разбиения:

$$F(\bar{\omega},\tau^N)=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x)dx,$$

где $c\left(x,\tau_i\right)$, $i=\overline{1,N}$ − ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega\times\Omega$ функции, измеримые по аргументу x при любом фиксированном векторе $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)$; $w_i>0, a_i\ge 0, b_i\ge 0, i=\overline{1,N}$, − заданные числа.

Пара $\left(\bar{\omega}^*,\tau^{N*}\right)$, доставляющая минимальное значение функционалу F и удовлетворяющая ограничениям (1), называется оптимальным решением задачи **А-**k.

Численный алгоритм решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств *n*-мерного евклидова пространства

Метод решения рассмотренной задачи подробно описан в [3]. Там же показано, что решение исходной задачи **А-**k сводится к решению задачи, в которой неизвестным параметром является характеристическая вектор-функция подмножеств, составляющих разбиение k-го порядка множества Ω.

Задача В-k. Найти $$\min_{(\lambda(\cdot),\tau^N)\in\Gamma^k\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau^N),$$

$$I(\lambda(\cdot),\tau^N)=\int_{\Omega}\sum_{l=1}^{L}\left(\sum_{i=1}^{N}(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i)\lambda_i^l(x)\right)\rho(x)dx,$$

$$\Gamma^k = \Big\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_0^k\,, \quad \int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{L} \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}\,,$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{L} \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \le b_i, \quad i = \overline{p+1, N} \Big\}\,;$$

$$\Gamma_0^k = \Big\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), ..., \lambda_N^l(\cdot)) : \lambda_i^l(x) = 0 \vee 1 \text{ для всех } x \in \Omega, i = \overline{1,N},\ l = \overline{1,L},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^l(x) = k, l = \overline{1,L}, \text{ п.в. для } x \in \Omega \Big\}.$$

Теорема 1. Оптимальное решение задачи **B-**k имеет следующий вид [3]: для $i = \overline{1,N}, l = \overline{1,L}$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } c(x, \tau_{*i}) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i^* \le c(x, \tau_{*j}) / w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j^*, \\ \quad \forall i \in \sigma_l,\ \mathrm{j} \in \mathrm{N} \backslash \sigma_l, \\ 0 \ \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2}$$

в качестве $\tau_1^*, ..., \tau_N^*$, $\psi_1^*, ..., \psi_N^*$ выбирается оптимальное решение следующей задачи конечномерной условной оптимизации:

$$G(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) \to \max\,, \tag{3}$$

при условиях $\psi_i \ge 0, \quad i = \overline{p+1, N},$ с негладкой целевой функцией

$$G_1(\tau^N, \psi) = \int\limits_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in \mathrm{M(N},k) \\ l = \overline{1,L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c\big(x, \tau_i\big) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho\big(x\big) dx - \sum_{i=1}^{N} \psi_i b_i.$$

От задачи условной оптимизации (3) перейдем к задаче безусловной максимизации по переменной ψ, расширив целевую функцию негладкой штрафной функцией множества $\{\psi_i \ge 0, i = m+1, ..., N\}$: $\max\limits_{\psi \in \mathrm{E}_N} \min\limits_{\tau \in \Omega^N} P(\tau^N, \psi)$, где $P(\tau^N, \psi) = G_1(\tau^N, \psi) - Q \sum\limits_{i=p+1}^{N} \max(0, -\psi_i)$, а Q − большое положительное число (значительно большее множителей Лагранжа).

Далее для краткости вектор τ^N будем обозначать просто τ.

