

DOI 10.15589/jnn20170201

УДК 519.87:629.5.01

T78

## MATHEMATICAL MODEL OF TWO CONNECTED ELEMENTS OF THE FLEXIBLE LINKS OF THE MARINE LASH SYSTEM

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИБКОЙ СВЯЗИ МОРСКОЙ ПРИВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ

**Kostiantyn S. Trunin,**  
trunin.konstantin.stanislav@gmail.com  
ORCID: 0000-0001-6345-6257

**К. С. Трунин,**  
канд. техн. наук, доц.

*Admiral Makarov National University of Shipbuilding, Mykolaiv*

*Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, г. Николаев*

**Abstract.** A mathematical model of two connected elements of flexible links (FL) has been developed. This model allows creating the algorithm for computation of the FL dynamics at substantial FL movements. The mathematical model of the marine lash system (MLS) allows solving the following problems: 1. Calculation of variations in the FL shape and tension forces in the process of maneuvering of the tugboat and the underwater vehicle taking into account the sea waves, underwater currents, wind forces affecting the tugboat, sea depth and its variation in a given water area, as well as the FL mass and elastic properties. 2. Calculation of the relative position of the tugboat and the underwater vehicle in the process of their maneuvering. 3. Calculation of the resonance conditions of the FL tension and the maximal FL loads for assessment of its strength in the process of maneuvering of the tugboat and the underwater vehicle. 4. Calculation of the MLS maneuvering conditions causing formation of loops on the FL. 5. Calculation of the MLS maneuvering conditions causing vibration of the high-drag flexible links.

**Keywords:** flexible link (FL); marine lash system (MLS); connected elements of the flexible links; mathematical model of the MLS FL element; FL modeling.

**Аннотация.** Создана математическая модель двух связанных элементов гибкой связи морской привязной системы, которая позволяет разработать алгоритм расчёта динамики гибкой связи при её больших перемещениях.

**Ключевые слова:** гибкая связь; морская привязная система; связанные элементы гибкой связи; математическая модель элемента гибкой связи морской привязной системы; моделирование гибкой связи.

**Анотація.** Створено математичну модель двох зв'язаних елементів гнучкого зв'язку морської прив'язної системи, що дозволяє розробити алгоритм розрахунку динаміки гнучкого зв'язку при його великих переміщеннях.

**Ключові слова:** гнучкий зв'язок; морська прив'язна система; зв'язані елементи гнучкого зв'язку; математична модель елемента гнучкого зв'язку морської прив'язної системи; моделювання гнучкого зв'язку.

### REFERENCES

- [1] Blinov E. I., Kravtsov V. I., Kravtsov A. V., Nedbaylo A. N. *Upravlenie gibkimi protyazhennymi obektami napravlennymi silovymi vozdeystviyami* [Controlling prolonged flexible objects with directed force impacts]. *Sovremennye tekhnicheskie sredstva, komplekсы i sistemy — Modern technical means, complexes and systems*, AAEKS Publ., 2003, no. 1 (11), pp. 43–48.
- [2] Gerts G. *Sootnoshenie mezhdru eksperimentom, modelyu i teoriey v protsesse estestvennogo poznaniya* [Correlation between experiment, model and theory in the process of natural cognition]. Eksperiment. Model.

- Теорія. [Эксперимент. Модель. Теория]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 333 p.
- [3] Poddubnyy V. I., Shamarin Yu. E., Chernenko D. A., Astakhov L. S. *Dinamika podvodnykh buksiruyemykh sistem* [Dynamics of underwater towed systems]. Saint Petersburg, Sudostroyeniye Publ., 1995. 200 p.
- [4] Shamarin Yu. E. et. al. *Dinamika podvodnykh okeanograficheskikh sistem* [Dynamics of underwater oceanographic systems]. Kyiv, 2001. 228 p.
- [5] Ditrikh Ya. *Proektirovaniye i konstruirovaniye: Sistemnyy podkhod: Per. s polsk.* [Design and construction: System approach (translation from Polish)]. Moscow, Mir Publ., 1981. 456 p.
- [6] Dmitrochenko O. N. *Metody modelirovaniya dinamiki gibridnykh sistem tel s uchetom geometricheskoy nelineynosti* [Methods of modelling dynamics of hybrid systems of bodies with account of geometric non-linearity]. *Dinamika, prochnost i nadezhnost transportnykh mashin* [Dynamics, strength and reliability of transport vehicles]. Bryansk, BGTU Publ., 2001, pp. 24–34.
- [7] Kleyton B., Bishop R. *Mekhanika morskikh sudov* [Mechanics of sea-going vessels]. Leningrad, Sudostroyeniye Publ., 1986. 436 p.
- [8] Nemchinov V. S. *Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli* [Economic and mathematical methods and models]. *Ekspyriment. Model. Teoriya*. [Experiment. Model. Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 333 p.
- [9] Kosenkov V. M. *Kratkiy kurs lektsiy po chislennym metodam: uchebnoye posobie* [Short course of lectures on numerical methods: a study guide]. Nikolaev, NUK Publ., 2012. 73 p.
- [10] Krivinskiy B. V. *Sistemnyy podkhod i modelirovaniye — effektivnye metody issledovaniya problem vooruzhennoy borby na more* [System approach and modeling — effective methods of studying the problems of sea combat]. *Morskoy sbornik — Marine Collection*, 1979, no. 11, pp. 20–25.
- [11] Yastrebov V. S. *Printsipy postroyeniya tekhnicheskikh sredstv osvoeniya okeana* [Principles of construction of technical means of ocean exploration]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 325 p.
- [12] Segormikd L. *Primeneniye metoda konechnykh elementov* [Application of the finite element method]. Moscow, Mir Publ., 1979. 392 p.
- [13] Trunin K. S. *Udoskonalenniya metodiv proektuvanniya gnuchkykh zviyazkiv morskyykh pryviaznykh system* [Improvement of design methods for marine tethered systems]. *Materialy Pershoi Mizhnarodnoi NTK «Innovatsii v sudnobuduvanni ta okeanotekhnitsi»* [Proceedings of the 1st International Scientific and Technical Conference «Innovations in Shipbuilding and Ocean Engineering»]. Mykolaiv, 2010. pp. 137–138.
- [14] Trunin K. S. *Klasyfikatsiia morskyykh pryviaznykh system* [Classification of marine lash systems]. *Materialy IV Naukovo-tekhnichnoi konferentsii «Zhyvuchist korablia ta bezpeka na mori» (27.05.–29.05.2009)* [Proceedings of the 4th Scientific and Technical Conference «Ship Damage Control and Maritime Safety» dated 27.05.–29.05.2009]. Sevastopol, Sevastopolskyi viiskovo-morskyi ordena Chervonoj Zirky instytut im. P. S. Nakhimova Publ., 2009, pp. 41–42.
- [15] Trunin K. S. *Matematicheskaya model morskoy pryviaznoy systemy s gibkoy svyazyu* [Mathematical model of the marine tethered system with a flexible connection]. *Innovatsii v sudnobuduvanni ta okeanotekhnitsi: materialy V Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii* [Proceedings of the 5th International Scientific and Technical Conference «Innovations in Shipbuilding and Ocean Engineering»]. Mykolaiv, 2014. pp. 386–388.
- [16] Trunin K. S. *Matematicheskaya model gibkoy svyazi v sostave morskoy pryviaznoy systemy* [Mathematical model of the flexible connection within a marine tethered system]. *Innovatsii v sudnobuduvanni ta okeanotekhnitsi: materialy VI Mizhnarodnoi naukovo-tekhnichnoi konferentsii* [Proceedings of the 6th International Scientific and Technical Conference «Innovations in Shipbuilding and Ocean Engineering»]. Mykolaiv, 2015. pp. 300–304.
- [17] Dmitrochenko O. N., Pogorelov D. Yu. Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics 10, no. 1, Special issue «Virtual Nonlinear Multibody Systems»*, 2003, pp. 17–43.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Использование математических моделей (ММ) находит всё большее применение в различных областях науки и техники. ММ позволяет при минимальных затратах времени и средств теоретически проверить по выбранному критерию проект с учетом любых его изменений без необходимости строить и испытывать

