

DOI 10.15589/jnn20150302  
 УДК 624.04  
 С59

## THE MODIFIED CROSS SECTION METHOD FOR CALCULATION OF INTERNAL FORCES AND DISPLACEMENTS OF DEFORMABLE BODIES

## МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД СЕЧЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Valerii M. Sokov  
 valera.sokov@gmail.com  
 ORCID: 0000-0003-3933-879X

В. Н. Соков  
 науч. сотр., ассист.

*Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv*  
 Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, г. Николаєв

**Abstract.** The modified variant of cross section method for the determination of internal forces and displacements in solid deformable bodies has been presented. The presented variant is more flexible, less laborious and more amenable for algorithmization than existing variants. Within the framework of the presented variant of cross section method, the unified formulas for internal forces and kinematic parameters are developed. These formulas can be applied for statically determined and statically non-determined systems. The presented modification of the cross section method is clearer and better for understanding in the process of studying in comparison with existing variants as well. Consequently, it can be realized easier on computer and takes less recourses than current classic methods.

**Keywords:** strength of materials; cross section method; internal forces; displacements; algorithmization; method of boundary parameters.

**Аннотация.** Представлен модифицированный вариант метода сечений для нахождения внутренних силовых факторов и перемещений в твердых деформируемых телах. Предложенная модификация метода является универсальной, менее трудоемкой и легче поддающейся алгоритмизации, нежели существующие на сегодняшний день варианты. Как следствие, она проще реализуема на ЭВМ и требует меньше ресурсов вычислительной машины по сравнению с применяемыми традиционно способами.

**Ключевые слова:** сопротивление материалов; метод сечений; внутренние усилия; перемещения; алгоритмизация; метод граничных параметров.

**Анотація.** Представлено модифікований варіант методу перерізів для знаходження внутрішніх силових факторів і переміщень у твердих деформовуваних тілах. Запропонована модифікація методу перерізів є універсальною, менш трудоемкою і легше піддатною до алгоритмізації, ніж наявні на сьогодні варіанти. Як результат, вона простіше реалізовувана на ЕОМ і потребує менше ресурсів обчислювальної машини порівняно з іншими традиційно застосовуваними способами.

**Ключові слова:** опір матеріалів; метод перерізів; внутрішні зусилля; переміщення; алгоритмізація; метод граничних параметрів.

### REFERENCES

- [1] Bazhenov V.A., Orobey V.F., Dashchenko A.F., Kolomiyets L.V. *Stroitel'naya mekhanika. Spetsialnyy kurs. Primeneniye metoda granichnykh elementov* [Structural mechanics. Special course. Application of the method of boundary elements]. Odessa, Astroprint Publ., 2001. 288 p.
- [2] Gorshkov A.G., Troshin V.N., Shalashilin V.I. *Soprotivleniye materialov* [Strength of materials]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005. 544 p.
- [3] Zhukov V.G. *Mekhanika. Soprotivleniye materialov* [Mechanics. Strength of materials]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2012. 416 p.
- [4] Pysarenko H.S., Kvitka O.L., Umanskyi E.S. *Opir materialiv* [Strength of materials]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 2004. 655 p.
- [5] Pustynnikov V.I. *Teoriya i praktika postroyeniya epyur (vvedeniye v soprotivleniye materialov)* [Theory and practice of diagram construction (Introduction to Strength of Materials)]. Kharkov, Tornado Publ., 1999. 224 p.
- [6] Gustavo Mendes, Bruno Lago. *Strength of Materials*. New York, Nova Science Publ. Inc, 2009. 272 p.
- [7] Vitor Dias da Silva. *Mechanics and Strength of Materials*. New York, Springer Berlin Heidelberg Publ., 2006. 531 p.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Метод сечений является универсальным в механике как твердого деформируемого, так и недеформируемого тела, и наряду со сложными численными методами позволяет относительно просто и точно рассчитать напряженно-деформированное состояние реального тела. Суть метода сечений для нахождения внутренних силовых факторов в твердых телах общеизвестна, однако практических приемов для расчета внутренних усилий и перемещений не так уж много. Большинство из них основаны на широкоприменяемом классическом способе сечений, методе граничных параметров [1, 5], а также других способах и методах, которые дают более грубые законы внутренних усилий и перемещений в пределах тела (например, таких как методы конечных элементов и конечных разностей и т. д.). Вышеупомянутый метод сечений может оказаться довольно ресурсоемким для ЭВМ и трудоемким для ручного счета при большом количестве участков разделений сплошного тела и разнообразной сложной нагрузке. Метод граничных параметров, представленный, например, в [1, 5], является усложненным для первого ознакомления с практическими приемами нахождения внутренних усилий. Возникает задача разработки простой и эффективной реализации метода сечений, которая легко может быть применима для воплощения на ЭВМ и для ручного счета.

## АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Анализ показал, что практические реализации метода сечений почти не развиваются в механике твердого тела.

Исключением служат, например, [1, 5] и другие публикации по методу граничных параметров здесь не упоминаемые, где описаны оригинальные эффективные способы построения законов внутренних усилий, которые могут быть легко алгоритмизированы. При этом в источниках [1, 5] мало уделяется внимания определению перемещений, вызванных внутренними усилиями. Беря за основу метод граничных параметров, автор разработал простой практический вариант метода сечений.

Анализ таких серьезных общепризнанных и широко известных изданий, как [2–4, 6], и других многочисленных отечественных и всевозможных иностранных источников, периодических изданий, конспектов лекций, неофициальных и электронных ресурсов и т. д. как отечественных, так и иностранных в поиске новых разновидностей метода сечений не дал положительных результатов. Более того, в существующей литературе по строительной механике и сопротивлению материалов даже классический метод сечений теоретически описан недостаточно полно и не ох-

ватывает некоторые аспекты этого вопроса. И лишь редкие источники, не упоминаемые здесь, посвящены алгоритмизации метода сечений в сопротивлении материалов и строительной механике в целом.

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ** — представление модифицированного метода сечений, более универсального, менее трудоемкого и легче поддающегося алгоритмизации по сравнению с вариантами, которые применяются в настоящее время.

## ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

В предлагаемом модифицированном варианте метода сечений, основанном на методе граничных параметров, начальные параметры введены неявно и, по сути, он является разновидностью классического метода сечений, например, в [1–7]. Этот способ применим к твердым массивным телам, а также к упрощенным моделям, таким как стержни, пластины, оболочки.

Изложение модифицированного метода сечений произведем на примере стержня. Пусть дан некоторый произвольно закрепленный по торцам стержень, разделенный на  $n$  участков. Вдоль стержня могут действовать как сосредоточенные, так и распределенные внешние нагрузки и температурное поле. Стержень имеет некий закон распределения геометрических параметров поперечного сечения по длине. Принцип деления на участки также общеизвестен. Границы участков выделяются: по торцам (концам) стержня, в месте приложения внешних сосредоточенных силовых факторов, в начале и конце законов распределенных нагрузок, геометрических параметров поперечных сечений и температурного поля.

Для определенности будем рассматривать правую систему декартовых координат. Пусть принято некоторое правило для внутренних силовых факторов, которое представлено на рис. 1, где показаны две части стержня, мысленно рассеченного поперечной плоскостью, действие одной части на другую заменено внутренними силовыми факторами. Сосредоточенные силы и моменты на рис. 1 и далее в статье изображены векторами и обозначены жирным шрифтом. Оси  $y$  и  $z$  являются главными центральными, а ось  $x$  — продольной.

Правила знаков применяются в частности в сопротивлении материалов как для прямолинейных, так и для криволинейных стержней. На рис. 1 введены следующие обозначения:

$N_x$  — внутренние осевые силы,  $N$ , направленные вдоль оси  $x$ ;

$Q_y$  — внутренние сдвигающие силы,  $N$ , направленные вдоль оси  $y$ ;

$Q_z$  — внутренние сдвигающие силы,  $N$ , направленные вдоль оси  $z$ ;

$M_x$  — внутренние крутящие моменты,  $N \cdot m$ ;

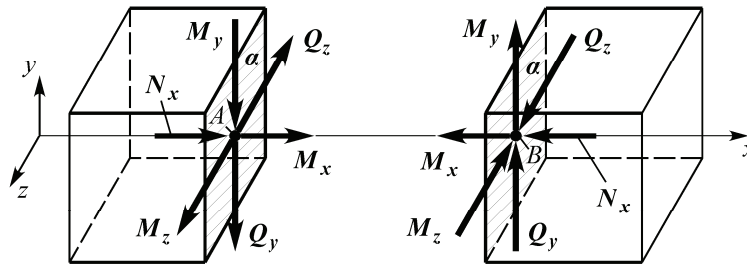


Рис. 1. Положительные направления внутренних силовых факторов

$M_y$  — внутренние изгибающие моменты, Н·м, относительно оси  $y$ ;

$M_z$  — внутренние изгибающие моменты, Н·м, относительно оси  $z$ .

Направления внутренних изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ , обозначенных на рис. 1, устроены так, чтобы верхние волокна стержня были всегда сжаты относительно принятых осей, что удобно для вычисления нормальных напряжений. При принятом правиле знаков для  $M_y$  и  $M_z$  нормальные напряжения вычисляются по формулам:

$$\sigma_x(M_z) = -\frac{M_z y}{I_z}, \quad \sigma_x(M_y) = -\frac{M_y z}{I_y},$$

где  $y$  и  $z$  — координаты, которые отсчитываются от нейтральных осей стержня;  $I_y, I_z$  — главные центральные моменты инерции относительно соответствующих осей. Вышеупомянутые внутренние усилия далее в статье будут иметь дополнительную индексацию.

