УДК 681.51
Т 41

ПРОЦЕДУРЫ СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

В. Л. Тимченко, канд. техн. наук, доц.;
О. А. Ухин, асп.

Национальный университет кораблестроения, г. Николаев

Аннотация. Предложен механизм построения алгоритмов формирования оптимальной траектории движения динамического объекта при учете ограничений на управляющее воздействие. Проведено моделирование движения объекта четвертого порядка по построенной оптимальной траектории.
Ключевые слова: алгоритм формирования оптимальной траектории, системы с переменной структурой в обратных связях, моменты переключения.

Анотація. Запропоновано механізм побудови алгоритмів формування оптимальної траєкторії руху динамічного об'єкта з урахуванням обмежень на керуючий вплив. Проведено моделювання руху об'єкта четвертого порядку за побудованою оптимальною траєкторією.
Ключові слова: алгоритм формування оптимальної траєкторії, системи зі змінною структурою у зворотних зв'язках, моменти перемикання.

Abstract. The mechanism for developing the optimal trajectory forming algorithms of a dynamic object has been suggested taking into account the constraints on the control action. The motion simulation of the fourth order object is performed according to the formed optimal trajectory.
Keywords: optimal trajectory forming algorithm, system with variable feedback structure, switching torques.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Задача максимального быстродействия является одной из основных в современной теории оптимального управления. Например, для систем динамического позиционирования морского подвижного объекта важно осуществлять стабилизацию максимально быстро, так как для функционирования плавучего объекта в условиях воздействия значительных внешних возмущений (волнения до 5 баллов) система позиционирования должна обеспечивать удержание технологического инструмента с отклонениями до 3–5 %. Проблема динамического позиционирования приобрела особую актуальность в связи с работами по освоению природных богатств океана и, в частности, при создании буровых судов, осуществляющих поиск нефтегазовых месторождений на значительной глубине.

На данный момент существует ряд классических методов оптимального управления динамическими объектами, которые теоретически позволяют рассчитать оптимальный сигнал управления для обеспечения перемещения объекта с начальной точки в заданную точку по оптимальной по быстродействию траектории. Однако на практике использование данных методов осложнено следующими недостатками: сложностью практической реализации алгоритмов управления, необходимостью серьезных упрощений промежуточных или конечных уравнений с соответствующей потерей точности вычислений при решении краевых задач, узкой областью сходимости при использовании степенных рядов. Системы с переменной структурой обратных связей позволяют находить оптимальные управляющие воздействия и не включают в себя перечисленные выше недостатки [9, 12], однако априорно требуют построения оптимальных траекторий.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Проблема построения оптимальной траектории движения объекта управления рассматривалась в [4, 7, 11] и других работах. Авторы перечисленных работ сформулировали основные принципы оптимального по быстродействию управления. В работе [6] внимание уделялось построению оптимальных систем высокого порядка. Однако предложенные методы приводят к определенным трудностям, таким как решение краевых задач, что ведет к усложнению практической реализации данных механизмов синтеза.

Использование модального управления для построения оптимальных регуляторов описано в [1, 2]. Данный метод приводит к необходимости решения уравнения Риккати, для чего требуется решить ряд линейных уравнений, количество которых зависит от порядка системы. В случае, когда система имеет высокий порядок, возможно возникновение вычислительных сложностей из-за громоздкости системы уравнений.

В работе [3] рассматривается процесс построения оптимальной по быстродействию траектории при ограничениях на управление для многомерных объектов, однако оптимальное управление находится с помощью численного решения системы нелинейных уравнений, что также приводит к вычислительным сложностям при повышении порядка системы.

Использование аппарата выпуклого анализа [5] при построении оптимальной траектории позволяет избежать необходимости решения краевых задач, однако приводит к необходимости нахождения сложных определенных интегралов, которые, как правило, затруднительно аналитически определить в ряде важных практических случаев.

ЦЕЛЬЮ СТАТЬИ является разработка практически реализуемого механизма построения алгоритмов формирования оптимальной по быстродействию траектории движения динамического объекта высокого порядка, а также моментов переключения управляющих функций в цепях обратных связей с учетом ограничений на управление.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

В статье рассматривается проблема стабилизации объекта на плоскости, т. е. задача управления по двум координатам и их производным с условием выполнения критерия оптимальности по быстродействию.