физическую модель [7, с. 6]. Метод моделирования наилучшим образом зарекомендовал себя и широко используется в настоящее время.

Математическое моделирование при проектировании в большинстве случаев дает возможность отказаться от физического моделирования, значительно сократить объемы испытаний и доводочных работ, обеспечить создание технических объектов с высоки-

ми показателями эффективности и качества. Одним из основных компонентов системы проектирования в этом случае становится ММ [5, с. 8].

Моделирование — это особый вид эксперимента, проводимого не на реальном объекте, а на некотором его аналоге, т. е. на модели, которая является одновременно и средством, и предметом исследования. Особенно большое значение оно имеет для изучения объектов и процессов, где прямой эксперимент затруднен или вообще невозможен.

### АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Как отмечает В. С. Немчинов, «построение модели, с одной стороны, — важная ступень к созданию теории, а с другой — одно из средств экспериментального исследования. Однако никакая модель не может заменить строгой научной теории» [8, с. 32].

Модели представляют собой продукты материального или идеального воспроизводства возможных и реальных процессов отношений и функций субъектом познания с помощью аналогий (гомологий) или использования таких аналогий (гомологий) в других материальных и идеальных системах. Тем самым мы выражаем несогласие с ограничением роли модели в познании и подчеркиваем значение метода моделей во всех науках [2, с. 8].

Важное значение при математическом моделировании приобретает системный подход. Его методологическая специфика, по мнению Б. Кривинского, заключается в применении научной методологии для решения сложных и взаимосвязанных проблем, рассматриваемых как единое целое [10]. Она ориентирует эксперимент на раскрытие целостности объекта и выявление его структуры, внутренних и внешних связей и сведение их в единую теоретическую картину.

Последовательность математического моделирования объектов различной природы состоит из следующих этапов [9, с. 6–7]:

1. Анализ предметной области исследования, определение базовых закономерностей и связей между элементами системы, построение главных гипотез и предположений, упрощающих исследуемый объект, выявление основных параметров и переменных, которые характеризуют процессы в изучаемых объектах, формулирование задачи эксперимента.

2. Составление ММ объекта как совокупности уравнений и неравенств, определяющих связь между параметрами и переменными задачи.

3. Создание нового или выбор существующего метода решения системы уравнений и неравенств, составляющих ММ.

4. Тестирование метода решения и ММ на основе сравнения результатов математического моделирования с решением известных задач или экспериментальными данными. Если решения совпадают,

то математическая модель и метод решения считают созданными и рекомендуют использовать их для моделирования изучаемых объектов.

5. Выполнение расчетов, анализ полученных результатов, формирование выводов и рекомендаций.

Составление модели — один из центральных этапов исследования, на котором разрабатывается аналог реального объекта или процесса путем создания мысленного образа (мысленные модели), описания и отображения на картах, схемах, чертежах (знаковые модели), учета наиболее существенных факторов и взаимосвязей между ними математическими зависимостями (математические модели), а также с помощью электронно-вычислительной техники (машинные модели) или специальной игры (игровые модели) [5, с. 23].

Как отмечается в [3], сложные и тяжелые режимы эксплуатации гибкой связи морской привязной системы сопряжены, как правило, с необходимостью специального изучения и определения действующих на них сил, учета нелинейности разрешающих уравнений, возможности потери устойчивости равновесия и с требованием исследования поведения системы в закритических состояниях. Описывающие их дифференциальные уравнения имеют высокий порядок и содержат нелинейности сложного вида. Поиск их решения аналитически часто становится невозможным, что побуждает широко привлекать методы вычислительной математики. Решение таких задач оказывается осуществимым только современными методами нелинейного анализа, применение которых побуждает к выбору модификации разрешающих уравнений, обеспечивающих алгоритмичность и эффективность используемых подходов. До настоящего времени указанные исследования не получили необходимого развития из-за отсутствия достоверных ММ, которые достаточно просто и эффективно реализуются в виде алгоритмов и программ для численного решения рассматриваемых задач.

