УДК 378.02:37.016

РОЛЬ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В РАЗВИТИИ УМСТВЕННОГО РАЗВИТИЯ УЧЕНИКОВ

Мурадов Джавид Видади оглу,
докторант АГПУ по специальности математика
и методика ее преподавания, учитель математики
Полная средняя школа № 149 имени Эльчина Шамиева
Хазарского района города Баку

В предложенной статье анализируются более простые способы определения аргументов комплексных чисел. На основании проведения определенных опытов над старшеклассниками исследуются влияние данного вопроса на умственное развитие учеников, пути устранения сложностей, возникающих при нахождении учениками аргумента, и влияние изучаемого понятия на умственное развитие учащихся. В результате проведенного анализа выяснилось, что определение учениками аргумента комплексных чисел способствует их более глубокому осознанию.

Ключевые слова: *комплекс, аргумент, алгебраическая форма, координата, график, навык, осознание, исследование.*

У статті аналізуються більш прості способи визначення аргументів комплексних чисел. На підставі проведення дослідів над старшокласниками досліджуються вплив даного питання на розумовий розвиток учнів, шляхи усунення складнощів, що виникають під час знаходження учнями аргументу, і вплив досліджуваного поняття на розумовий розвиток учнів. У результаті проведеного аналізу з'ясувалося, що визначення учнями аргументу комплексних чисел сприяє їх більш глибокому усвідомленню.

Ключові слова: *комплекс, аргумент, алгебраїчна форма, координата, графік, навик, усвідомлення, дослідження.*

Muradov J.V. THE ROLE OF COMPLEX NUMBERS IN THE DEVELOPMENT OF MENTAL DEVELOPMENT OF STUDENTS

In the proposed article, we analyze simpler methods for determining the arguments of complex numbers. At the same time, on the basis of certain experiments on high school students, the influence of this issue on the mental development of students, as well as ways of eliminating the difficulties arising in the students' finding of the argument and the influence of the studied concept on the mental development of students, are explored. As a result of the analysis carried out, it became clear that the definition of the argument of complex numbers by the students ultimately contributes to their deeper awareness.

Key words: *complex, argument, algebraic form, coordinate, graph, skill, awareness, research.*

Расширение множества действительных чисел способствует возникновению нового множества чисел. При таком расширении во множестве вещественных чисел требовалось сохранение всех исполняемых во множестве действительных чисел операций или наличие корня любого уравнения со степенью больше единицы в данном новом уравнении. Одним из таких уравнений является уравнение в виде $x^2 + 1 = 0$. Данное уравнение невозможно решить во множестве вещественных чисел, т. е. это мнимое множество [2, с. 164]. По этой причине возникает необходимость в таком косвенном множестве чисел, которое способствует решению уравнений данного типа. Следовательно, возникает необходимость расширения и этого множества чисел, так как любое большинство чисел возникает на основании данной необходимости. Значит, приходится расширять также и множество вещественных чисел. С этой целью предполагается, что существует решение уравнения $x^2 + 1 = 0$ и число i является его корнем. Тогда $i^2 = -1$.

Следовательно, после введения числа i множество вещественных чисел расширяется таким образом, чтобы данное расширение включало вещественные числа, число i и сохранились все исполняемые операции. Полученное новое численное множество называется комплексным множествов чисел [1] и обычно обозначается буквой i. Общая картина, или, другими словами, алгебраическая картина комплексных чисел выражается в следующем виде [3, с. 175]:

$$z = a + bi,$$

где a и b являются вещественными числами.

Приведенный в алгебраическом виде z = a + bi для комплексных чисел называется так: a − вещественная часть, b − мнимая часть.

$$\begin{cases} a \quad həqiqi \\ b \quad xəyali \end{cases}.$$

На основании проведенных с учениками X классов исследований выяснилось, что сложение и вычитание комплексных чисел усваивается легко и запоминается дольше. Однако умножение и деление вызывают проблемы у большинства учеников. Причина является сложность определения аргумента [3, с. 183]. Рассмотрим рисунок 1.