Ниже кратко представлен алгоритм модифицированного метода сечений. Изложение данного алгоритма привязано к рис. 2, а пояснения к данному рисунку приведены после алгоритма.

1. Выделить и последовательно пронумеровать участки.

2. Ввести глобальную координатную систему стержня (тела) обозначив начала участков относительно глобальных осей, а также ввести при необходимости глобальные криволинейные координаты для криволинейных стержней и оболочек.

3. Ввести произвольную локальную координатную систему для данного  $i$ -го рассматриваемого участка. На практике для получения унифицированных формул лучше вводить локальную координатную систему посредством параллельного сдвига глобальной координатной системы (как прямолинейной, так и криволинейной) к началу данного участка. При этом координата вдоль оси стержня для этого рассматриваемого участка отсчитывается от нуля, а для криволинейных стержней и оболочек еще и следует подвижному реперу вдоль их криволинейной оси или поверхности. Подвижной репер же определен относительно полу-

ченных локальных координатных осей, а натуральный параметр кривой, которая описывает криволинейный стержень, начинается с нуля.

4. Определить и записать законы для распределенных нагрузок, геометрических параметров поперечных сечений и температурного поля относительно локальной координатной системы для данного  $i$ -го рассматриваемого участка, а для криволинейных стержней и оболочек или криволинейных координат еще и относительно подвижного локального репера.

5. Отбросить все предыдущие, уже рассчитанные участки и последующие, еще не рассчитанные, относительно данного  $i$ -го участка, и, таким образом, рассматривать данный участок изолированно (см. рис. 2).

6. Заменить действие отброшенных частей на данный  $i$ -й участок реактивными усилиями согласно правилам знаков (см. рис. 1, 2).

7. Поместить имеющиеся на границе данного  $i$ -го и предыдущего ( $i - 1$ )-го участков сосредоточенные силовые факторы в начало координат для данного  $i$ -го участка.

8. Найти реакции на границе предыдущего ( $i - 1$ )-го и рассматриваемого  $i$ -го участка в плоскости  $\gamma$  от отброшенной предыдущей, уже рассчитанной части стержня (см. п. 6, а также рис. 2) из расчета предыдущего участка.

9. Составить уравнения равновесия для данного  $i$ -го рассматриваемого участка и выразить неизвестные внутренние силовые факторы через известные силовые параметры. Определить при необходимости кинематические параметры, которые зависят от внутренних силовых усилий. Подробно п. 9 пояснен ниже.

10. Рассчитать все участки последовательно, начиная с 1-го и заканчивая последним, без пропуска какого-либо участка, т. е. повторить пункты 3–9  $n$  раз, где  $n$  — заданное количество участков.

Расчет внутренних силовых факторов можно произвести как с одного торца стержня, так и с другого.

На рис. 2 представлен выделенный данный  $i$ -й участок стержня со всеми обозначениями. Координатная система  $xuz$  является локальной координатной системой для  $i$ -го участка, которая начинается на гра-