Существующие расчёты гибкой связи (ГС) в виде ММ, в том числе и проектные, применяются в основном для идеальных круглых сечений. Однако в рамках проектных исследований необходимо учитывать изменение собственных характеристик ГС во времени в течение длительной эксплуатации [13]:

- при гидростатическом обжатии ГС меняет свою форму идеальной окружности;

- происходит существенное растяжение ГС по длине, в том числе и внутренних жил кабелей, вследствие чего изменяется сопротивление ГС;

- имеет место неравномерное старение и износ оболочек и оплетки кабелей ГС, изготовленных из различных материалов;

- становится иным характер внешних воздействий на ГС;

- изгибная жёсткость должна также учитываться в ММ;

– необходимо учитывать поперечную вибрацию ГС в потоке воды в квазистатической и локальной динамике, поскольку при классических методах расчётов она не принимается во внимание.

Несмотря на функциональное и конструктивное разнообразие современных морских (МПС) и подводных привязных систем (ППС) [14], их создатели сталкиваются с рядом сходных проблем и нуждаются в разработке общих подходов к их разрешению. В частности, к таким вопросам относятся проблемы гидродинамики. При проектировании движущихся под водой привязных систем и аппаратов изучение вопросов их динамики, силового воздействия среды и судна-носителя (СН), вопросы управления и стабильности движения являются первостепенными и во многом определяют возможность нормального функционирования аппаратуры, установленной на них [3, 4, 11]. При этом наиболее существенной особенностью динамики ППС, усложняющей ее по сравнению с известной теорией движения в жидкости и газе автономных твердых тел (самолетов, подводных и надводных судов и т. п.), становится необходимость учета влияния ГС как системы с распределенными параметрами, также взаимодействующей с потоком жидкости.

Как считают Э. И. Блинов и др., для описания влияния гидрометеосреды необходима адекватная пространственно-временная ММ изменения волнения, ветра и течения [1]. Эта модель должна позволять воспроизводить реальные внешние условия как на коротких (секунды, минуты), так и на длинных (до года) интервалах времени с учетом вероятностной природы и основных характеристик гидрометеосреды. Ими предложен численный метод решения задачи управления гибким пространственно искривленным объектом при целенаправленных силовых воздействиях. На основе разработанной ММ поведения ГС [16] появляется возможность установления её предполагаемой формы, что позволит определить напряженно-деформированное состояние.

**ЦЕЛЮЮ СТАТЬИ** является построение ММ двух связанных элементов ГС МПС.

Основная часть исследования посвящена изучению динамики ГС в условиях, характерных для МПС, с помощью математического моделирования. Конечная цель исследования — совершенствование проектирования ГС МПС, основывающееся на оптимизации существующих методов путём разработки компьютерных моделей динамики ГС с учётом их эксплуатационных характеристик, позволяющих более правильно и рационально создавать новые МПС с ГС с необходимыми свойствами и параметрами, а также предложение рекомендаций по прогнозированию возможных эксплуатационных нагрузок при проектировании.

#### ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Существуют две основные группы ММ, используемые для описания динамики ГС в потоках жидко-

сти [15, 16]. В первую из них входят модели, в основе которых лежат дифференциальные уравнения в частных производных. Вторая группа моделей основана на представлении ГС в виде последовательно соединённых между собой достаточно большого количества дискретных упругих стержней.

**Требования к ММ.** ММ должна учитывать:

1. Движение судна носителя (СН), которое зависит от:

- 1) волнения поверхности моря;
- 2) кинематических характеристик движения СН без учёта волнения поверхности моря;
- 3) скорости морского течения.

2. Особенности конструкции ГС, влияющие на функциональные параметры МПС и характеризующиеся:

1) длиной и изменением длины ГС в процессе движения СН;

2) упругими и прочностными характеристиками ГС;

3) положительной или отрицательной плавучестью ГС, а также грузов, поплавков и буюв, связанных с ГС;

4) силами гидродинамического сопротивления ГС в процессе её движения в воде;

5) изгибной и крутильной жёсткостью ГС относительно её оси;

6) силами, действующими на коренной и ходовой конец ГС.

3. Движение подводного аппарата (ПА), которое определяется:

1) массой и плавучестью ПА;

2) относительным расположением ПА по отношению к СН и кинематическими характеристиками его движения;

3) силами гидродинамического сопротивления ПА в процессе его движения в воде.

4. Влияние преград на пути движения ПА и ГС, которое выявляется:

1) расположением преград в воде;

2) размерами преград;

3) кинематическими характеристиками движения преград.

Параметры, необходимые для выполнения математического моделирования динамики МПС:

1. Амплитуда, длина и скорость гармонических волн на поверхности моря.

2. Координаты вектора скорости СН в зависимости от времени.

3. Координаты вектора скорости морского течения.

4. Максимальная длина ГС.

5. Скорость вытравливания или выборки ГС ледбёдкой СН.

6. Коэффициент (модуль) упругости ГС на растяжение в каждой её точке.

7. Моменты инерции изгиба и кручения поперечного сечения ГС (жёсткости изгиба и кручения).

8. Допустимые силы (или напряжения) растяжения ГС в каждой её точке.

9. Координаты и массы грузов, закреплённых на ГС.

10. Координаты и плавучесть поплавков и буёв, закреплённых на ГС.

11. Коэффициенты гидродинамического сопротивления ГС.

12. Линейная плотность ГС.

13. Масса, плавучесть, коэффициенты гидродинамического сопротивления и вектор скорости ПА по отношению к неподвижной воде в зависимости от времени.

14. Координаты преград в воде.

15. Размеры и масса преград.

16. Координаты скорости движения преград.