Данный критерий заключается в определении минимального времени

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt = \min,$$

требуемого для перевода управляемого объекта из заданного начального состояния в заданное конечное состояние, движение которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}).$$

Для обеспечения процесса управления динамическим объектом рассмотрим систему с переменной структурой обратных связей, так как данный метод позволяет обеспечить оптимальное управление и не вызывает вычислительных сложностей. Предложенный подход [8, 10] включает в себя основные этапы: планирование оптимальной траектории; определение моментов переключения управляющих функций в цепях обратной связи объекта; синтез управляющих функций в соответствующих цепях обратной связи многомерного объекта.

Планирование оптимальной траектории является базовым этапом при формировании оптимального управления, так как на основе выбранной траектории определяются моменты переключения управляющих воздействий в цепях обратной связи, а также вид передаточных функции управления. Введение ограничений на управляющее воздействие ограничивает количество возможных производных управляемой координаты, что влияет на вид оптимальной траектории, а также значительно усложняет процесс управления.

Для определения оптимального управления рассмотрим динамический объект управления в общем виде:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}, \tag{1}$$

где **A** и **B** – матрицы коэффициентов объекта управления; **X**, **U** – векторы управляемых координат и управляющих воздействий соответственно.

При переводе динамического объекта из начальной точки в заданную траектории движения, при условии, что управляющее воздействие ограничено только способностью его реализации, описываются уравнениями, приведенными ниже.

Для обеспечения процесса «разгона» объекта значения фазовых координат уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{X}(0) + \dot{\mathbf{X}}(0)(t_1 - t_0); \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{X}(t_{i+1}) = \mathbf{X}(t_i) + \dot{\mathbf{X}}(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \ldots + \overset{(k)}{\mathbf{X}}(0)\frac{(t_{i+1} - t_i)^k}{k!}.\end{gathered} \tag{2}$$

Уравнения процесса «торможения» для значений фазовых координат запишутся как

$$\begin{gathered}\mathbf{X}(t_{i+2}) = \mathbf{X}(t_{i+1}) + \dot{\mathbf{X}}(t_{i+1})(t_{i+2} - t_{i+1}) + \ldots - \overset{(k)}{\mathbf{X}}(0)\frac{(t_{i+2} - t_{i+1})^k}{k!}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{X}(t_m) = \mathbf{X}(t_{m-1}) + \dot{\mathbf{X}}(t_{m-1})(t_m - t_{m-1}),\end{gathered} \tag{3}$$

где t_i – моменты переключения управляющих воздействий ($i = 1, ..., m$); k – порядок высших производных вектора координат, определяемый с учетом физической реализуемости управления.

Для выполнения критерия оптимальности по быстродействию необходимо синтезировать управление для использования максимального значения производных выходной координаты, так как они обеспечат переход в заданную точку с наименьшими затратами времени, а также максимальные по модулю значения, которые определяются исходя из ограничений на управляющие воздействия [10].

Физически реализуемые начальные значения фазовых координат с учетом ограничений на управляющие воздействие, исходя из уравнения (1), определяются следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{AX}(0) + \mathbf{BU}_{\max}; \\ \ddot{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{A}^2\mathbf{X}(0) + \mathbf{ABU}_{\max} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{U}}_{\max}; \\ \cdots\cdots\cdots \\ \overset{(k)}{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{A}^k\mathbf{X}(0) + \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{BU}_{\max} + \ldots + \mathbf{AB}\overset{(k-2)}{\mathbf{U}}_{\max} + \mathbf{B}\overset{(k-1)}{\mathbf{U}}_{\max};\end{gathered} \tag{4}$$

Рассмотрим систему четвертого порядка, которая описывает в переменных состояния движение двухмерного объекта на горизонтальной плоскости:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_2;\\ \dot{x}_2(t) = a_{11}x_2(t) + a_{12}y_2(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t);\\ \dot{y}_1 = y_2;\\ \dot{y}_2(t) = a_{21}x_2(t) + a_{22}y_2(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t);\\ |u_1(t)| \le u_{1\max}, \quad |u_2(t)| \le u_{2\max},\end{gathered} \tag{5}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}; b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} – коэффициенты объекта управления.

Для построения оптимальной по быстродействию траектории перехода объекта управления из начальной точки в заданную, с учетом ограничений на управляющее воздействие, предлагается следующий алгоритм.

1. Определение требуемого времени для перехода в заданное значение для каждой фазовой координаты в предположении, что каждая из фазовых координат является независимой.