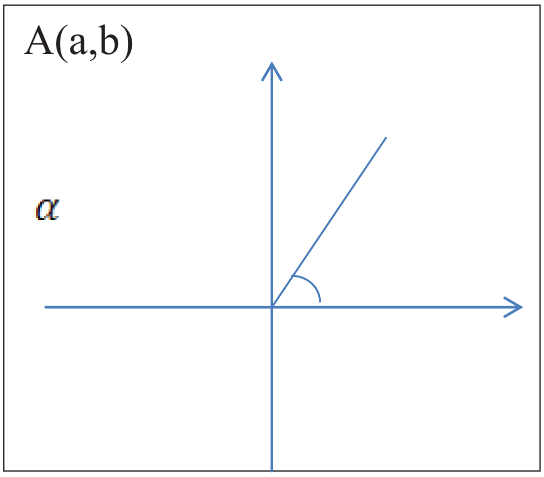


Рис. 1.

В определении аргумента ученики основываются на тригонометрическом соотношении в прямоугольнике треугольнике, в результате, из формулы $\begin{cases} x = R\cos a \\ y = R\sin a \end{cases}$ (1) получаем соотношение $\operatorname{tg} a = \frac{x}{y}$ (2), что позволяет найти соответствующий угол.

Определение угла таким способом не привлекательно для большинства учеников, поскольку при таком изменении обозначений вещественной и мнимой частей, а также при равенстве одной из вещественных и мнимых частей нулю вычисление воспринимается учениками неоднозначно.

Вычисление с использованием формулы (1) при определении аргумента (угла) способствует более простому нахождению угла, а при определении угла с помощью формулы (2) многие ученики допускают ошибки или сталкиваются с неопределенностями. Например, когда z = 2i и z = − 2i, а также z = 1 + i или z = 1 − i.

В результате проведенных с учениками X классов исследований выяснили, что при определении аргумента возможно устранение сложностей, если рассотреть, в какой четверти системы координат расположены комплексные числа.

Нам известно, что если tg $\alpha = \frac{x}{y}$ здесь равнозначно $\begin{cases} b > 0 \\ a = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} b < 0 \\ a = 0 \end{cases}$, а также $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$, то использование в задаче определения аргумента тригонометрических функций sin α и cos α в значительной степени усложняет задачу.

Замена тригонометрических функций sin α и cos α в системе координат комплексным числом z = a + bi и описание четверти его расположения легко решает укзанную проблему.

Предположим, что дано комплексное число z = a + bi и числа a и b не равняются нулю. Рассмотрим все возможные обстоятельства комплексного числа z = a + bi в системе координат.

Из приведенных выше рисунков следует, если точка:

– входит в I четверть, тогда α;
– входит в II четверть, тогда, $\pi - \alpha$;
– входит в III четверть, тогда, $\pi + \alpha$;
– входит в IV четверть, тогда, $2\pi - \alpha$.

Вначале следует определить, на какой четверти расположено комплексное число, а затем найти угол «α» по формуле:

$$\operatorname{tg} a = \frac{|a|}{|b|}.$$

Вычислим угол «α». После нахождения угла «α» наше комплексное число выводится следующим образом:

– если входит в I четверть, тогда, α;
– если входит в II четверть, тогда, $\pi - \alpha$;
– если входит в III четверть, тогда, $\pi + \alpha$;
– если входит в IV четверть, тогда, $2\pi - \alpha$.

В результате проведенного анализа выяснилось, что ученики в приведенных ниже задачах опираются на указанное выше правила (рис. 6) и легко справляются с данной сложностью. Например, $z = 1 + \sqrt{3}i$ и $z = -1 - \sqrt{3}i$ или $z = 1 - \sqrt{3}i$ и $z = -1 + \sqrt{3}i$ и т. д.

Если наше комплексное число будет абсолютно вещественным или абсолютно мнимым, тогда, с учетом размещения данного комплексного числа на координатных осях, можно легко определить аргумент, даже не пользуясь формулой (2). Обратим внимание на графики комплексных чисел: из приведенного ниже рисунка следует, что:

– угол при z = a будет: $\alpha = 0^0$;
– угол при z = −a будет: $\alpha = 180^0$;
– угол при z = bi будет: $\alpha = 90^0$;
– угол при z = −bi будет: $\alpha = 270^0$.

Согласно результатам проведенных в средней школе исследований, определение углов в комплексных числах таким способом в конечном итоге в значительной степени влияет на умственное развитие учеников и способствует более долговременному запоминанию. Рассмотрим приведенные ниже задачи.