17. Глубина моря.

Характеристики МПС, которые определяются с помощью математической модели:

1. Силы, действующие на коренной и ходовой конец ГС.

2. Длина ГС.

3. Относительное растяжение ГС.

4. Координаты ПА по отношению к СН.

5. Форма ГС в зависимости от времени.

6. Распределение сил и напряжений растяжения, изгиба и кручения ГС по её длине.

Упрощающие предположения, используемые в процессе математического моделирования динамики МПС:

1. Форма и размеры СН и ПА не изменяются.

2. Масса СН намного больше, чем массы ГС и ПА, поэтому можно не учитывать влияние ГС и ПА на движение СН.

3. Длина ГС намного больше, чем размеры СН и ПА, следовательно, СН и ПА принимаются материальными точками.

4. Материал ГС считается абсолютно упругим (с линейным законом упругости).

5. Толщина (диаметр) ГС намного меньше её длины.

6. Преграды на пути движения МПС рассматриваются как абсолютно твёрдые.

7. Морское течение в моделируемой области моря стационарное.

8. Обтекание ГС потоком воды происходит без образования вихрей Кармана.

9. Скорость вытравливания или выборки ГС ледяной СН намного меньше скорости волн в ГС.

**Параметры ММ.** Система уравнений (1)–(9) зависит от следующих параметров, характеризующих свойства ГС и внешних воздействий на неё. ММ динамики элемента ГС определена системой уравнений [15, 16]:

$$\ddot{x}_1 = f_{1X} \left( x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t} \right); \quad (1)$$

$$\ddot{y}_1 = f_{1Y} \left( x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t} \right); \quad (2)$$

$$\ddot{z}_1 = f_{1Z} \left( x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t} \right); \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 = f_{1X} \left( x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t} \right) + f_{2X} \left( x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial z_2}{\partial t} \right); \quad (4)$$

$$\ddot{y}_2 = f_{1Y} \left( x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t} \right) + f_{2Y} \left( x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial z_2}{\partial t} \right); \quad (5)$$

$$\ddot{z}_2 = f_{1Z} \left( x_1, y_1, z_1, \frac{\partial x_1}{\partial t}, \frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial z_1}{\partial t} \right) + f_{2Z} \left( x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial z_2}{\partial t} \right); \quad (6)$$

$$d\ddot{\varphi}_x = f_{\varphi X} \times \left( x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial z_2}{\partial t}, d\varphi_x \right); \quad (7)$$

$$d\ddot{\varphi}_y = f_{\varphi Y} \times \left( x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial z_2}{\partial t}, d\varphi_y \right); \quad (8)$$

$$d\ddot{\varphi}_z = f_{\varphi Z} \times \left( x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \frac{\partial x_2}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \frac{\partial z_2}{\partial t}, d\varphi_z \right). \quad (9)$$

Правые части уравнений (1)–(9) являются функциями от искоемых переменных и их производных по времени. Принятые сокращения:  $\rho_{0l}$  — плотность единицы длины ГС без растяжения, кг/м<sup>3</sup>. Если ГС однородная по длине, тогда  $\rho_{0l}$  задаётся числовым значением, а если  $\rho_{0l}$  зависит от координаты  $s$  вдоль длины ГС, тогда определяется функцией, характеризующей наличие на ГС дополнительных грузов, уменьшающих плавучесть ГС, или поплавков, увеличивающих плавучесть ГС;  $\rho$  — плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $l_0$  — начальная длина ГС без нагрузки, м;  $N$  — количество

элементов ГС на длине  $l_0$ ;  $ds_0$  — начальная длина элемента ГС без нагрузки, м;  $ds_0 = l_0/N$ ;  $d_0$  — диаметр ГС без нагрузки, м. Если ГС постоянного диаметра по длине, тогда  $d_0$  задаётся числовым значением, а если  $d_0$  зависит от координаты  $s$  вдоль длины ГС, тогда — функцией;  $E$  — модуль упругости Юнга материала ГС, Па, определяется числовым значением, а если  $E$  зависит от координаты  $s$  вдоль длины ГС, тогда — функцией;  $G^*$  — модуль сдвига материала ГС, Па, задаётся числовым значением, а если  $G^*$  зависит от координаты  $s$  вдоль длины ГС, тогда — функцией;  $M_a$  — масса жидкости, присоединённая к единице длины ГС, кг/м;  $C_\tau$  — тангенциальный коэффициент гидродинамического сопротивления ГС;  $C_n$  — нормальный коэффициент гидродинамического сопротивления ГС;  $f_G$  — коэффициент трения скольжения ГС о преграду в воде;  $g$  — ускорение свободного падения тел на уровне поверхности моря, м/с<sup>2</sup>;  $T_{max}$  — максимальная допустимая сила растяжения ГС, превышение которой приводит к необратимым изменениям её функциональных качеств, Н;  $t_m$  — физическое время моделирования динамики ГС ( $t \leq t_m$ ), с.

**Функции внешних воздействий на ГС.**  $V_x, V_y, V_z$  — координаты вектора скорости морского течения, м/с — могут быть константами или функциями координат  $x, y, z$ , если течение в рассматриваемой акватории неоднородное;  $G_x, G_y, G_z$  — координаты вектора внешней силы, Н/м — определяют силовое воздействие внешнего объекта на ГС, в частности, используются для учёта движения ПА, в этом случае величины

$G_x, G_y, G_z$ , заданные на ходовом конце ГС, служат координатами равнодействующей сил тяги движителя и гидродинамического сопротивления ПА, а масса ПА равна массе первого элемента ГС. Аналогичным образом величины  $G_x, G_y, G_z$  могут быть приняты на коренном конце для моделирования равнодействующих сил тяги движителя и сопротивления СН.  $f_{bar}(t, x, y, z) < 0$  — ограничение, задающее положение подводной преграды, в качестве которой могут быть элементы рельефа морского дна и находящихся на нём объектов или плавающий подводный объект, определённый только геометрией и кинематическими характеристиками;  $z_N = f_N(t)$  — изменение вертикальной координаты СН под действием морского волнения.