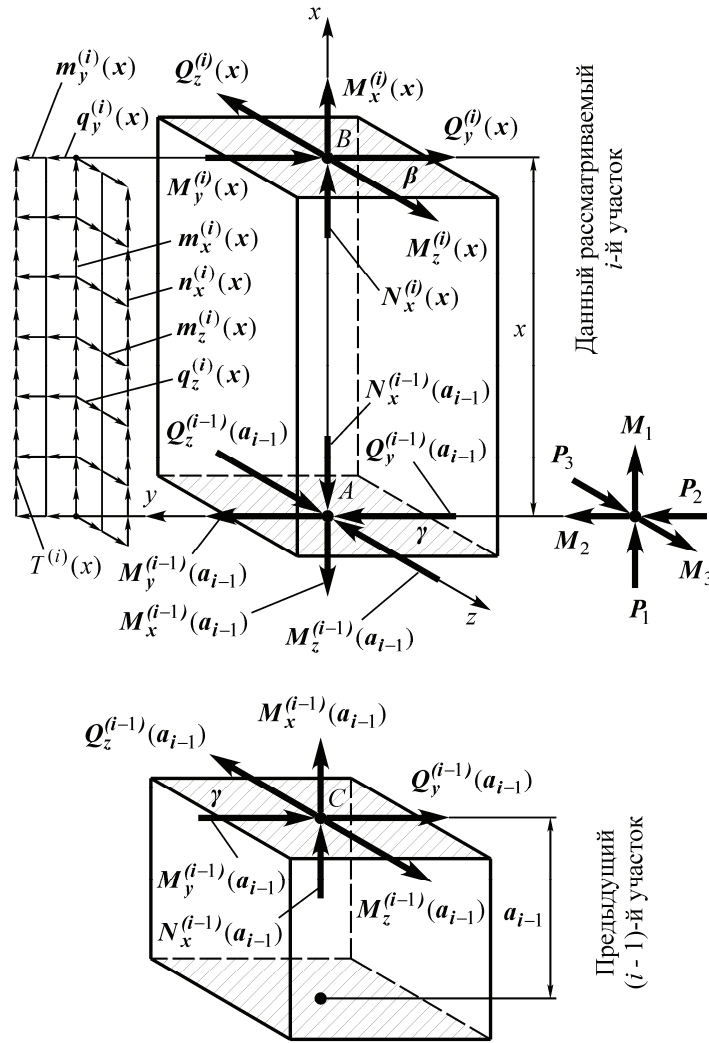


Рис. 2. Выделенный  $i$ -й участок стержня

нице данного  $i$ -го и предыдущего  $(i - 1)$ -го участков, в точке  $A$  плоскости  $\gamma$ . Осью  $x$  является продольной осью стержня. Оси  $y$  и  $z$  — главные центральные оси стержня.

Ниже пояснены величины, которые изображены на рис. 2:  $P_1, P_2, P_3$  — суммы всех внешних сосредоточенных сил на границе данного  $i$ -го и предыдущего  $(i - 1)$ -го участков соответственно по осям  $x, y, z$ ;  $M_1, M_2, M_3$  — суммы всех внешних сосредоточенных моментов на границе данного  $i$ -го и предыдущего  $(i - 1)$ -го участков соответственно по осям  $x, y, z$ ;  $n_x^{(i)}(x), q_y^{(i)}(x), q_z^{(i)}(x)$  — суммы линейных распределенных нагрузок, Н/м, вдоль оси стержня относительно соответствующих осей;  $m_x^{(i)}(x), m_y^{(i)}(x), m_z^{(i)}(x)$  — суммы распределенных моментных нагрузок, Н, вдоль оси стержня относительно соответствующих осей.

Законы  $n_x^{(i)}(x), q_y^{(i)}(x), q_z^{(i)}(x), m_x^{(i)}(x), m_y^{(i)}(x), m_z^{(i)}(x)$  записаны относительно локальных координат

для рассматриваемого  $i$ -го участка, а координата  $x$  определена в пределах  $x \in [0; a_i]$ , где  $a_i$  — длина рассматриваемого участка. Например, величина  $n_x^{(i)}(x)$ , которая представляет собой распределенную нагрузку вдоль оси  $x$ , Н/м, для  $i$ -го участка, рассчитывается по формуле:

$$n_x^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{j=S} n_{jx}^{(i)}(x), \quad (1)$$

где  $n_{jx}^{(i)}(x)$  — законы осевых усилий определены относительно локальных осей для данного  $i$ -го участка;  $j$  — номер осевого усилия, а  $S$  — количество законов  $n_{jx}^{(i)}(x)$ , которые действуют в пределах рассматриваемого участка.

По формуле, аналогичной (1), находим и остальные распределенные нагрузки, в частности  $T^{(i)}(x)$  — распределенное температурное поле,  $K$  — вычисляется по формуле, аналогичной (1), закон которого также записан относительно локальных координат для данного  $i$ -го участка. Кроме того, на рис. 2  $\gamma$  — попереч-

ная плоскость на границе отброшенного и данного участков, положение которой не изменяется в процессе расчета;  $\beta$  — подвижная поперечная плоскость, положение которой зависит от продольной координаты  $x$ ; продольная координата  $x$  определена в области  $x \in [0; a_i]$ , где  $a_i$  — длина данного  $i$ -го участка. Внешние сосредоточенные нагрузки  $P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3$  приложены к центру тяжести  $A$  плоскости  $\gamma$  рассматриваемого участка (на рис. 2 эти нагрузки показаны чуть в стороне). Величины  $M_x^{(i-1)}(a_{i-1}), M_y^{(i-1)}(a_{i-1}), M_z^{(i-1)}(a_{i-1}), N_x^{(i-1)}(a_{i-1}), Q_y^{(i-1)}(a_{i-1}), Q_z^{(i-1)}(a_{i-1})$  — внутренние силовые факторы, которые возникают на границе данного  $i$ -го участка и предыдущего ( $i-1$ )-го (в плоскости  $\gamma$ ), при отбрасывании предыдущего ( $i-1$ )-го участка, где  $a_{i-1}$  — длина предыдущего ( $i-1$ )-го участка. Значения этих силовых факторов находятся из расчета отброшенного ( $i-1$ )-го участка и являются постоянными в процессе расчета данного  $i$ -го участка.  $M_x^{(i)}(x), M_y^{(i)}(x), M_z^{(i)}(x), N_x^{(i)}(x), Q_y^{(i)}(x), Q_z^{(i)}(x)$  — внутренние силовые факторы, которые возникают при отбрасывании последующей части стержня и есть функциями от  $x$ . Необходимо учитывать, что область определения для функций  $M_x^{(i)}(x), M_y^{(i)}(x), M_z^{(i)}(x), N_x^{(i)}(x), Q_y^{(i)}(x), Q_z^{(i)}(x)$  всегда лежит в пределах рассматриваемого  $i$ -го участка, т. е.  $x \in [0; a_i]$ .

