

<http://dx.doi.org/10.15589/jnn20140513>

УДК 005.8:519.87

П 77

SELECTION OF NORMALIZING TRANSFORMATION FOR INTERVAL ESTIMATION OF PROJECTS DURATION OF PREPARATION OF FEMALE BOXERS FOR COMPETITIONS

ВИБІР НОРМАЛІЗУЮЧОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ЧАСУ ВИКОНАННЯ ПРОЄКТІВ ПІДГОТОВКИ ЖІНОК-БОКСЕРІВ ДО ЗМАГАНЬ

Serhii B. Prykhodko

sergiy.prykhodko@nuos.edu.ua

ORCID: 0000-0002-2325-018X

Nataliia V. Kniaz

nataliya_knyaz@mail.ru

ORCID: 0000-0002-8526-8203

С. Б. Приходько,

д-р техн. наук, доц.;

Н. В. Князь,

асп.

Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolayiv

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв

Abstract. The application of Johnson's normalizing transformation from S_U family for interval estimation of projects duration of preparation of female boxers for competitions has been proposed. The aim of the article is to select the normalizing transformation for interval estimation of projects duration of preparation of female boxers for competitions. The use of the known normalizing transformations, such as Johnson, Box-Cox, Manly and Yeo-Johnson, for interval estimation of the sample mean of projects duration of preparation of female boxers for competitions is considered. The comparison of the resulting estimation of the confidence intervals based on the known normalizing transformations is done. The application of Johnson's normalizing transformation from S_U family for the interval estimation of the sample mean of projects duration of preparation of female boxers for competitions is proposed. The research results can be applied for the interval estimation of the sample mean of projects duration of preparation of female boxers for competitions. The application of Johnson's normalizing transformation from S_U family for interval estimation of projects duration of preparation of female boxers for competitions takes into account the empirical duration distribution with large skewness and kurtosis.

Keywords: Johnson transformation; confidence interval; sample mean; estimation.

Анотація. На основі нормалізуючого перетворення Джонсона із сім'ї S_U зроблено оцінювання довірчого інтервалу вибіркового середнього часу виконання проєктів підготовки жінок-боксерів високої кваліфікації до змагань. Виконано порівняння отриманої оцінки довірчого інтервалу з результатами непараметричного оцінювання.

Ключові слова: перетворення Джонсона; довірчий інтервал; вибіркоче середнє; оцінювання.

Аннотация. На основе нормализующего преобразования Джонсона из семейства S_U осуществлено оценивание доверительного интервала выборочного среднего времени выполнения проектов подготовки женщин-боксеров высокой квалификации к соревнованиям. Выполнено сравнение полученной оценки доверительного интервала с результатами непараметрического оценивания.

Ключевые слова: преобразование Джонсона; доверительный интервал; выборочное среднее; оценивание.

REFERENCES

- [1] Baharev B.V., Kovalev A.E. Optimizatsiya normalizuyushchego preobrazovaniya puassonovskogo protsessa dlya otsenki doveritelnogo intervala nesluchaynogo otkloneniya [Optimization of the normalizing transformation of the Poisson process for estimation of nonrandom deviation confidence interval]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1992, vol. 51, issue 2, pp. 144–146.
- [2] Dilennia M.O., Ostianov V.N., Komisarenko G.I. *Boks: Zhinky* [Boxing: Women]. Kyiv, Nationalnyi Olimpiiskiyi Komitet Ukrainy Publ., 2009. 112 p.
- [3] Dzheroyan G.O., Hudadov N.A. *Predsorevnovatel'naya podgotovka bokserov* [Precompetitive preparation of boxers]. Moscow, «Fyzkultura i Sport» Publ., 1971. 150 p.