Рассматриваемая МПС состоит из СН, ПА и соединяющей их ГС (рис.1). Введём правую систему координат  $0xyz$ . Оси  $0x$  и  $0y$  лежат в плоскости поверхности моря, а ось  $0z$  совпадает с направлением вектора силы тяжести  $q$ . Коренной конец ГС закреплён на СН и имеет координаты  $X_{сн}, Y_{сн}, Z_{сн}$ . Ходовой конец ГС зафиксирован на ПА с координатами  $X_{па}, Y_{па}, Z_{па}$ . Скорость СН задана вектором  $V_{сн}$ , а ПА — вектором  $V_{па}$ . Движение ПА также может быть определено вектором силы тяги его движителя. Скорость морского течения стационарна, но неоднородна в данной акватории.

На малый элемент ГС длиной  $ds$  действуют силы растяжения  $T$  и  $T + dT$ , которые возникают в результате сил, приложенных к коренному  $F_{сн}$  и ходовому  $F_{па}$

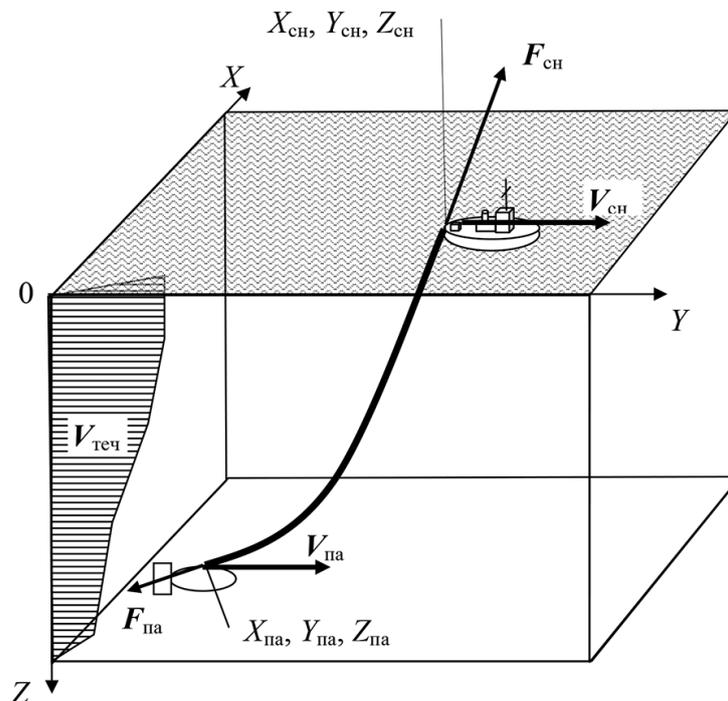


Рис. 1. Общая схема МПС

концам ГС со стороны СН и ПА, а также сил тяжести  $q$  ГС и гидродинамических сил  $F_n$  и  $F_\tau$ , действующих по нормали и касательной к поверхности ГС (рис. 2).

На элемент ГС также может действовать сосредоточенная внешняя сила  $G$  как следствие контактного взаимодействия ГС с подводными объектами. С прикладной точки зрения невозможно осуществить точечный контакт ГС указанным объектом, он будет происходить на некоторой малой длине ГС, но не в точке. Поэтому будем считать, что сила  $G$  действует на длину  $ds$  малого элемента ГС, т. е. она является распределённой на малой длине ГС. В процессе движения СН и ПА расстояние между ними изменяется, что вызывает перемену сил, действующих на ГС и её форму. Силы тяжести  $q$  ГС характеризуются линейной плотностью самой ГС, а также наличием на ней дополнительных распределённых грузов и поплавков.

ГС можно представить в виде совокупности отдельных малых элементов длиной  $l$ , соединённых между собой упругими связями [6, 17]. Радиус-вектор ГС  $r(p)$  связан с вектором координат  $e$  зависимостью:

$$\vec{r}(p) = \mathbf{S}(p) \cdot \vec{e}, \quad (10)$$

где  $\vec{e}$  – вектор обобщённых координат;

$$\vec{e} = \{\vec{r}_0^{0T} \vec{r}_0^{1T} \vec{r}_l^{0T} \vec{r}_l^{1T} \beta_0 \beta_l\}^T; \quad (11)$$

$$\vec{r}_u^k = \left. \frac{\partial \vec{r}^k}{\partial p^k} \right|_{p=u} = \begin{Bmatrix} x_u^k \\ y_u^k \\ z_u^k \end{Bmatrix} \quad \text{— радиус-векторы}$$

( $k = 0$ ) и касательные векторы ( $k = 1$ ) к осевой линии ГС в её концевых точках ( $p = 0$  и  $p = l$ ), когда  $u$  принимает значения  $0$  ( $p = 0$ ) или  $l$  ( $p = l$ ).

Уравнения движения в матричной форме принимают вид:

$$M \cdot \ddot{\vec{e}} + \vec{Q}^e = \vec{Q}^g + \vec{Q}^F, \quad (12)$$

куда входят постоянные матрица масс ( $M$ ) и столбец обобщённых сил тяжести ( $Q^g$ ), а также вектор внешних активных сил ( $Q^F$ ) и реакций упругого деформирования ГС ( $Q^e$ ). Матрица масс определяется по формуле:

$$M = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vec{e}} \partial \dot{\vec{e}}^T} = \rho_l \int_0^l S^T S \cdot dp = const, \quad (13)$$

а столбец обобщённых сил тяжести как:

$$\vec{Q}^g = \frac{\partial W^g}{\partial \vec{e}} = \int_0^l \rho_l \cdot S^T \cdot \vec{g} \cdot dp = const. \quad (14)$$

Столбец обобщённых активных сил представлен:

$$\vec{Q}^F = \frac{\partial W^F}{\partial \vec{e}} = \int_0^l S^T \cdot \vec{F} \cdot dp. \quad (15)$$

К элементам вектора обобщённых упругих сил применяется формула:

$$\vec{Q}^e = \frac{\partial U}{\partial \vec{e}}. \quad (16)$$

Уравнение (12) записано для одного элемента ГС и не учитывает связь с другими её элементами. Узлы элемента ГС соединены с узлами соседних элементов, поэтому уравнение (12) необходимо преобразовать с учётом влияния на элемент ГС соседних с ним элементов. Разделим ГС на  $N$  элементов и введём сквозную нумерацию её узлов  $i \in [0; N]$ . Рассмотрим взаимодействие двух соседних элементов, имеющих общий узел с номером  $i$  (рис. 3).