Определим i-ю, $i = 1, ..., N$, компоненту $2N$-мерного вектора обобщенного псевдоградиента

$$g_P(\tau, \psi) = \Big(g_P^{\tau}(\tau, \psi), -g_P^{\psi}(\tau, \psi) \Big) =$$

$\Big(g_P^{\tau_1}(\tau, \psi), ..., g_P^{\tau_N}(\tau, \psi), -g_P^{\psi_1}(\tau, \psi), ..., -g_P^{\psi_N}(\tau, \psi) \Big)$ функции $P(\tau^N, \psi)$ в точке $(\tau, \psi) = \big(\tau_1, ..., \tau_N, \psi_1, ..., \psi_N\big)$ следующим образом:

$$g_P^{\psi_i}(\tau,\psi)=\begin{cases}\int\limits_{\Omega}\sum\limits_{l=1}^{L}\gamma_i^l\lambda_i^l(x)\rho(x)dx-b_i, \quad i=1,...,m,\\ \int\limits_{\Omega}\sum\limits_{l=1}^{L}\gamma_i^l\lambda_i^l(x)\rho(x)dx-b_i+Q\max\left(0,\operatorname{sign}(-\psi_i)\right), i=m+1,...,N,\end{cases} \tag{4}$$

$$g_P^{\tau_i}(\tau,\psi)=\int\limits_{\Omega}\sum\limits_{l=1}^{L}[g_c^{\tau_i}(\tau,x)/w_i]\lambda_i^l(x)\rho\left(x\right)dx, \quad i=1,...,N, \tag{5}$$

где $g_c^{\tau_i}(x,\tau)=\left(g_c^{\tau_i^{(1)}}(x,\tau),...,g_c^{\tau_i^{(n)}}(x,\tau)\right)$ – i-я компонента N-мерного вектора обобщенного градиента $g_c^{\tau}(\tau,x)$ функции $c(x,\tau_i)$ в точке $\tau=\left(\tau_1,...,\tau_i,...,\tau_N\right)$ при фиксированном x.

В формулах (4), (5) $\lambda_i^l\left(x\right)$, $i=\overline{1,N}, l=\overline{1,L}$, определяется следующим образом:

$$\lambda_i^l(x)=\begin{cases}1, \text{ если } c(x,\tau_i)/w_i+a_i+\gamma_i^l\psi_i\le c(x,\tau_j)/w_j+a_j+\gamma_j^l\psi_j,\\ \quad \forall i\in\sigma_l, \, \mathrm{j}\in \mathrm{N}\backslash\sigma_l,\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases} \tag{6}$$

Приведем численный алгоритм решения задачи **В-**k**,** ключевой частью которого является $r\left(\alpha\right)$-алгоритм с постоянным коэффициентом растяжения пространства α и адаптивным способом регулировки шагового множителя.

Алгоритм.

Шаг 0. Область Ω заключаем в прямоугольный параллелепипед Π, стороны которого параллельны осям декартовой системы координат, полагаем $\rho(x)=0$ при $x\in\Pi\setminus\Omega$. Параллелепипед Π покрываем прямоугольной сеткой и задаём начальное приближение $(\tau,\psi)=(\tau^{(0)},\psi^{(0)})$. Задаём параметры $\alpha,q_1,q_2,n_h,\varepsilon$ модификации $r(\alpha)$-алгоритма.

Шаг 1. Вычисляем значения вектор-функции $\lambda^{l(0)}(x)=(\lambda_1^{l(0)}(x),...,\lambda_N^{l(0)}(x))$, $l=\overline{1,L}$, в узлах сетки по формулам (6) при $\tau=\tau^{(0)}, \psi=\psi^{(0)}$. Вычисляем значения функции $G_1\left(\tau^{(0)},\psi^{(0)}\right)$ и вектора $g_p\left(\tau^{(0)},\psi^{(0)}\right)$ в узлах сетки по формулам (3), (4), (5) при $\tau=\tau^{(0)}$, $\psi=\psi^{(0)}$, $\lambda^l(x)=\lambda^{l(0)}(x), l=\overline{1,L}$.

Выбираем начальный пробный шаг $h_0>0$, полагаем $B_0^{\tau}=I_{nN}$, $B_0^{\psi}=I_N$, – квадратные матрицы размера $nN\times nN$, $N\times N$ соответственно, и находим:

$$\tau^{(1)}=\mathrm{P}_{\Pi}\left(\tau^{(0)}-h_0 g_P^{\tau}\left(\tau^{(0)},\psi^{(0)}\right)\right), \quad \psi^{(1)}=\psi^{(0)}-h_0 g_P^{\psi}\left(\tau^{(0)},\psi^{(0)}\right).$$

Шаг 2. Пусть в результате вычислений после k , $k=1,2,...$ шагов алгоритма получены величины $\tau^{(k)},\psi^{(k)}$, $\lambda^{l(k-1)}(x)$, $l=\overline{1,L}$, в узлах сетки, матрицы B_k^{τ}, B_k^{ψ}.