- [4] Orlov A.I. *Prikladnaya statistika* [Applied Statistics]. Moscow, Ekzamen Publ., 2004. 656 p.
- [5] Prykhodko S.B. Intervalne otsiniuvannya parametrov stokhastichnykh dyferentsialnykh system na osnovi modifikatsii uzahalnenoho metodu momentiv [Interval estimation of parameters of stochastic differential systems based on the modification of the generalized method of moments]. *Materialy XIII Mizhnarodnoi konferentsii z avtomatichnogo upravlinnia «Avtomatyka–2006, (25.09–28. 09.2006)»* [Proceedings of the 13th International Conference on Automatic Control «Automatics–2006»]. Vinnytsia, 2006, pp. 69–75.
- [6] Prykhodko S.B. Intervalne otsiniuvannya statystichnykh momentiv nehausivskykh vypadkovykh velychyn na osnovi normalizuiuchykh peretvoren [Interval estimation of statistical moments of non-Gaussian variables on the basis of the normalizing transformation]. *Matematychni modelyuvannya – Mathematical modeling*, Dniprodzerzhynsk, 2011, no.1, issue 24, pp. 9–13.
- [7] Prykhodko S.B., Pukhalevych A.V., Negara N.V. Vybir normalizuiuchoho peretvorennia dlia vyznachennia chasu zatrymok vykonannya prohramnykh proektiv [Selection of normalizing transformation for determination of the time delay of software projects implementation]. *Zbirnyk naukovykh prats Natsionalnoho universytetu korablebuduvannia* [Collection of Scientific Publications National University of Shipbuilding], 2011, no. 3, issue 438, pp. 124–129.
- [8] Prikhodko S.B., Kudin O.A. Vybir normalizuyushchego preobrazovaniya dlya otsenki prodolzhitelnosti rabot pri upravlenii vremenem v proektakh razrabotki konstruktorskoj dokumentatsii sudna [Normalizing transformation selection for estimation of works duration in time management in projects of ship engineering documentation development]. *Zbirnyk naukovykh prats Natsionalnoho universytetu korablebuduvannia* [Collection of Scientific Publications National University of Shipbuilding], 2011, no. 4, issue 439, pp. 140–145.
- [9] Prikhodko S.B., Makarova L.N. Vybir normaliziruyushchego preobrazovaniya dlya otsenki vremeni narabotki mezhdru otkazami ustroystv terminalnoy seti v sluchae maloy vyborki [Selection of normalizing transformation for estimation of operating time between failures of terminal network devices in case of a small sample]. *Vestnik khersonskogo natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Kherson National Technical University], 2013, no. 1, issue 46, pp. 308–312.
- [10] Johnson R.A., Wichern D.W. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Pearson Prentice Hall, 2007. 800 p.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Існує проблема підготовки жінок-боксерів високої кваліфікації до змагань, яка насамперед пов'язана з необхідністю визначення часу для виводу спортсменів на пік форми перед важливими боями [3]. На сьогодні є лише загальні рекомендації наблизених строків підготовки жінок-боксерів до змагань, а самі строки, як правило, є точковими оцінками [2, 3]. Крім того, не враховується те, що час підготовки є випадковою величиною, а сама підготовка до змагань є певним проектом і потребує управління низкою ресурсів, зокрема часом. У свою чергу, для управління часом потрібно мати надійне оцінювання відповідних характеристик часу як випадкової величини.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

Як відомо [4, 6, 10], значення точкових оцінок числових характеристик випадкових величин відрізняються від значень відповідних характеристик. Більш повним і надійним способом їх оцінювання є визначення інтервалу (а не одного значення), в якому із заданим ступенем достовірності буде знаходитися значення характеристики, яка оцінюється. У цьому випадку говорять про інтервальне, або довірче, оцінювання. Зокрема, це стосується вибіркового середнього. Сьогодні оцінювання довірчого інтервалу