Задача 1. Найти аргумент z, если для комплексного числа z = x + yi ($x > 0$) дается $|z| - z^2 = 0$.

Решение: $|x + yi| - (x + yi)^2 = 0$ на основании данного условия равнение верно. Упростив, получаем следующее уравнение:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - 2xyi + y^2 = 0.$$

Затем приводим уравнение $\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 + y^2 - 2xyi = 0$, придаем ему алгебраическую форму.

Для приведения данного в алгебраической форме комплексного числа к нулю необходимо привести каждое значение его вещественной и мнимой частей к нулю, т. е. должно получится:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 + y^2 = 0 \text{ и } 2xyi = 0.$$

Так как $x > 0$, то для приведения мнимой части нулю необходимо, чтобы $y = 0$,

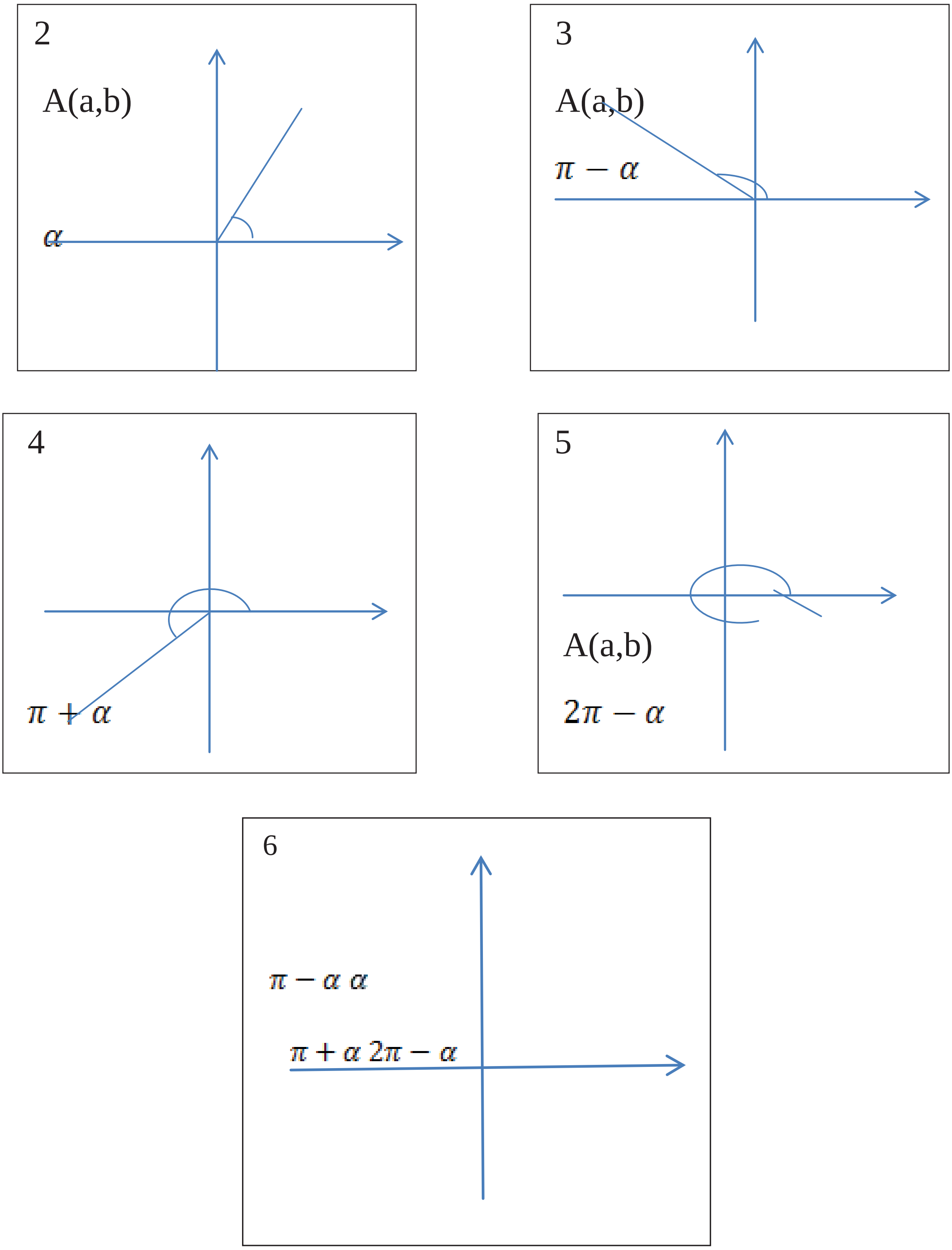


Рис. 2.