Условно поделим узел  $i$  на два —  $i_1$  и  $i_2$ , а отсутствующую между ними связь заменим обобщёнными реакциями  $R$  и  $-R$ . Учитывая, что узлы  $i_1$  и  $i_2$  составляют один узел  $i$ , то их координаты равны координатам узла  $i$ . Это значит, что уравнения динамики этих узлов отличаются друг от друга только знаками реакций связи  $R$ , обобщёнными силами и матрицами масс  $\vec{e}_i = \vec{e}_{i_2} \equiv \vec{e}_{i_1}$ . Преобразуем вектор обобщённых координат элемента ГС (11) для элемента с узлами  $i - 1$  и  $i_1$ , изменив в нём порядок расположения координат,

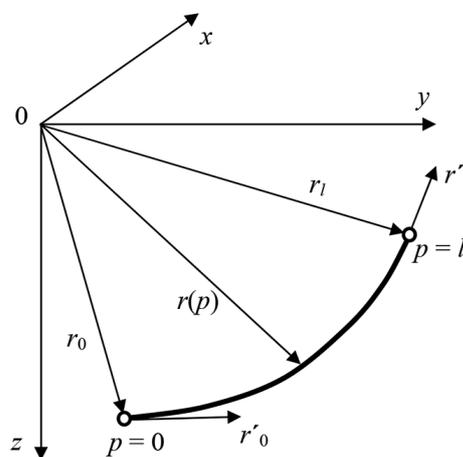


Рис. 2. Осевая линия элемента ГС

$$\vec{e}_i = \{\vec{r}_0^{0T} \vec{r}_0^{1T} R \cdot \vec{r}_l^{0T} \vec{r}_l^{1T} R\}^T \quad (17)$$

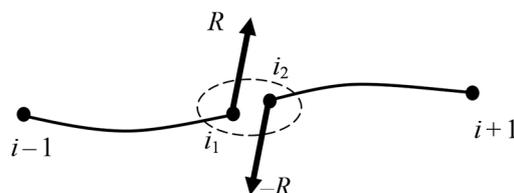


Рис. 3. Схема соединения соседних элементов ГС

а вектор обобщённых координат элемента ГС с узлами  $i_2$  и  $i + 1$ :

$$\bar{e}_{i+1} = \{\bar{r}_{i_2}^{0T} \bar{r}_{i_2}^{1T} \beta_{i_2} \bar{r}_{i+1}^{0T} \bar{r}_{i+1}^{1T} \beta_{i+1}\}^T. \quad (18)$$

Используем блочную матрицу масс элемента ГС с узлами  $i - 1$  и  $i_1$ , а также элемента с узлами  $i_2$  и  $i + 1$ , матрицу жёсткостей, которая представлена в блочном виде. Вектор обобщённых координат элемента ГС с узлами  $i - 1$  и  $i_1$  (17) преобразуем к блочному виду:

$$\bar{e}_{i-1} = \{\bar{e}_{i-1}^0 \bar{e}_i\}^T, \quad (19)$$

а вектор обобщённых координат элемента ГС с узлами  $i_2$  и  $i + 1$  – следующим образом:

$$\bar{e}_{i+1} = \{\bar{e}_{i_2} \bar{e}_{i+1}^0\}^T. \quad (20)$$

В узле  $i = i_1 \equiv i_2$  выполняется равенство:

$$\bar{e}_i = \bar{e}_{i_2} \equiv \bar{e}_{i_1}. \quad (21)$$

С учётом выполненных преобразований составим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_l l}{420} \mathbf{M}_{1 i-1} \ddot{e}_{i-1}^0 + \frac{\rho_l l}{420} \mathbf{M}_{1 i_1} \ddot{e}_i + \frac{EA}{30l} \mathbf{K}_{1 i-1} \bar{e}_{i-1} \bar{e}_{i-1}^0 + \\ & + \frac{EA}{30l} \mathbf{K}_{1 i_1} \bar{e}_{i-1} \bar{e}_i = \bar{Q}_{i-1}^g + \bar{Q}_{i-1}^F = \bar{Q}_{i-1} \\ & \frac{\rho_l l}{420} \mathbf{M}_{2 i-1} \ddot{e}_{i-1}^0 + \frac{\rho_l l}{420} (\mathbf{M}_{2 i_1} + \mathbf{M}_{1 i_2}) \ddot{e}_i + \\ & + \frac{\rho_l l}{420} \mathbf{M}_{1 i+1} \ddot{e}_{i+1}^0 + \frac{EA}{30l} \mathbf{K}_{2 i-1} \bar{e}_{i-1} \bar{e}_{i-1}^0 + \frac{EA}{30l} \times \\ & (\mathbf{K}_{2 i_1} \bar{e}_{i-1} + \mathbf{K}_{1 i_2} \bar{e}_{i+1}) \bar{e}_i + \frac{EA}{30l} \mathbf{K}_{1 i+1} \bar{e}_{i+1} \bar{e}_{i+1}^0 = \bar{Q}_i \\ & \frac{\rho_l l}{420} \mathbf{M}_{2 i_2} \ddot{e}_i + \frac{\rho_l l}{420} \mathbf{M}_{2 i+1} \ddot{e}_{i+1}^0 + \frac{EA}{30l} \mathbf{K}_{2 i_2} \bar{e}_{i+1} \bar{e}_i + \\ & + \frac{EA}{30l} \mathbf{K}_{2 i+1} \bar{e}_{i+1} \bar{e}_{i+1}^0 = \bar{Q}_{i+1}^g + \bar{Q}_{i+1}^F = \bar{Q}_{i+1}. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Данная система (22) определяет соотношения между тремя узлами ГС. Её можно представить в матричном виде, используя блочные матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{K}$ . Тогда систему уравнений запишем как:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{e}} + \mathbf{K} \cdot \bar{e} = \bar{Q}. \quad (23)$$