Опишем (***k*+1**)-й шаг, включающий следующие этапы.

1. Вычисляем значения $\lambda^{l(k)}(x)$, $l=\overline{1,L}$, в узлах сетки по формуле (6) при $\tau=\tau^{(k)},\psi=\psi^{(k)}$.

2. Вычисляем значения $g_P\left(\tau^{(k)},\psi^{(k)}\right)$ в узлах сетки по формулам (4), (5) при $\tau=\tau^{(k)},\psi=\psi^{(k)}$, $\lambda^l(x)=\lambda^{l(k)}(x), l=\overline{1,L}$.

3. Проводим очередную итерацию $r(\alpha)$-алгоритма, вычислительная формула которого имеет вид:

$$\tau^{(k+1)}=\mathrm{P}_{\Pi}\left(\tau^{(k)}-h_k B_{k+1}\frac{B_{k+1}^{\mathrm{T}}g_P^{\tau}\left(\tau^{(k)},\psi^{(k)}\right)}{\left\|B_{k+1}^{\mathrm{T}}g_P^{\tau}\left(\tau^{(k)},\psi^{(k)}\right)\right\|}\right),$$

$$\psi^{(k+1)}=\psi^{(k)}-h_k B_{k+1}\frac{B_{k+1}^{\mathrm{T}}g_P^{\psi}\left(\tau^{(k)},\psi^{(k)}\right)}{\left\|B_{k+1}^{\mathrm{T}}g_P^{\psi}\left(\tau^{(k)},\psi^{(k)}\right)\right\|}.$$

Здесь $B_{k+1}^{\tau},B_{k+1}^{\psi}$ – операторы отображения преобразованного пространства в основное пространство с коэффициентом растяжения α, которые пересчитываются по формуле $B_{k+1}^{w}=B_k^{w}\left(I+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\theta_k^{w}(\theta_k^{w})^T\right)$, где w обозначает переменную τ или ψ, I – единичная матрица соответствующего размера, θ_k^{w} – нормированный вектор разности двух последовательных псевдоградиентов в преобразованном пространстве, т. е.:

$$\theta_k^{w}=\frac{(B_{k+1}^{w})^T\left(g_P^{w}(\tau^{(k)},\psi^{(k)})-g_P^{w}(\tau^{(k-1)},\psi^{(k-1)})\right)}{\left\|(B_{k+1}^{w})^T\left(g_P^{w}(\tau^{(k)},\psi^{(k)})-g_P^{w}(\tau^{(k-1)},\psi^{(k-1)})\right)\right\|},$$

при условии, что $\left\|(B_{k+1}^{w})^T\left(g_P^{w}(\tau^{(k)},\psi^{(k)})-g_P^{w}(\tau^{(k-1)},\psi^{(k-1)},)\right)\right\|\geq\varepsilon_0$, и $\theta_k^{w}=0$ в остальных случаях, здесь ε_0 – точность представления машинного нуля в ЭВМ. Длина шагового множителя h_k регулируется адаптивным способом с параметрами $h_{0,}\,q_1,q_2,n_h$, сообразно которому шаговый множитель выбирается из условия минимума разности $\left[G_1(\tau^{(k-1)},\psi^{(k)})-G_1(\tau^{(k)},\psi^{(k-1)})\right]$ по направлению обобщённого антипсевдоградиента $-g_P(\tau,\psi)$ в преобразованном пространстве.

4. Если условие $\left\| \left(\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}\right) - \left(\tau^{(k)}, \psi^{(k)}\right) \right\| \le \varepsilon, \varepsilon > 0$, не выполняется, переходим к $(k+2)$-му шагу алгоритма с новыми значениями величин $\tau^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}$, $\lambda^{l(k)}(x), l = \overline{1, L}$, в узлах сетки, иначе – переходим на п. 5.