2. Определение количества и координат контрольных точек, через которые должны проходить траектории управляемых координат для попадания в заданную конечную точку. Для этого сравниваются полученные значения требуемого времени для каждой фазовой координаты $t_x, t_{\dot{x}}$. Если $t_x > t_{\dot{x}}$, тогда контрольная точка находится на оси x в области $x > 0$. Если $t_x < t_{\dot{x}}$, тогда контрольная точка находится на оси x в области $x < 0$.

3. Определение ведущей и ведомой координат. Ведущая координата находится по наименьшему требуемому времени перехода в контрольную точку. Ведомой будет координата, для которой требуется большее количество времени для перехода в контрольную точку.

4. Перевод ведущей координаты в контрольную точку x_{k1}. При этом ведомая координата перемещается в произвольную точку y_{k1}.

5. Фиксация ведущей координаты.

6. Определение второй контрольной точки для ведомой координаты. Нахождение требуемого времени для перехода ведущей координаты из контрольной точки x_{k1} в конечную. Определение точки y_{k2} для ведомой координаты, чтобы время, занятое на переход из точки y_{k2} в конечную точку, было равно времени перехода ведущей координаты из точки x_{k1} в конечную точку. Перевод ведомой координаты в контрольную точку y_{k2}.

7. Перевод обеих координат в заданную конечную точку «СТОП».

На основе полученной траектории формируются оптимальные управляющие воздействия, которые через блок ключей переключения (БКП) поступают в управляющий канал системы с переменной структурой обратных связей (рис. 1).

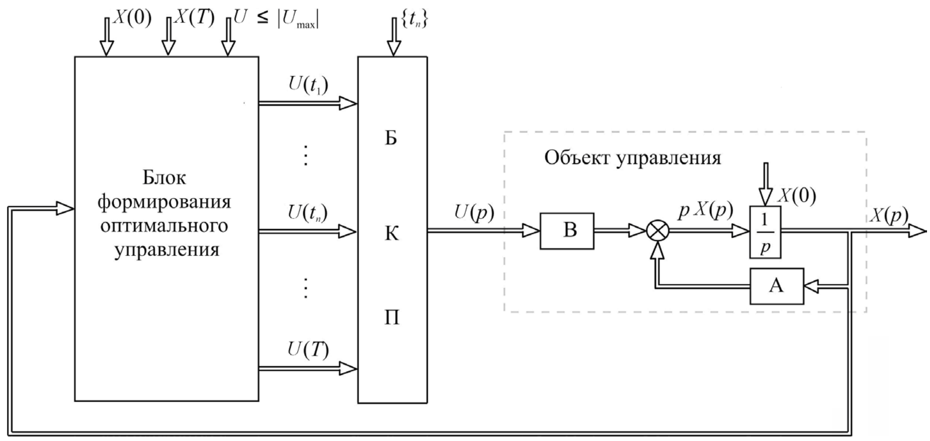


Рис. 1. Блок-схема системы управления с переменной структурой в обратных связях

Рассмотрим предложенный алгоритм на примере задачи перехода динамического объекта управления из начального заданного состояния в конечное заданное состояние при ограничениях на управляющее воздействие. Для этого зададим граничные условия для системы (5):

$$\begin{matrix}|u_1| \le 1 \\ |u_2| \le 1\end{matrix}; \quad \begin{matrix}x(0) = x_0; x(T) = x_T; \dot{x}(0) = \dot{x}_0; \dot{x}(T) = \dot{x}_T \\ y(0) = y_0; y(T) = y_T; \dot{y}(0) = \dot{y}_0; \dot{y}(T) = \dot{y}_T\end{matrix}.$$

Определим требуемое время для перехода в заданное значение для каждой фазовой координаты, предположив, что каждая из них является независимой. Для этого запишем и решим уравнения движения:

$$\begin{gathered}x(T) = x(0) + \dot{x}(0)t_x + \ddot{x}(0)\frac{t_x^{\,2}}{2};\\ \dot{x}(T) = \dot{x}(0) + \ddot{x}t_{\dot{x}};\\ y(T) = y(0) + \dot{y}(0)t_y + \ddot{y}(0)\frac{t_y^{\,2}}{2};\\ \dot{y}(T) = \dot{y}(0) + \ddot{y}t_{\dot{y}},\end{gathered} \tag{6}$$

где $\ddot{x}(0)$, $\ddot{y}(0)$ определяются из системы (4).