Обобщённые переменные ГС определяем из:

$$\bar{e} = \{\bar{r}_{i-1}^{0T} \bar{r}_{i-1}^{1T} \beta_{i-1} \bar{r}_i^{0T} \bar{r}_i^{1T} \beta_i \bar{r}_{i+1}^{0T} \bar{r}_{i+1}^{1T} \beta_{i+1}\}^T. \quad (24)$$

Обобщённые силы, действующие на ГС, представим как:

$$\bar{Q} = \{\bar{Q}_{i-1}^g + \bar{Q}_{i-1}^F \quad \bar{Q}_i^g + \bar{Q}_{i_2} + \bar{Q}_i^F + \bar{Q}_{i_2}^F \quad \bar{Q}_{i+1}^g + \bar{Q}_{i+1}^F\}^T. \quad (25)$$

Уравнение (23) характеризуют связь между соседними элементами ГС, но для учёта граничных условий необходимо вводить в нём корректировку матриц с использованием множителей Лагранжа, нахождение которых усложняет решение задачи и требует дополнительного обращения матрицы масс вблизи границ ГС. Чтобы исключить эти проблемы, решим уравнение динамики  $i$ -го узла ГС, применяя только второе уравнение системы (22).

**Силы сопротивления движению ГС.** Силы гидродинамического сопротивления жидкости движению ГС проще определить, если разделить их на две составляющие: тангенциальную ( $F_t$ ) и нормальную ( $F_n$ ) по отношению к поверхности ГС. Сопротивление трения ГС, приведённое к узлу ГС с номером  $i$ , характеризуется тангенциальными составляющими гидродинамических сил, направленных вдоль элемента ГС и действующих на единицу её длины, которые зависят от скорости движения ГС и потока жидкости [10]:

$$\bar{F}_{\tau i} = 0,5 C_{\tau} \rho d \left[ \left( \bar{V}_i - \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial p} \right] \left[ \left( \bar{V}_i - \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial p} \right], \quad (26)$$

где  $C_{\tau}$  — коэффициент гидродинамического сопротивления трения нити;  $\rho$  — плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $d$  — диаметр ГС, м;  $\bar{V}_i$  — вектор скорости морского течения возле узла  $i$  ГС, м/с;  $r_i$  — радиус-вектор элемента ГС с вершиной в узле  $i$  ГС, м;  $\partial \bar{r}_i / \partial p$  — направляющие косинусы ГС (11).

Вектор скорости морского течения задан его координатами  $V_{xi}$ ,  $V_{yi}$  и  $V_{zi}$ , в  $i$ -м узле ГС. Радиус-вектор точки  $i$  определяется её координатами:

$$\bar{r}_i = x_i \bar{i} + y_i \bar{j} + z_i \bar{k}, \quad (27)$$

тогда

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} \bar{i} + \frac{\partial y_i}{\partial t} \bar{j} + \frac{\partial z_i}{\partial t} \bar{k}. \quad (28)$$

Относительная скорость тангенциального потока жидкости находим из:

$$\left( \bar{V}_i - \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial p} = \left( V_{xi} - \frac{\partial e_{1i}}{\partial t} \right) e_{4i} + \left( V_{yi} - \frac{\partial e_{2i}}{\partial t} \right) e_{5i} + \left( V_{zi} - \frac{\partial e_{3i}}{\partial t} \right) e_{6i}. \quad (29)$$

Нормальные составляющие гидродинамических сил, действующих на единицу длины ГС зависят от скорости движения ГС и потока жидкости [4]:

$$\bar{F}_{ni} = 0,5 C_f \rho d \left[ \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial p} \times \left[ \left( \bar{V}_i - \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \times \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial p} \right] \right] \times \left\{ \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial p} \times \left[ \left( \bar{V}_i - \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \right) \times \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial p} \right] \right\}, \quad (30)$$

где  $C_f$  — коэффициент гидродинамического сопротивления формы поперечного сечения ГС.

Составляющие нормальных гидродинамических сил рассчитываем следующим образом:

$$F_{nxi} = 0,5 \cdot C_f \cdot \rho \cdot d \cdot |V_{xv}| \cdot V_{xv}. \quad (31)$$

Нормальные составляющие сил, действующих на единицу длины ГС со стороны подводной преграды и приведённые к  $i$ -му узлу ГС, можно определить по формуле:

$$\vec{G}_{ni} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial p} \left( \vec{G}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial p} \right), \quad (32)$$

где  $G_i$  — вектор силы со стороны преграды, заданный координатами  $G_{xi}, G_{yi}, G_{zi}$ .

Внешняя сила  $G_{xi}$  является реакцией ГС на взаимодействие с преградами (трение о преграду). Её модуль пропорционален нормальной силе давления ГС на преграду с коэффициентом трения  $f_G$ :

$$G_{xi} = f_G G_{ni}, \quad (33)$$

где

$$|G_{ni}| = \sqrt{\left\{ e_{5i} [G_{xi} e_{5i} - G_{yi} e_{4i}] + e_{6i} [G_{xi} e_{6i} - G_{zi} e_{4i}] \right\}^2 + \left\{ -e_{4i} [G_{xi} e_{5i} - G_{yi} e_{4i}] + e_{6i} [G_{yi} e_{6i} - G_{zi} e_{5i}] \right\}^2 + \left\{ -e_{4i} [G_{xi} e_{6i} - G_{zi} e_{4i}] - e_{5i} [G_{yi} e_{6i} - G_{zi} e_{5i}] \right\}^2}. \quad (34)$$

Преграда может быть неподвижна или двигаться с заданной скоростью, тогда элемент ГС будет испытывать кинематические ограничения перемещения. В этом случае внешнюю силу  $G_i$  можно определить в  $i$ -ом узле по геометрии изгиба ГС.