Ниже представлены шесть уравнений равновесия для  $i$ -го рассматриваемого участка, составленные, опираясь на рис. 2. Некоторые величины в данных формулах определены выше и поэтому не поясняются.

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Сил}_x = 0: & -N_x^{(i-1)}(a_{i-1}) + P_1 + \int_0^x n_x^{(i)}(x)dx + \\ & + N_x^{(i)}(x) = 0 \Rightarrow N_x^{(i)}(x) = \dots, \quad x \in [0; a_i] \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Сил}_y = 0: & Q_y^{(i-1)}(a_{i-1}) + P_2 + m_z^{(i)}(x) + \\ & + \int_0^x q_y^{(i)}(x)dx - Q_y^{(i)}(x) = 0 \Rightarrow Q_y^{(i)}(x) = \dots \\ & x \in [0; a_i]. \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Сил}_z = 0: & Q_z^{(i-1)}(a_{i-1}) + P_3 + m_y^{(i)}(x) + \\ & + \int_0^x q_z^{(i)}(x)dx - Q_z^{(i)}(x) = 0 \Rightarrow Q_z^{(i)}(x) = \dots \\ & x \in [0; a_i]. \end{aligned} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Моментов}_x = 0: & -M_x^{(i-1)}(a_{i-1}) + M_1 + \\ & + \int_0^x m_x^{(i)}(x)dx + M_x^{(i)}(x) = 0 \Rightarrow M_x^{(i)}(x) = \dots \\ & x \in [0; a_i]. \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Моментов}_{yB} = 0: & M_y^{(i-1)}(a_{i-1}) + M_2 + \\ & + Q_z^{(i-1)}(a_{i-1})x + P_3x + \int_0^x m_y^{(i)}(x)dx + \\ & + \left( \int_0^x q_z^{(i)}(x)dx \right) \cdot \left( x - \frac{\int_0^x q_z^{(i)}(x)dx}{\int_0^x q_z^{(i)}(x)dx} \right) - \\ & - M_y^{(i)}(x) = 0 \Rightarrow M_y^{(i)}(x) = \dots, \quad x \in [0; a_i]. \end{aligned} \right\} (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Моментов}_{zB} = 0: & -M_z^{(i-1)}(a_{i-1}) + M_3 - \\ & - Q_y^{(i-1)}(a_{i-1})x - P_2x + \int_0^x m_z^{(i)}(x)dx - \\ & - \left( \int_0^x q_y^{(i)}(x)dx \right) \cdot \left( x - \frac{\int_0^x q_y^{(i)}(x)dx}{\int_0^x q_y^{(i)}(x)dx} \right) + \\ & + M_z^{(i)}(x) = 0 \Rightarrow M_z^{(i)}(x) = \dots, \quad x \in [0; a_i]. \end{aligned} \right\} (7)$$

Запись  $\sum \text{Сил}_x = 0$  — означает сумму всех сил в проекции на ось  $x$ , а запись  $\sum \text{Моментов}_{yB} = 0$  — сумму всех моментов в проекции на ось  $y$  относительно точки  $B$ . Аналогично и другие записи в (2)–(7).

Абсолютные кинематические параметры находятся по общей формуле, которую можно представить в виде:

$$v_j^{(i)}(x) = v_j^{(i-1)}(a_{i-1}) + \int_0^x f_j^{(i)}(x) dx, \quad x \in [0; a_i], \quad (8)$$

где  $v_j^{(i)}(x)$  — некоторое абсолютное перемещение относительно оси  $j$  для рассматриваемого  $i$ -го участка, определенное как функция от  $x$ ;  $v_j^{(i-1)}(a_{i-1})$  — значение перемещения в начале локальных координат для рассматриваемого  $i$ -го участка, которое равно перемещению в конце предыдущего ( $i-1$ )-го участка;  $f^{(i)}(x)$  — некоторая функция, найденная в локальной системе координат, для  $i$ -го участка. Это может быть

функция от внутренних усилий, геометрических параметров поперечного сечения, температуры, а также от другого перемещения.

Далее формула (8) расписана подробнее применительно к основным видам деформирования стержня. Некоторые величины в нижеприведенных формулах определены выше и поэтому не поясняются, а значения остальных параметров ясны из общей формулы (8).