вибіркового середнього добре розроблено для випадкових величин з нормальним розподілом. Навіть при непараметричному підході, як правило, інтервальне оцінювання виконується завдяки припущенню про нормальність відповідної оцінки [4]. Для негауссівських випадкових величин визначення довірчого інтервалу відомо або для окремих розподілів, зокрема для пуассонівського [1], або якщо вдається побудувати аналітичний закон розподілу у вигляді густини імовірності Джонсона певної сім'ї [5]. У [5] запропоновано виконувати інтервальну оцінку статистичних моментів на основі застосування нормалізуючого перетворення Джонсона, яке дозволяє здійснювати перехід до випадкової величини з нормальним розподілом. Суть запропонованого в [5] підходу полягає у наступному. Спочатку за значеннями оцінок асиметрії та ексцесу вибіркового розподілу випадкової величини підбирають сім'ю з розподілів Джонсона та знаходять відповідні параметри. Використовуючи перетворення Джонсона зі знайденими параметрами, обчислюють значення нормально розподіленої випадкової величини, для якої знаходять довірчі інтервали точкових оцінок статистичних моментів. За цими довірчими інтервалами на основі перетворення Джонсона визначають довірчі інтервали статистичних моментів для початкової випадкової величини. У [5] визначення параметрів перетворення Джонсона здійснюється за емпіричним розподілом випадкової

величини методом найменших квадратів. А це в свою чергу приведе до необхідності мати велику вибірку значень випадкової величини. Для малої вибірки та довільного нормалізуючого перетворення, зокрема Джонсона (Johnson), Бокса–Кокса (Box–Cox), Менлі (Manly) і Ієо–Джонсона (Yeo–Johnson), в [6] запропоновано метод оцінювання довірчих інтервалів статистичних моментів негауссівських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень, який дає змогу знаходити відповідні інтервальні оцінки без застосування припущення про нормальність розподілів цих величин та дозволяє враховувати суму залишкових членів ряду нелінійної функції цього перетворення. У роботах [4–6, 8] показано працездатність зазначеного методу для оцінювання довірчих інтервалів характеристик випадкових величин у різних галузях.

МЕТА РОБОТИ полягає у виборі нормалізуючого перетворення для оцінювання довірчого інтервалу вибіркового середнього часу виконання проектів підготовки жінок-боксерів високої кваліфікації до змагань.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

У загальному випадку перетворення Джонсона має вигляд [6]

$$z = \gamma + \eta h(x, \varphi, \lambda); \quad \eta > 0; \quad -\infty < \gamma < \infty; \quad \lambda > 0; \quad -\infty < \varphi < \infty, \quad (1)$$

де z – нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням «нуль» і дисперсією «одиниця»; x – випадкова величина з розподілом Джонсона; $\gamma, \eta, \varphi, \lambda$ – параметри перетворення або розподілу Джонсона; h – функція з певної сім'ї:

$$h = \begin{cases} \ln(\tilde{x}), & x > \varphi, & \text{для сім'ї } S_L; \\ \ln[\tilde{x}/(1-\tilde{x})], & \varphi < x < \varphi + \lambda, & \text{для сім'ї } S_B; \\ \text{Arsh}(\tilde{x}), & -\infty \leq x \leq +\infty, & \text{для сім'ї } S_U. \end{cases}$$

Тут $\tilde{x} = (x - \varphi)/\lambda$; $\text{Arsh}(\tilde{x}) = \ln(\tilde{x} + \sqrt{\tilde{x}^2 + 1})$.

Оцінки параметрів для обраної сім'ї перетворення (1) можна знайти шляхом розв'язання наступної задачі математичного програмування [5, 6]:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ \sum_{j=1}^m [y(x_j) - f(x_j, \theta)]^2 \right\}. \quad (2)$$

У формулі (2) θ – вектор невідомих параметрів, $\theta = \{\gamma, \eta, \varphi, \lambda\}$; x_j – значення x в середині j -го підінтервалу; $y(x_j)$ – значення ординати гістограми для x_j ; $f(x_j, \theta)$ – вираз функції густини імовірності Джонсона для x_j ; m – кількість підінтервалів гістограми.