Определение контрольных точек с учетом результатов, полученных из уравнения (6), производится в следующей последовательности:

подстановка в уравнение движения наибольшего требуемого времени для перевода фазовой координаты в заданную точку;

нахождение разницы между заданным и полученным значениями:

$$\begin{aligned} x_{k1} &= x(T) - x(t_{\dot{x}});\, \dot{x}_{k1} = \dot{x}(T) - \dot{x}(t_{\dot{x}}); \\ y_{k1} &= y(T) - y(t_{\dot{y}});\, \dot{y}_{k1} = \dot{y}(T) - \dot{y}(t_{\dot{y}}). \end{aligned} \tag{7}$$

Исходя из полученных координат контрольных точек на основе решений (7), делаем вывод, что координата x будет ведущей, координата y, соответственно, ведомой.

Для перевода в контрольную точку x_{k1} и определения моментов переключения управляющих воздействий в цепях обратной связи, исходя из (2), (3), необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x(t_{\text{пр1}}) &= x(0) + \dot{x}(0)t_{\text{пр1}} + \ddot{x}(0)\frac{t_{\text{пр1}}^{2}}{2}; \\ \dot{x}(t_{\text{пр1}}) &= \dot{x}(0) + \ddot{x}t_{\text{пр1}}; \\ x(T_1) &= x(t_{\text{пр1}}) + \dot{x}(t_{\text{пр1}})(T_1 - t_{\text{пр1}}) + \ddot{x}(t_{\text{пр1}})\frac{(T_1 - t_{\text{пр1}})^2}{2}; \\ \dot{x}(T_1) &= \dot{x}(t_{\text{пр1}}) + \ddot{x}(t_{\text{пр1}})(T_1 - t_{\text{пр1}}). \end{aligned} \tag{8}$$

На основе результатов решения уравнения (8) в промежуток времени (0; $t_{\text{пр1}}$) управляющие воздействия будут иметь следующие значения: $u_1 = -u_{1\max}$; $u_2 = -u_{2\max}$, а в промежуток ($t_{\text{пр1}}$; T_1) они примут значения: $u_1 = u_{1\max}$; $u_2 = u_{2\max}$.

Фиксация ведущей координаты производится включением соответствующих управляющих воздействий, которые рассчитываются таким образом, чтобы компенсировать взаимовлияние, например:

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_{1\max};\, u_2 = -\frac{b_{11}}{b_{12}}u_1 \to \ddot{x} = 0;\, \ddot{y} = -b_{21}u_{1\max} + \frac{b_{22}b_{11}}{b_{12}}u_{1\max}; \\ u_1 &= u_{1\max};\, u_2 = -\frac{b_{11}}{b_{12}}u_1 \to \ddot{x} = 0;\, \ddot{y} = b_{21}u_{1\max} - \frac{b_{22}b_{11}}{b_{12}}u_{1\max}. \end{aligned} \tag{9}$$

При определении второй контрольной точки в данном примере используется время $t_{\dot{x}}$ для перехода объекта по координате x из точки x_{k1} в заданную конечную точку.

Точка y_{k2} определяется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} y_{k2} &= y_k - \dot{y}_k t_{\dot{x}} + \ddot{y}_k \frac{t_{\dot{x}}^{2}}{2}; \\ \dot{y}_{k2} &= \dot{y}_k - \ddot{y}_k t_{\dot{x}}, \end{aligned}$$

где $y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k$ – конечные значения фазовых координат.

Для перехода динамического объекта управления в контрольную точку y_{k2} и определения моментов переключения управляющих воздействий решается система уравнений

$$\begin{aligned} y(t_{\text{пр2}}) &= y(T_1) + \dot{y}(T_1)t_{\text{пр2}} + \ddot{y}(T_1)\frac{t_{\text{пр2}}^{2}}{2}; \\ \dot{y}(t_{\text{пр2}}) &= \dot{y}(T_1) + \ddot{y}t_{\text{пр2}}; \\ y(T_2) &= y(t_{\text{пр2}}) + \dot{y}(t_{\text{пр2}})(T_2 - t_{\text{пр2}}) + \ddot{y}(t_{\text{пр2}})\frac{(T_2 - t_{\text{пр2}})^2}{2}; \\ \dot{y}(T_2) &= \dot{y}(t_{\text{пр2}}) + \ddot{y}(t_{\text{пр2}})(T_2 - t_{\text{пр2}}). \end{aligned}$$