Осевое перемещение  $u$ ,  $m$ , а также осевая линейная деформация  $\varepsilon$  при простом растяжении-сжатии стержня находятся из выражений:

$$u_x^{(i)}(x) = u_x^{(i-1)}(a_{i-1}) + \int_0^x \frac{N_x^{(i)}(x)}{EF^{(i)}(x)} dx + \int_0^x T^{(i)}(x) \alpha dx, \quad x \in [0; a_i], \quad (9)$$

$$\varepsilon_x^{(i)}(x) = \frac{du_x^{(i)}(x)}{dx}, \quad x \in [0; a_i], \quad (10)$$

где  $E$  — модуль Юнга, Па;  $F^{(i)}(x)$  — площадь поперечного сечения, м<sup>2</sup>;  $T^{(i)}(x)$  — температурное поле, К;  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения К<sup>-1</sup>.

Угол поворота  $\varphi$ , рад, а также погонный угол закручивания  $\theta$ , рад/м, при кручении стержня (как с круглым поперечным сечением, так и с некруглым) рассчитываются следующим образом:

$$\varphi_x^{(i)}(x) = \varphi_x^{(i-1)}(a_{i-1}) + \int_0^x \frac{M_x^{(i)}(x)}{GI_\rho^{(i)}(x)} dx, \quad x \in [0; a_i], \quad (11)$$

$$\theta_x^{(i)}(x) = \frac{d\varphi_x^{(i)}(x)}{dx}, \quad x \in [0; a_i], \quad (12)$$

где  $G$  — модуль сдвига, Па;  $I_\rho^{(i)}(x)$  — полярный момент инерции, м<sup>4</sup>.

Углы поворотов поперечных сечений  $\theta$ , рад, и прогибы  $w$  и  $v$ , м, при изгибе как в одной, так и в другой главных плоскостях могут быть определены из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \theta_y^{(i)}(x) &= \theta_y^{(i-1)}(a_{i-1}) + \int_0^x \frac{M_y^{(i)}(x)}{EI_y^{(i)}(x)} dx, \\ \theta_z^{(i)}(x) &= \theta_z^{(i-1)}(a_{i-1}) + \int_0^x \frac{M_z^{(i)}(x)}{EI_z^{(i)}(x)} dx, \quad x \in [0; a_i]. \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned} v^{(i)}(x) &= v^{(i-1)}(a_{i-1}) + \int_0^x \theta_z^{(i)}(x) dx, \\ w^{(i)}(x) &= w^{(i-1)}(a_{i-1}) + \int_0^x \theta_y^{(i)}(x) dx, \quad x \in [0; a_i], \end{aligned} \right\} (14)$$

$I_y^{(i)}(x)$  и  $I_z^{(i)}(x)$  — главные центральные моменты инерции относительно соответствующих осей, м<sup>4</sup>, для  $i$ -го участка.

Иллюстрация изложенного способа нахождения внутренних силовых факторов в телах представлена ниже на простом примере (рис. 3).

Дано:  $P = 1000$  Н;  $M_2 = 2000$  Н·м; распределенная поперечная нагрузка  $q(x) = 90x$ , Н/м, задана относительно осей, которые начинаются в точке  $B$  и параллельны глобальным осям стержня; материал: сталь,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $I(x) = 2 \cdot 10^{-7}$  м<sup>4</sup> — главный центральный момент инерции относительно главной оси  $z$  (см. рис. 2);  $a = 1,0$  м;  $b = 2,0$  м;  $c = 3,0$  м.

Найти: внутренние изгибающие моменты  $M(x)$ , внутренние перерезывающие силы  $N(x)$ , углы поворота  $\theta(x)$  и прогибы  $w(x)$ .

Решение: отбрасываем связи и заменяем систему статически эквивалентной, а также разделяем стержень на участки (см. рис. 3, б, 4). На рис. 4 обозначен  $I(x)$  — главный центральный момент инерции относительно оси  $z$  (см. рис. 2). Дополнительная индексация сил и перемещений по осям опущена.

Находим реакции  $R_A, R_D$  из уравнений статики.

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Моментов}_A = 0: & -Pa + \left( \int_0^b q(x) dx \right) \times \\ & \times \left( a + \frac{\int_0^b q(x) x dx}{\int_0^b q(x) dx} \right) - M + R_D(a+b+c) = \\ & = 0 \Rightarrow R_D = 430,0 \text{ Н}. \end{aligned} \right\} (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Моментов}_D = 0: & -R_A(a+b+c) + \\ & + P(b+c) - \left( \int_0^b q(x) dx \right) \cdot \left( b+c - \frac{\int_0^b q(x) x dx}{\int_0^b q(x) dx} \right) - \\ & - M = 0 \Rightarrow R_A = 390,0 \text{ Н}. \end{aligned} \right\} (16)$$

Участок  $I$  ( $0 \leq x < a$ ) (см. рис. 4).

Начало координат  $x$  для  $I$ -го участка полагаем в точке  $A$ .