Перетворення Бокса–Кокса задається як [6]

$$z = x(\lambda) = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{якщо } \lambda \neq 0; \\ \ln(x), & \text{якщо } \lambda = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Перетворення Менлі задається як

$$z = x(\lambda) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda}, & \text{якщо } \lambda \neq 0; \\ x, & \text{якщо } \lambda = 0. \end{cases} \quad (4)$$

У перетворенні (3) параметр λ визначається шляхом максимізації логарифма функції правдоподібності [6]:

$$l(\lambda) = -\frac{n}{2} \ln \sum_{i=1}^n \frac{(x_i(\lambda) - \bar{x}(\lambda))^2}{n} + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i), \quad (5)$$

де $\bar{x}(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i(\lambda) / n$.

Перетворення Ієо–Джонсона задається як [6]

$$z = x(\lambda) = \begin{cases} \frac{(x+1)^\lambda - 1}{\lambda}, & \text{якщо } \lambda \neq 0, x \geq 0; \\ \ln(x+1), & \text{якщо } \lambda = 0, x \geq 0; \\ \frac{(1-x)^{2-\lambda} - 1}{\lambda - 2}, & \text{якщо } \lambda \neq 2, x < 0; \\ -\ln(1-x), & \text{якщо } \lambda = 2, x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

У перетворенні (6) параметр λ визначається шляхом мінімізації відстані Кульбака–Леблера між нормальним розподілом та розподілом, який перетворюють [6].

Для кожного нормалізуючого перетворення, як правило, використовують свій метод визначення параметрів цих перетворень. У роботі [6] запропоновано у разі як малої, так і великої вибірок знаходити оцінки параметрів усіх перетворень (1), (3), (4) і (6) у результаті розв'язання наступної задачі:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \{ A_z^2 + (\varepsilon_z - 3)^2 \}, \quad (7)$$

де $\theta = \{\gamma, \eta, \varphi, \lambda\}$ для перетворення (1) і $\theta = \lambda$ для перетворень (3), (4) і (6); $A_z = \frac{1}{nS_z^3} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^3$;

$\varepsilon_z = \frac{1}{nS_z^4} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^4$; $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$; $S_z^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2$; $z_i - i$ -ті значення величини z у вибірці довжиною n , $i \in [1, n]$, які обчислюються за перетвореннями (1), (3), (4) або (6).

Але для перетворення Джонсона (1) краще представити вираз (7) як

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \left\{ A_z^2 + (\varepsilon_z - 3)^2 + \bar{z}^2 + (S_z^2 - 1)^2 \right\}. \quad (8)$$

У (8) враховано те, що в (1) z – це нормально розподілена випадкова величина з нульовим математичним сподіванням і одиничною дисперсією.

Оцінювання довірчого інтервалу вибіркового середнього часу виконання проектів підготовки жінок-боксерів високої кваліфікації до змагань будемо виконувати за методом оцінювання довірчих інтервалів статистичних моментів негауссівських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень

[6, 7, 9]. Як емпіричні дані використаємо значення випадкової величини x – часу підготовки (у днях) до 42 змагань з боксу серед жінок майстра спорту міжнародного класу Н. В. Князь, яка є членом Національної збірної України: 19, 23, 14, 11, 31, 14, 10, 8, 12, 10, 14, 8, 17, 10, 11, 15, 12, 15, 11, 13, 13, 16, 16, 20, 37, 14, 17, 14, 11, 21, 13, 8, 12, 17, 10, 15, 14, 6, 24, 16, 13, 14.

За вибіркою значень x були обчислені наступні оцінки: $\bar{x} = 14,738$; $S_x^2 = 33,713$; $\hat{\epsilon}_x = 7,23$; $\hat{A}_x = 1,81$. Значення оцінок ексцесу та асиметрії вказують на те, що величина x є негауссівською. Виконаємо її нормалізацію. Результати нормалізації x за перетвореннями (1), (3), (4), (6) та оцінки імовірнісних характеристик z наведені в табл. 1.