В промежуток времени (T_1; $t_{\text{пр2}}$) управляющие воздействия для обеспечения фиксации ведущей координаты исходя из (9) будут иметь следующие значения:

$$u_1 = -u_{1\max};\; u_2 = -\frac{b_{11}}{b_{12}}u_1,$$

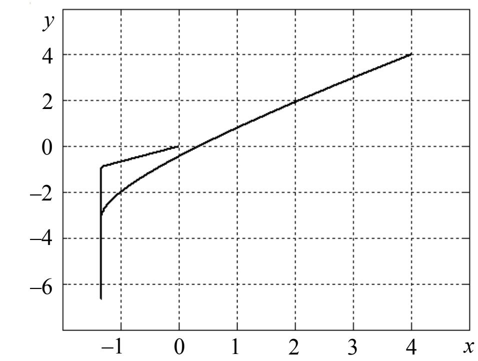
а в промежуток ($t_{\text{пр2}}$; T_2):

$$u_1 = u_{1\max};\; u_2 = -\frac{b_{11}}{b_{12}}u_1.$$

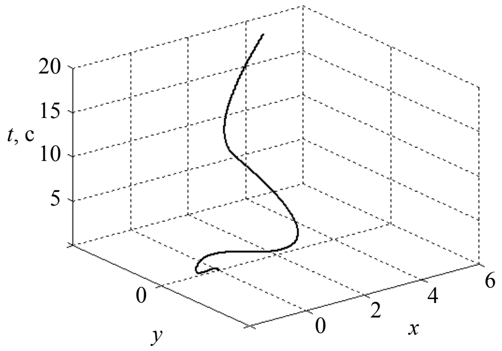
Для обеспечения выполнения критерия оптимальности по быстродействию перевод обеих координат динамического объекта управления в конечную заданную точку производится при включении максимально возможного управляющего воздействия в обоих каналах управления.

В результате применения предложенной процедуры формирования оптимальной по быстродействию траектории движения динамического объекта были получены зависимость управляемых координат (рис. 2,***а***), зависимость управляемых координат с учетом временной оси (рис. 2,***б***), зависимости фазовых переменных динамического объекта управления, а также контрольные точки (рис. 3).

Исходя из полученных оптимальных траекторий было сформировано управляющее воздействие для обоих каналов управления, обеспечивающее максимально быстрое перемещение объекта управления из заданной начальной точки в заданную конечную точку. Полученные управляющие сигналы, а также моменты переключения приведены на рис. 4.

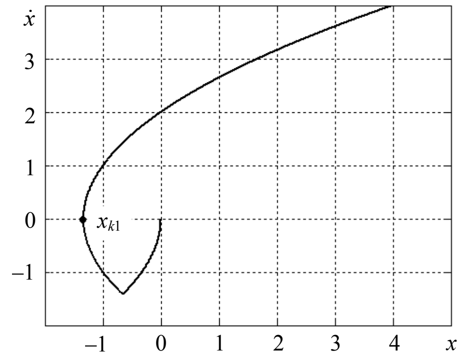


а

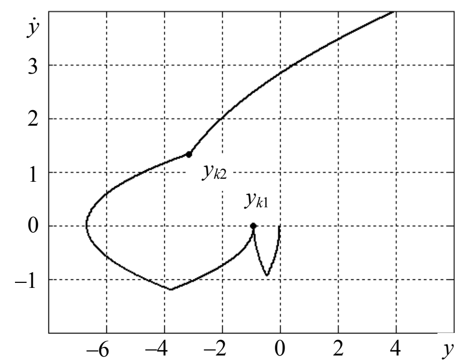


б

Рис. 2. График зависимости управляемых координат:
а – ведомой от ведущей; ***б*** – координат от времени

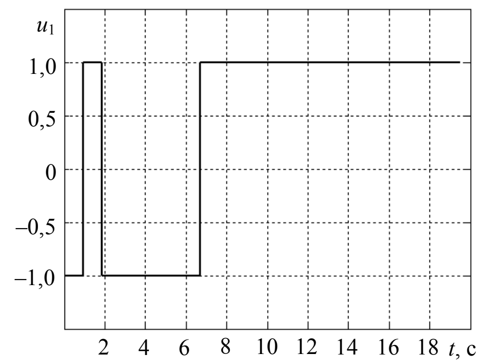


а

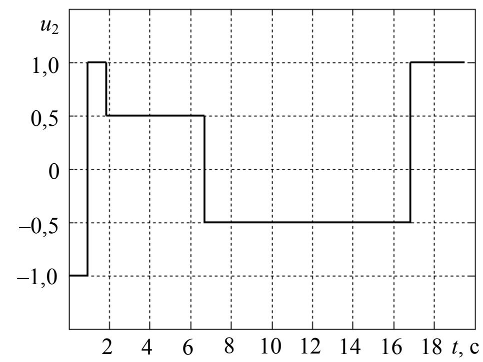


б

Рис. 3. График зависимости фазовых координат:
а – ведущей координаты; ***б*** – ведомой координаты