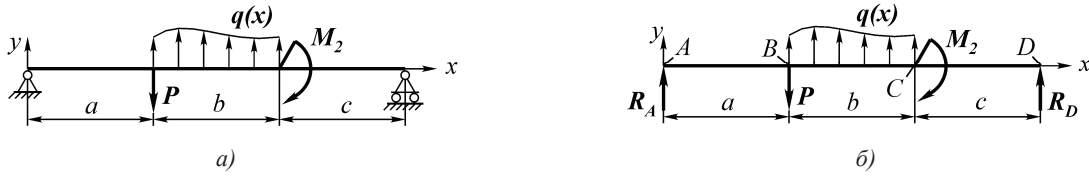


Рис. 3. Заданная балка:  
 а — начальная схема; б — статически эквивалентная расчетная схема

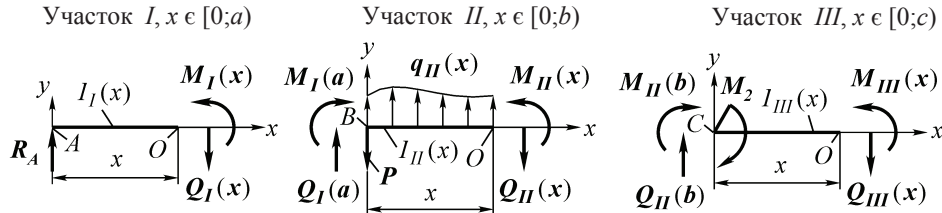


Рис. 4. Балка, разделенная по участкам для модифицированного метода сечений

$$\sum \text{Сил}_y = 0: R_A - Q_I(x) = 0 \Rightarrow Q_I(x) = R_A = 390H, \quad x \in [0; 1]. \quad (17)$$

$$\sum \text{Моментов}_{zO} = 0: -R_A x + M_I(x) = 0 \Rightarrow M_I(x) = R_A x = 390x, \text{ Нм}, \quad x \in [0; 1]. \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_I(x) &= \theta_0 + \int_0^x \frac{M_I(x)}{EI_I(x)} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow |I_I(x) &= I = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4| \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_I(x) &= \theta_0 + \int_0^x 9,750 \cdot 10^{-3} x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta_I(x) &= \theta_0 + 4,875 \cdot 10^{-3} x^2, \text{ рад}, \quad x \in [0; 1]. \end{aligned} \right\} (19)$$

В выражении (19)  $\theta_0$  — неизвестный пока угол поворота левого шарнира, который найдется позже.

$$\left. \begin{aligned} w_I(x) &= w_0 + \int_0^x \theta_I(x) dx \Rightarrow |w_0 = 0| \Rightarrow \\ \Rightarrow w_I(x) &= \theta_0 x + 1,625 \cdot 10^{-3} x^3, \text{ м}, \quad x \in [0; 1]. \end{aligned} \right\} (20)$$

Участок II ( $0 \leq x < b$ ) (см. рис. 4).

Сдвигаем начало координат к началу II-го участка в точку B, отбрасываем левую и правую части, переписываем законы  $I(x)$  и  $q(x)$  для данного участка, учитывая сдвиг осей. При отбрасывании слева участка I на левом торце участка II вводятся реактивные усилия внутренних сил  $M_I(a)$  и  $Q_I(a)$  согласно правилу знаков, показанному на рис. 1.

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Сил}_y = 0: Q_I(a) - P + \int_0^x q_{II}(x) dx - \\ - Q_{II}(x) = 0 \Rightarrow |q_{II}(x) = 90x, \text{ Н/м}| \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_{II}(x) = -610 + 45x^2, \text{ Н}, \quad x \in [0; 2]. \end{aligned} \right\} (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Моментов}_{zO} = 0: -M_I(a) - Q_I(a)x + \\ + Px - \left( \int_0^x q_{II}(x) dx \right) \cdot \left( x - \frac{\int_0^x q_{II}(x) x dx}{\int_0^x q_{II}(x) dx} \right) + \\ + M_{II}(x) = 0 \Rightarrow M_{II}(x) = 390 - 610x + \\ + 15x^3, \text{ Нм}, \quad x \in [0; 2]. \end{aligned} \right\} (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{II}(x) &= \theta_I(a) + \int_0^x \frac{M_{II}(x)}{EI_{II}(x)} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow |I_{II}(x) &= I = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4| \Rightarrow \theta_{II}(x) = \\ &= \theta_0 + 4,875 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 10^{-5} (390x - \\ &- 305x^2 + 3,75x^4), \text{ рад}, \quad x \in [0; 2]. \end{aligned} \right\} (23)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{II}(x) &= w_I(a) + \int_0^x \theta_{II}(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow w_{II}(x) &= \theta_0(1+x) + 1,625 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 4,875 \cdot 10^{-3} x + 2,5 \cdot 10^{-5} (195x^2 - \\ &- 101,6x^3 + 0,75x^5), \text{ м}, \quad x \in [0; 2]. \end{aligned} \right\} (24)$$

Участок III ( $0 \leq x < c$ ) (см. рис. 4).