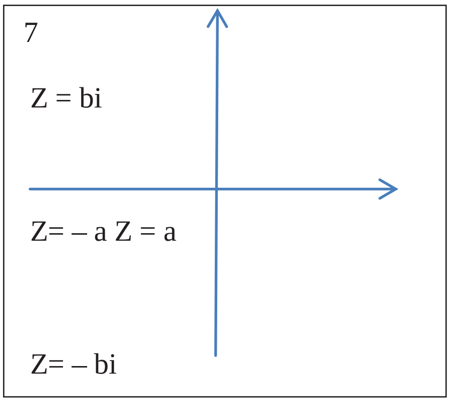
иначе мнимая часть не может равняться нулю.

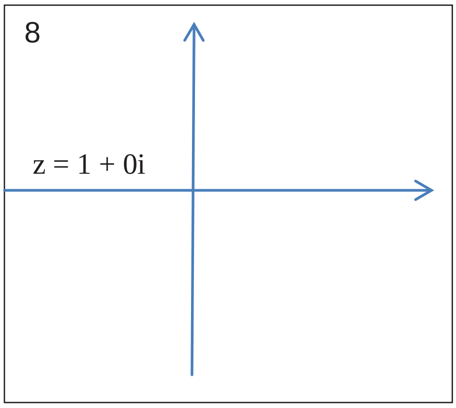
Что касается вещественной части, то получаем уравнение: $\sqrt{x^2+0^2}-x^2+0^2=0$.

Если решим это уравнение, то получим:

$$\sqrt{x^2}-x^2=0.$$

Если учесть в последнем уравнении $|x|-x^2=0$ условие $x>0$, то получаем уравнение $x-x^2=0$. Решаем уравнение:





Получаем корни $x_1=0$ и $x_2=1$. Из этих корней только 2-ой удовлетворяет условию $x>0$. Получаем: x = 1 и y = 0. Следовательно, наше комплексное число z = 1 + 0 · i. А пара (1; 0) находится на абцисссной оси.

Из рисунка 8 следует, что аргументом для данного комплексного числа является $\alpha=0^0$.

Задача 2. Приедем комплексное число $(1-\sqrt{3}i)^{60}$в алгебраическую форму.

Решение. Известно, что a = 1 və $b=-\sqrt{3}i$. Используя уравнение Муавра, придадим данному комплексному числу тригонометрическую форму.

А аргумент R = $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{|-\sqrt{3}|}{|1|}=\sqrt{3}.$$

А $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$ получаем при $\alpha=\frac{\pi}{3}$, но так как число $1-\sqrt{3}i$ расположено на 4-ой четверти, мы вычисляем аргумент как $2\pi-\alpha$, в результате, угол $2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$.

Если применить уравнение Муавра, то получим следующее:

$$(1-\sqrt{3}i)^{60}=2^{60}\cdot(\cos(\tfrac{5\pi}{3}\cdot 60)+i\sin(\tfrac{5\pi}{3}\cdot 60))=$$
$$2^{60}\cdot(\cos(100\pi)+i\sin(100\pi))=2^{60}\cdot(1+i\cdot 0)=2^{60}.$$

Мы упрощаем комплексное число с помощью формулы Муавра. Поскольку при таком упрощении определения аргумента прежде всего учитывается, к какой четверти относится аргумент, и вычисляется посредством $2\pi-\alpha$, мы полностью устраняем проблему определения аргумента учениками. Такое определение аргумента в комплексных числах способствует лучшему усвоению темы учениками.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Адыгезалов А. Методика преподавания математики в средней школе. Баку, 2015. (На азерб. яз.).

2. Ягубов М. Экспертные комментарии математики. Баку, 2003. 164 с. (На азерб. яз.).

3. Марданов М., Мирзоев С., Ибрагимов А. и др. Начало алгебры и анализа. X класс. Баку, 2007. С. 175, 183. (На азерб. яз.).

4. Ибрагимов Ф. Методика преподавания математики в общеобразовательных школах. Баку, 2014. (На азерб. яз.).