**ВЫВОДЫ.** Создана ММ двух связанных элементов ГС МПС, которая позволяет разработать алгоритм расчёта динамики ГС при её больших перемещениях. Разработанная ММ МПС дает возможность решать следующие задачи: 1) определять изменение формы ГС и сил её натяжения в процессе маневрирования СН и ПА с учётом морских волн, подводных течений, ветровых нагрузок на СН, глубины моря и её изменения в заданной акватории, массы и упругих свойств ГС; 2) прогнозировать относительное положение СН и ПА в процессе их маневрирования; 3) определять резонансные режимы растяжения ГС и максимальные нагрузки на ГС для оценки её прочности в процессе маневрирования СН и ПА; 4) рассчитать режимы маневрирования МПС, приводящие к образованию петель («колышек») на ГС; 5) определять режимы маневрирования МПС, вызывающие вибрации плохообтекаемых ГС в потоке.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Блинов Э. И. Управление гибкими протяжёнными объектами направленными силовыми воздействиями [Текст] / Э. И. Блинов, В. И. Кравцов, А. В. Кравцов, А. Н. Недбайло // Современные технические средства, комплексы и системы. — ААЭКС, 2003. — № 1 (11). — С. 43–48.
- [2] Гёрец Г. Соотношение между экспериментом, моделью и теорией в процессе естественного познания [Текст] / Г. С. Гёрец // Эксперимент. Модель. Теория : [сб. статей]. — АН СССР. Ин-т философии. — М. : Наука, 1982. — 333 с.
- [3] Динамика подводных буксируемых систем [Текст] / В. И. Поддубный, Ю. Е. Шамарин, Д. А. Черненко, Л. С. Астахов. — СПб. : Судостроение, 1995. — 200 с.
- [4] Динамика подводных океанографических систем [Текст] / Ю. Е. Шамарин, В. И. Поддубный, Л. И. Богатов, С. В. Сидорский, А. И. Макаренко. — К. : 2001. — 228 с.
- [5] Дитрих Я. Проектирование и конструирование: Системный подход [Текст] : пер. с польск. / Я. Дитрих. — М. : Мир, 1981. — 456 с.
- [6] Дмитроченко О. Н. Методы моделирования динамики гибридных систем тел с учётом геометрической нелинейности [Текст] / О. Н. Дмитроченко // Динамика, прочность и надёжность транспортных машин : Сб. тр. под ред. Б. Г. Кеглина. — Брянск : БГТУ, 2001. — С. 24–34.
- [7] Клейтон Б. Механика морских судов [Текст] : пер с англ. / Б. Клейтон, Р. Бишоп. — Л. : Судостроение, 1986. — 436 с.
- [8] Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели [Текст] / В. С. Немчинов // Эксперимент. Модель. Теория. [Сб. статей], АН СССР. Ин-т философии. — М. : Наука, 1982. — 333 с.
- [9] Косенков В. М. Краткий курс лекций по численным методам [Текст] : учебное пособие / В. М. Косенков. — Николаев : НУК, 2012. — 73 с.
- [10] Кривинский Б. В. Системный подход и моделирование — эффективные методы исследования проблем вооружённой борьбы на море [Текст] / Б. В. Кривинский // Морской сборник, 1979. — № 11. — С. 20–25.

- [11] Принципы построения технических средств освоения океана [Текст] / под ред. д.т.н. В. С. Ястребова. — М. : Наука, 1982. — 325 с.
- [12] **Сегормикд Л.** Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегормикд. — М. : Мир, 1979. — 392 с.
- [13] **Трунін К. С.** Удосконалення методів проектування гнучких зв'язків морських прив'язних систем [Текст] / К. С. Трунін // I Міжнародна НТК «Інновації в суднобудуванні та океанотехніці», присвячена 90 річчю НУК імені адмірала Макарова, м. Миколаїв (15.09.2010–17.09.2010) : матеріали I Міжнародної НТК «Інновації в суднобудуванні та океанотехніці». — Миколаїв : НУК, 2010. — С. 137–138.
- [14] **Трунін К. С.** Класифікація морських прив'язних систем [Текст] / К. С. Трунін // Матеріали IV Науково-технічної конференції «Живучість корабля та безпека на морі» (27.05.–29.05.2009). — Севастополь : Севастопольський військово-морський орден Червоної Зірки інститут ім. П. С. Нахімова, 2009. — С. 41–42.
- [15] **Трунин К. С.** Математическая модель морской привязной системы с гибкой связью [Текст] / К. С. Трунин // Інновації в суднобудуванні та океанотехніці: матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції. — Миколаїв : НУК, 2014. — С. 386–388.
- [16] **Трунин К. С.** Математическая модель гибкой связи в составе морской привязной системы [Текст] / К. С. Трунин // Інновації в суднобудуванні та океанотехніці: матеріали VI Міжнародної науково-технічної конференції. — Миколаїв : НУК, 2015. — С. 300–304.
- [17] **Dmitrochenko O. N.** Generalization of plate finite elements for absolute nodal coordinate formulation [Текст] / O. N. Dmitrochenko, D. Yu. Pogorelov // *Multibody System Dynamics* 10. — No. 1, Special issue 'Virtual Nonlinear Multibody Systems'. — Kluwer, Dordrecht, 2003. — Pp. 17–43.

---

© К. С. Трунін

Надійшла до редколегії 13.02.2017  
Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК  
д-р техн. наук, проф. В. С. Бліщов