5. Полагаем $\tau_* = \tau^{(l)}, \psi^* = \psi^{(l)}, \lambda_*^l(x) = \lambda^{l(s)}(x), l = \overline{1, L}$, где s – номер итерации, на которой выполнилось условие окончания итерационного процесса.

6. Вычисляем оптимальное значение функционала исходной задачи **B-**k **при** $\tau = \tau_*$**,** $\psi = \psi^*, \lambda^l(\cdot) = \lambda_*^l(\cdot), l = \overline{1, L}$ и для контроля правильности счёта – значение целевой функции задачи (3) при этих же параметрах**.**

Замечание 1. Если в задаче **A-**k отсутствуют интегральные ограничения (1), то процесс решения упрощается. Характеристические функции подмножеств k-го порядка, составляющих оптимальное разбиение множества Ω, в этом случае вычисляются для всех $i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$, по следующей формуле:

$$\tilde{\lambda}_i^{l}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } c(x, \tilde{\tau}_i) / w_i + a_i \le c(x, \tilde{\tau}_j) / w_j + a_j, \ \forall i \in \sigma_l, \mathrm{j} \in \mathrm{N} \backslash \sigma_l, \\ 0 \ \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

где $\tilde{\tau}_1, ..., \tilde{\tau}_N$ – решение задачи минимизации негладкой функции

$$G_2(\tau^N) = \int\limits_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in \mathrm{M(N}, k) \\ l = \overline{1, L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i] \rho(x) dx.$$

Замечание 2. Вычислительная эффективность приведенного алгоритма зависит от коэффициента растяжения пространства α и параметров адаптивной регулировки шага q_1, q_2, n_h из $r(\alpha)$-алгоритма. Для негладких функций эти параметры целесообразно выбирать следующим образом: $\alpha = 2 \div 3$, $h_0 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1.1 \div 1.2$, $n_h = 2 \div 3$, где q_1 коэффициент уменьшения шага, если условие релаксации итерационного процесса по текущему направлению спуска выполняется за один шаг, q_2 – коэффициент увеличения шага, при этом натуральное число n_h ($n_h > 1$) задаёт количество шагов одномерного спуска, после которых шаг будет увеличиваться в q_2 раз.

Особенности реализации алгоритма решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения невыпуклых множеств

Зачастую при решении реальных практических задач разбиения-размещения требуется разместить объекты внутри некоторой невыпуклой области и при этом избегать запретных зон (застроенная территория, реки, заповедники и т.д.). В работе рассмотрено два способа аналитического описания множеств со сложными границами.

Первый и наиболее простой подход к описанию ограниченных областей состоит в кодировании элементов изображений или поточечном их сканировании. Для этого изображение необходимого множества (карта, рисунок) проходит подготовительную обработку, которая состоит в удалении с рисунка запретных зон и объектов, не принадлежащих разбиваемому множеству. Это осуществляется с помощью любого графического редактора. Полученная допустимая область Ω вписывается в прямоугольник Π, который, в свою очередь, покрывается прямоугольной сеткой. В каждой точке сетки определяется функция плотности:

$$\bar{\rho}(x) = \begin{cases} \rho(x), \ x \in \Omega \\ 0, \ x \in \Pi \setminus \Omega \end{cases}.$$

В аналитической геометрии, в свою очередь, сложные границы области принято задавать с помощью уравнений и неравенств. Одним из методов построения уравнений заданных геометрических объектов является метод R-функций [5]. Этот метод позволяет построить в неявной форме уравнения границ составных областей по известным уравнениям простых областей. Приведем некоторые понятия и теоремы из теории **R**-функций.

Определение. Точка $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства $X \subset E_n$ называется *вырожденной*, если хотя бы одна из ее координат равна нулю. В противном случае точка называется *невырожденной*.

Множество всех вырожденных точек пространства X представляет собой объединение n гиперплоскостей $x_i, i = \overline{1,n}$, которое можно рассматривать как единую гиперповерхность H. Гиперповерхность H разбивает n-мерное пространство на 2^n областей H_j, $j = \overline{1,2^n}$.