а



б

Рис. 4. График изменения управляющего воздействия:
а – $u_1(t)$; ***б*** – $u_2(t)$

ВЫВОДЫ

1. Предложенный механизм построения алгоритмов формирования оптимальной по быстродействию траектории движения динамического объекта обеспечивает построение оптимальной траектории движения для многомерного динамического объекта управления. Формирование оптимальных траекторий для объектов с тремя и более управляемыми координатами осуществляется путем ввода дополнительных субведущих координат.

2. Данный подход позволяет на основе баланса сил и моментов, действующих на объект, и их производных синтезировать требуемые управляющие воздействия, а также определить моменты переключения управляющих воздействий в цепях обратных связей, которые обеспечивают выполнение критерия максимального быстродействия при ограничениях на управляющее воздействие.

Предложенная процедура может использоваться при построении оптимальных траекторий в задачах динамического позиционирования, управлении движением морских подвижных объектов и других областях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Айзерман, М. А.** Абсолютная устойчивость регулируемых систем [Текст] / А. М. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер. – М. : Изд-во ФН СССР, 1963. – 257 с.

[2] **Дылевский, А. В.** Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом [Текст] / А. В. Дылевский, Г. И. Лозгачев // Известия АН. «Теория и системы управления». – М., 2003. – № 4. – С. 17–20.

[3] **Кошелев, А. П.** Исследование особенностей одного класса задач оптимального быстродействия [Текст] / А. П. Кошелев // Труды 49-й научной конференции МФТИ. – М., 2006. – Т. III. – С. 262.

[4] **Красовский, Н. Н.** Теория управления движением [Текст] / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1968. – 476 с.

[5] **Лутманов, С. В.** Оптимальное по быстродействию управление поступательным перемещением твердого тела [Текст] / С. В. Лутманов, Н. А. Стрелкова // Вестник Пермского университета «Математика. Механика. Информатика». – Пермь, 2010. – № 1. – С. 50–57.

[6] **Мееров, М. В.** Исследование и оптимизация многосвязных систем управления [Текст] / М. В. Мееров // АН СССР, Институт проблем управления. – М. : Наука, 1986. – 236 с.

[7] **Понтрягин, Л. С.** Принцип максимума в теории оптимального управления [Текст] / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1989. – 64 с.

[8] **Тимченко, В. Л.** Оптимальное управление линейным объектом на основе метода структурно-переключаемых обратных связей [Текст] / В. Л. Тимченко // Вестник НТУ «Харьковский политехнический институт» : сб. науч. трудов. – Х., 2009. – № 13. – С. 322–341.

[9] **Тимченко, В. Л.** Синтез оптимальных структурно-переключаемых систем управления многомерным объектом под воздействием возмущений [Текст] / В. Л. Тимченко // Техническая электродинамика : науч.-прикл. журн. Тем. вып. Проблемы современной электротехники. – К. : Ин-т электродинамики НАНУ, 2010. – Ч. 2. – С. 77–81.

[10] **Тимченко, В. Л.** Робастная стабилизация морских подвижных объектов на основе систем с переменной структурой обратных связей [Текст] / В. Л. Тимченко, Ю. П. Кондратенко // Проблемы управления и информатики : междунар. науч.-техн. журн. – К., 2011. – № 3. – С. 79–92.

[11] **Фельдбаум, А. А.** Основы теории оптимальных автоматических систем [Текст] / А. А. Фельдбаум. – М. : Наука, 1966. – 624 с.

[12] **Kondratenko, Y. P.** Optimal feedback switching method for linear control systems [Text] / Y. P. Kondratenko, V. L. Timchenko // Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications (Mathematical Research). – Berlin : Academia Verlag, 1994. – Vol. 79. – P. 291–292.

Надійшла до редколегії 28.01.13
Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК
д-р техн. наук, проф. Ю. П. Кондратенко