Таблиця 1. Результати нормалізації x за перетвореннями (1), (3), (4), (6) та оцінки імовірнісних характеристик z та x

Перетворення	Метод оцінювання параметрів / значення цільової функції	\bar{z}	S_z	$\hat{\epsilon}_z$	\hat{A}_z	D	$[\bar{x}]$
(1) S_U	(8) / $1,95 \cdot 10^{-11}$	$-3 \cdot 10^{-6}$	1,000	3,00	$1,9 \cdot 10^{-7}$	0,076	[3,37; 16,39]
(1) S_B	(8) / 0,693	$-5 \cdot 10^{-8}$	1,000	3,82	0,148	0,104	[13,23; 16,48]
(3)	(5) / $-65,63$	1,81	0,157	3,69	$-0,023$	0,097	[13,23; 16,48]
(3)	(7) / 0,477	1,85	0,166	3,69	0,0055	0,097	[13,23; 16,47]
(4)	(7) / 0,0353	7,92	1,293	3,19	$-0,029$	0,082	[13,35; 16,32]
(6)	(7) / 0,422	1,68	0,115	3,65	$-0,0019$	0,096	[13,24; 16,46]

У табл. 1 також наведені значення D для перевірки гіпотези про нормальність розподілу z за критерієм Колмогорова–Смірнова. Критичне значення $D_{кр} = 0,205$ бралось за таблицею верхніх $100\alpha\%$ -х точок розподілу Колмогорова–Смірнова в залежності від α ($\alpha = 0,05$) і n ($n = 42$). За критерієм Колмогорова–Смірнова нормальний закон розподілу з довірчою ймовірністю 0,95 мають ті вибірки z , для яких $D \leq D_{кр}$. А це всі вибірки z . Але найменше значення D у вибірки z , що отримана завдяки нормалізуючому перетворенню Джонсона із сім'ї S_U . Крім того, на відміну від інших вибірок, для цієї вибірки значення оцінок асиметрії та ексцесу практично такі ж, як і для нормального розподілу.

За розв'язком задачі (8) значення параметрів γ , η , λ і ϕ для перетворення (1) із сім'ї S_U є такими: $\gamma = -1,1869$, $\eta = 1,3353$, $\phi = 9,6184$, $\lambda = 3,8326$, а для (1) із сім'ї S_B – такими: $\gamma = 15,0818$, $\eta = 2,4237$, $\phi = 2,0301$, $\lambda = 5882,37$. Параметр λ для (3) має такі значення: $\lambda = -0,3001$ за розв'язком задачі (5) і $\lambda = -0,2796$ за розв'язком задачі (7). Значення λ інших перетворень за розв'язком задачі (7) є такими: $\lambda = -0,08818$ для (4) і $\lambda = -0,3844$ для (6).

У табл. 1 також наведено довірчі інтервали вибіркового середнього $[\bar{x}]$ з імовірністю 0,95, найменші з яких отримано у разі застосування перетворення Менлі та перетворення Джонсона із сім'ї S_U . Якщо вважати, що x має нормальний розподіл, як це зазвичай робиться при непараметричному оцінюванні [4], то з імовірністю 0,95 маємо $[\bar{x}] = [12,93; 16,55]$, тобто

отримуємо збільшення довжини довірчого інтервалу в 1,2 разу в порівнянні з оцінкою на основі застосування перетворення Джонсона із сім'ї S_U . Такий результат можна пояснити значно більшим значенням ексцесу, що визначається за вибіркою x , у порівнянні з ексцесом для нормального розподілу. Потрібно зазначити і те, що у разі припущення про нормальний розподіл для величини x , отримуємо довірчий інтервал, який є симетричним відносно \bar{x} . А це неправильно, тому що маємо за вибіркою x велику асиметрію – $\hat{A}_x = 1,81$. І навпаки, довірчий інтервал, отриманий за перетворенням Джонсона із сім'ї S_U , є несиметричним відносно \bar{x} .