Определение. Функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенная всюду в пространстве X, называется **R-функцией**, если в каждой из областей H_j, $j = \overline{1,2^n}$, она сохраняет постоянный знак, т. е.

$$S\left[f(x_1, x_2, ..., x_n)\right] = F_i = const,$$

где $S(z)$ – двузначный предикат, с помощью которого определяется принадлежность величины z к одному из классов положительных или отрицательных чисел:

$$S(z) = \frac{1 + sign(z)}{2}, \quad z \neq 0;$$

F_i – двоичная величина, одна и та же для всех точек области H_j, $j = \overline{1,2^n}$.

Для того, чтобы функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ была R-функцией, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию:

$$S\left[f(x_1, x_2, ..., x_n)\right] = F\left(S(x_1), S(x_2), ..., S(x_n)\right),$$

где $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ – некоторая булева функция.

Метод описания геометрических двумерных областей сложной формы с помощью **R**-функций основывается на следующей теореме.

Теорема. Если области $D_1, D_2, ..., D_m$ определяются соответственно неравенствами

$$f_1(x_1, x_2) \geq 0; \ f_2(x_1, x_2) \geq 0; ...; \ f_m(x_1, x_2) \geq 0,$$

а логика построения области D задана булевой функцией $D = F\left[D_1, D_2, ..., D_m\right]$, то неравенство

$$\psi(x_1, x_2) \equiv \phi\left[f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2), ...,\ f_m(x_1, x_2)\right] \geq 0,$$

где $\phi\left[z_1; z_2; ...; z_m\right]$ – **R**-функция, соответствующая булевой функции $D = F\left[D_1, D_2, ..., D_m\right]$, определяет область D.

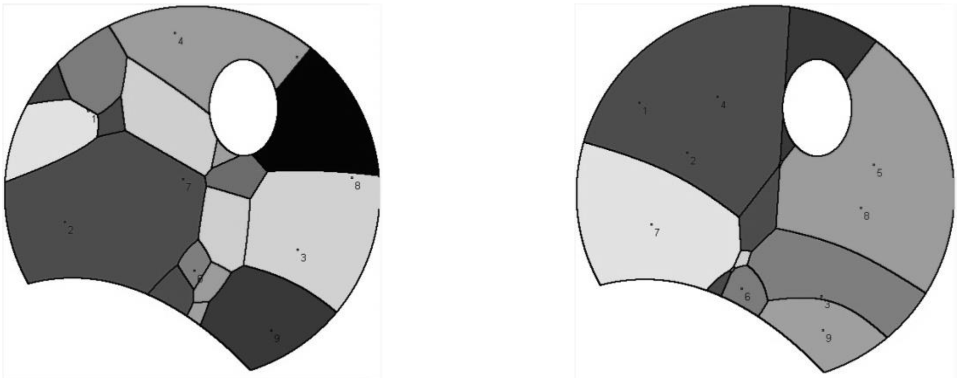
Для учета «невыхода» за пределы допустимой (разбиваемой) области размещаемых центров предлагается следующий подход: на каждой итерации r-алгоритма Шора проверять принадлежность текущих координат центров допустимой области. В случае, если какой-либо центр попадает в запретную зону – находить его «псевдопроекцию» на разбиваемое множество. При этом под псевдопроекцией точки $z \in \mathrm{E}_2$ на замкнутое множество $\Omega \subset E_2$ будем понимать точку $v \in \Omega \bigcap D(z)$, такую что

$$dist(z, v) = \min_{x \in \Omega \bigcap D(z)} dist(z, x),$$

где множество $D(z) = \left\{v = z + \gamma w, \gamma \in R, w \in \{e_1, e_2\}\right\}$, e_1, e_2 – орты осей координат, $dist(z, v)$ – расстояние между двумя точками.

Результаты вычислительных экспериментов. Численный алгоритм решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств был реализован в комплексе программ "OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITIONING OF SETS" (OMPS-2015).