Сдвигаем начало координат к началу III-го участка в точку C, отбрасываем левую и правую части, переписываем закон  $I(x)$ , учитывая сдвиг осей. При отбрасывании слева участка II на левом торце участка III вводятся реактивные усилия внутренних сил  $M_{II}(a)$  и  $Q_{II}(a)$  согласно правилу знаков, показанному на рис. 1.

$$\sum \text{Сил}_y = 0: Q_{II}(b) - Q_{III}(x) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow Q_{III}(x) = Q_{II}(b) = -430H, \quad x \in [0; 3). \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{Моментов}_{zO} = 0: & -M_{II}(b) - Q_{II}(b)x - \\ & -M + M_{III}(x) = 0 \Rightarrow M_{III}(x) = \\ & = 1290 - 430x, \text{ Нм}, \quad x \in [0; 3). \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_{III}(x) &= \theta_{II}(b) + \int_0^x \frac{M_{III}(x)}{EI_{III}(x)} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow |I_{III}(x) &= I = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4| \Rightarrow \theta_{III}(x) = \\ &= \theta_0 - 4,625 \cdot 10^{-3} + 2,5 \cdot 10^{-5} \times \\ &\times (1290x - 215x^2), \text{ рад}, \quad x \in [0; 3). \end{aligned} \right\} (27)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{III}(x) &= w_{II}(b) + \int_0^x \theta_{III}(x) dx \Rightarrow \\ \Rightarrow w_{III}(x) &= \theta_0(3+x) + 1,1141(6) \cdot 10^{-2} - \\ &- 4,625 \cdot 10^{-3}x + 2,5 \cdot 10^{-5} \times \\ &\times (645x^2 - 71,6x^3), \text{ м}, \quad x \in [0; 3). \end{aligned} \right\} (28)$$

Зная, что прогиб на правом шарнире равен нулю, найдем  $\theta_0$ , используя (28). Имеем

$$w_{III}(c) = w_{III}(3) = 0 \rightarrow \theta_0 = -0,015669(4) \text{ рад.}$$

Формулами (17)–(28) представлен массив функций как внутренних силовых, так и кинематических параметров, которые можно использовать для оценки прочности и жесткости рассматриваемой балки.

**ВЫВОДЫ.** Модифицированный способ метода сечений применим для всех твердых тел, имеет простой универсальный алгоритм и формулы, является менее трудоемким по сравнению со способами, которые широко сегодня используются. Предлагаемый вариант метода сечений более простой для понимания в процессе обучения и при ручном счете. Как следствие, он легко реализуем на ЭВМ и менее ресурсоемкий для вычислительной машины. Построение законов внутренних усилий и перемещений сводится к простому циклическому алгоритму, так как при расчете данного участка нужно знать информацию предыдущего участка.

Высокая унификация формул способа упрощает составление алгоритмов для расчета внутренних силовых факторов и перемещений, поиска опасных сечений, расчета жесткости и прочности, расчета статически определимых и неопределимых систем, проведения исследований напряженно деформированного состояния, проведения оптимального проектирования конструкций и т. д. Используя данный способ при проведении вышеперечисленных расчетов, удобно оперировать массивами функций внутренних силовых факторов и перемещений для участков, зная, что все функции начинаются с нуля.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Баженов, В. А.** Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов [Текст] : учебное пособие / В. А. Баженов, В. Ф. Оробей, А. Ф. Дашенко, Л. В. Коломиец. — Одесса : Астропринт, 2001. — 288 с.
- [2] **Горшков, А. Г.** Сопротивление материалов [Текст] : учебное пособие / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. — 2-е изд., испр. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 544 с.
- [3] **Жуков, В. Г.** Механика. Сопротивление материалов [Текст] : учебное пособие / В. Г. Жуков. — СПб. : Издательство «Лань», 2012. — 416 с.
- [4] **Писаренко, Г. С.** Опір матеріалів [Текст] : підручник для студ. мех. спец. вузів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. — 2-ге вид., доп. і перероб. — К. : Вища школа, 2004. — 655 с.
- [5] **Пустынников, В. И.** Теория и практика построения эпюр (введение в сопротивление материалов) [Текст] / В. И. Пустынников. — Харьков : Торнадо, 1999. — 224 с.
- [6] **Gustavo Mendes.** Strength of Materials [Текст] / Gustavo Mendes, Bruno Lago. — New York : Nova Science Publ. Inc, 2009. — 272 p.
- [7] **Vitor Dias da Silva.** Mechanics and Strength of Materials [Текст] / Vitor Dias da Silva. — New York : Springer Berlin Heidelberg, 2006. — 531 p.

© В. М. Соков

Надійшла до редколегії 08.04.2015

Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК д-р техн. наук, проф. *Л. І. Коростильов*