Отже, для розглянутих даних найкращі результати дає нормалізуюче перетворення Джонсона (1) із сім'ї S_U . Крім того, вибір цього перетворення обумовлений також тим, що воно, на відміну від інших, є бієктивним і дозволяє отримувати ізоморфні множини значень.

ВИСНОВКИ

Здійснено вибір нормалізуючого перетворення для оцінювання довірчого інтервалу вибіркового середнього часу виконання проектів підготовки жінок-боксерів високої кваліфікації до змагань. Як таке обрано перетворення Джонсона із сім'ї S_U . У подальшому планується уточнити отримані результати за рахунок застосування нових емпіричних даних та використати їх при побудові негауссівських моделей тривалості тренувань для управління часом у проектах підготовки жінок-боксерів високої кваліфікації до змагань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] Бахарев, Б. В. Оптимизация нормализующего преобразования пуассоновского процесса для оценки доверительного интервала неслучайного отклонения [Текст] / Б. В. Бахарев, А. Э. Ковалев // Математические заметки. – 1992. – Т. 51. – Выпуск 2. – С. 144–146.

- [2] Бокс: жінки [Текст] : навчальна програма для дитячо-юнацьких спортивних шкіл, спеціалізованих дитячо-юнацьких шкіл олімпійського резерву, шкіл вищої спортивної майстерності / М. О. Ділення, В. М. Ост'янов, Г. І. Комісаренко [та ін.]. – К. : Нац. Олімпійський комітет України, 2009. – 112 с.
- [3] Джероян, Г. О. Предсоревновательная подготовка боксеров [Текст] / Г. О. Джероян, Н. А. Худадов. – М. : Физкультура и спорт, 1971. – 150 с.
- [4] Орлов, А. И. Прикладная статистика [Текст] : учебник / А. И. Орлов. – М. : Экзамен, 2004. – 656 с.
- [5] Приходько, С. Б. Інтервальне оцінювання параметрів стохастичних диференціальних систем на основі модифікації узагальненого методу моментів [Текст] / С. Б. Приходько // Матеріали XIII Міжнар. конф. з автоматичного управління (Автоматика-2006), м. Вінниця, 25–28 вересня 2006 року. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – С. 69–75.
- [6] Приходько, С. Б. Інтервальне оцінювання статистичних моментів негаусівських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень [Текст] / С. Б. Приходько // Математичне моделювання : наук. журнал. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2011. – № 1 (24). – С. 9–13.
- [7] Приходько, С. Б. Вибір нормалізуючого перетворення для визначення часу затримок виконання програмних проектів [Текст] / С. Б. Приходько, А. В. Пухалевич, Н. В. Негара // Зб. наук. праць НУК. – Миколаїв : Вид-во НУК, 2011. – № 3 (438). – С. 124–129.
- [8] Приходько, С. Б. Выбор нормализующего преобразования для оценки продолжительности работ при управлении временем в проектах разработки конструкторской документации судна [Текст] / С. Б. Приходько, О. О. Кудин // Зб. наук. праць НУК. – Миколаїв : Вид-во НУК, 2011. – № 4 (439). – С. 140–145.
- [9] Приходько, С. Б. Выбор нормализующего преобразования для оценки времени наработки между отказами устройств терминальной сети в случае малой выборки [Текст] / С. Б. Приходько, Л. Н. Макарова // Вестник ХНТУ. – Херсон : ХНТУ, 2013. – № 1 (46). – С. 308–312.
- [10] Johnson, R. A. Applied Multivariate Statistical Analysis [Text] / R. A. Johnson, D. W. Wichern. – Pearson Prentice Hall, 2007. – 800 p.

© С. Б. Приходько, Н. В. Князь

Надійшла до редколегії 06.07.2014

Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК
д-р техн. наук, проф. К. В. Кошкін