Для задания геометрии области в тестовых задачах, результаты которых приведены на рис 1, использовался аппарат **R**-функций. На рис. 1, *а* представлено оптимальное дуплексное разбиение, полученное в результате решения задачи ОМРМ без учета интегральных ограничений с фиксированными центрами при следующих начальных данных: $\Omega = \left\{x \in R^2 : 0 \leq x_i \leq 10, i = 1,2\right\}$, $N = 9$, $k = 2$, $c(x,\ \tau_i) = \sqrt{(x_1 - \tau_1^i)^2 + (x_2 - \tau_2^i)^2}$, $w_i = 1$, $a_i = \{3,0,1,0,0,3,1,0,2\}$, $\forall i = \overline{1, N}$; $\rho(x) = 1$, $\forall x \in \Omega$. Результат решения задачи ОМРМ, в которой координаты центров подлежат определению, при тех же исходных данных приведен на рис. 1, *б*.



а б

Рис. 1. Дуплексное разбиение невыпуклого множества для девяти центров:
а – без размещения центров, б – с оптимальным размещением центров

На рис. 2 представлены результаты решения задачи ОМРМ, где описание разбиваемой области осуществлялось путем поточечного сканирования изображения. На рис. 2, *а* приведено оптимальное разбиение второго порядка невыпуклого множества без ограничений с фиксированными центрами при начальных данных: $\Omega = \left\{ x \in R^2 : 0 \le x_i \le 10, i = 1,2 \right\}$, $N = 13$, $k = 2$, $\rho(x) = 1$, $c(x, \tau_i) = \sqrt{(x_1 - \tau_1^i)^2 + (x_2 - \tau_2^i)^2}$,
$w_i = 1$, $a_i = \{0,1,2,3,0,3,1,0,0,2,1,0,0\}$, $\forall i = \overline{1, N}$. Результат решения задачи ОМРМ с размещением центров приведен на рис. 1, *б*.

а б

Рис. 2. Дуплексное разбиение невыпуклого множества для тринадцати центров:
а – без размещения центров, б – с размещением центров

Выводы В работе описан и программно реализован численный алгоритм решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств при наличии интегральных ограничений и с неизвестными координатами центров. Рассмотрены особенности его реализации в том случае, когда разбиваемое множество имеет сложную границу или содержит запрещенные зоны, что является значимым при решении реальных практических задач разбиения-размещения. При этом предложено два способа аналитического описания невыпуклых множеств. Приведены результаты применения разработанного аппарата для решения тестовых задач.

Перечень ссылок

1. Коряшкіна Л.С. Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф. – 2015. – № 18 (351). – С. 28 – 36.
2. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2015. – № 2 (119). – P. 15 – 32.
3. Коряшкина Л.С., Череватенко А.П. Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2015. – Вип. 28. – С. 77 – 91.
4. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets and their applications / L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko, O.O. Mykhalova // Power Engineering and

Information Technologies in Technical Objects Control – Pivnyak, Beshta & Alekseyev (eds). – Taylor & Francis Group, London. – 2016. – P. 233 – 239.
5. Рвачёв В.Л. «Теория R-функций и некоторые её приложения»./ В.Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

ABSTRACT

The purpose is to develop a numerical algorithm for solving continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets, as well as to study the features of its realization for the case of a complex (nonconvex) set form.

The methodologies used in paper are the following: methods for solving continuous problems of optimal multiplex- partitioning of sets, nondifferentiable optimization methods, *R*-functions method.

Findings. A numerical algorithm for solving continuous problems of optimal multiplex-partitioning of nonconvex sets is developed. The paper considers two methods of analytical description of limited sets with complex boundaries: coding of image elements or their point-by-point scanning, as well as constructing of boundaries equation of composite regions using known equations of simple sets.

Practical implications. Often, when solving real practical problems of partitioning-placement, it is required to locate objects inside a certain non-convex area and at the same time avoid forbidden zones (built-up area, rivers, nature reserves etc.). The presented algorithm allows to solve such problems.

Keywords: continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets, set partitioning of the k-th order, nonconvex set, R-functions, nondifferentiable optimization