УДК 37. 015

Житарюк І. В.*

ТЕОРЕМА СОДДІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

У статті наведено біографічні дані про Ф. Содді та його теореми з елементарної геометрії про взаємнодотичні кола і сфери. Розв'язуванні конкретних задач наголошено на перевагах результатів Содді. Зазначено, що теорема Содді може значно збагатити фонд навчально-конкурсних та олімпіадних задач.

Ключові слова: *вземодотичні кола та сфери, конкурсні й олімпіадні задачі.*

Математика як наука, надзвичайно складна і обширна, а тому, для кращого засвоєння матеріалу, його необхідно подавати так, щоб викликати в учнів математичний інтерес, бо саме те, що викликає останній, легше запам'ятовується, сприяє їх захопленню і зацікавленню. В процесі викладання математики здійснюється систематична і цілеспрямована робота з вироблення в учнів навичок самостійно працювати, їх загального розвитку, зокрема й розвитку логічного мислення, просторових уявлень тощо. Зацікавленість учнів математикою можна розвинути різними методами, наприклад, вивченням „таємничих" теорем, зокрема теореми Содді.

За дидактичною новизною теорема Содді може значно збагатити фонд навчально-конкурсних і олімпіадних задач.

Серед низки математичних відкриттів XX ст., в сенсі близькості їх до понять елементарної геометрії, особливе місце належить відкриттю Ф. Содді теореми про взаємнодотичні кола і сфери.

Фредерік Содді (2.09.1877 - 22.09.1956) – англійський радіохімік, член головного лондонського королівського товариства (з 1910 р.). Народився в Істборні. Закінчив Оксфордський університет у 1898 році. В 1900-1902 рр. працював з Е. Резерфордом у Мак-Шилському університеті в Монреалі, у 1904-1914 рр. викладав в університеті у Глазго.

Основні його праці присвячено дослідженню радіоактивності. Спільно з Резерфордом у 1902 р. відкрив радіоелемент торій-х (радій-224) і довів хімічну інертність двох еманацій радону-220 і радону-222. У цьому ж році з указаним вченим розробив основи теорії радіоактивного розпаду, а у 1903 р. сформулював закон радіоактивних перетворень, виразив його математичною мовою, і ввів поняття „Період напіврозпаду". Сумісно з Рамзаєм тоді ж довів, що при радіоактивному розпаді радію і радону утворюється гелій. Проблема розміщення численних радіоелементів – радіоактивних продуктів перетворення урану і торія – в періодичній системі елементів була розв'язана після того, як Содді у 1913 р. ввів поняття про ізотопи. Незалежно від К. Фаянса у 1913 р. сформулював правила зміщення, або закон радіоактивного зміщення: при α-розпаді відбувається зміщення радіоелементу в періодичній системі на два місця вліво, а при β-розпаді – на одне вправо. Разом з Д. Кренстоном і незалежно від О. Гана і Л. Мейтнера у 1918 р. відкрив протактиній. Після 1919 р. переважно займався дослідженням економічних, соціальних і політичних проблем, а також проблем механіки і математики. Содді – член низки академій наук, у 1921 р. отримав Нобелівську премію. Його ім'ям названо мінерал Соддіт. 22 вересня 1956 р. Ф. Содді помер.

Теорема Содді, яка невідома вчителям, багата на прямі й опосередковані логіко-психологічні зв'язки з низкою базових понять математики: дотик прямої з колом, дотик двох і більше кіл та сфер, формула Герона тощо.

Існує декілька версій щодо відкриття формул Содді. Розглянемо одну з них. Упродовж тривалого, так званого „періоду Едо" (1603-1867) Японія перебувала майже в повній ізоляції від західного світу і розвивалася самостійно, без впливу його цивілізацій. Проте це не перешкодило розвитку японської науки, зокрема математики. Особливо процвітав розвиток геометрії. Японці вважали, що мистецтво геометрії угодне Богові. Нею захоплювалися представники усіх станів, від селян до самураїв. Свої відкриття, теореми вони зображали яскравими кольоровими фарбами на дошках – так званих „сангаку” – і вивішували на території храмів – переважно синтоїстських, рідше – буддистських – і усипальнях. Такі дошки були своєрідною „публікацією” автора, який здійснив відкриття. Словесних пояснень не було. Автор ніби говорив: „Дивися і, якщо зможеш, доведи!”

Чудові теореми і задачі, зібрані в книзі „Японська храмова геометрія”, авторів Х. Фукагава і Д. Педо, що вийшла у 1989 р. в Канаді, можна охарактеризувати як своєрідне „числення кіл”, „гімн кола” [5]. Серед зібраних у ній теорем є не лише формула Содді, але й її узагальнення на тривимірний випадок. Іншими словами, якщо бути точним, то тривимірний аналог цієї формули сформульований на сучасному рівні, тоді як для плоского випадку наводиться формула, за якою радіус четвертого кола виражається через три інші. У коментарях повідомляються цікаві фактичні і хронологічні дані. Виявляється, що питання про співвідношення між радіусами чотирьох кіл, які попарно дотикаються, обговорювалося Р. Декартом (середина XVII ст.) у його листуванні з принцесою Елізабет, внучкою англійського короля Джеймса І. Що ж до японських геометрів, то першу згадку про співвідношення між радіусами кіл зафіксовано на дошці (сайгакові) у 1796 р. в Токійській префектурі, а повне доведення опубліковано у 1830 р. Цікаво, що приклад, який ілюструє зв’язок між радіусами п’яти дотичних сфер, було описано на дошці, знайденій у тій же Токійській префектурі, яку загублено в 1785 р. Така коротка передісторія формули Содді [3, с. 210].

Формулу Содді було опубліковано в 1936 р. її першовідкривачем для дво- ($n = 2$) і тривимірного ($n = 3$) просторів. Содді навів знайдену ним формулу, проте згодом по-різному цю теорему довели інші математики.

Першим теорему Содді для чотирьох кіл довів англієць Г. Кокстер (1961) у своїй книзі „Вступ до геометрії” [2], застосувавши теорему косинусів, що потребує громіздких перетворень. Цю ж теорему наведено у праці М. Гарднера „Математичне дозвілля” (1972) [1].

Повне доведення теореми Содді для n-мірних гіперсфер дав У.С. Госсет у такій формі

$$n\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2,$$

де $k_i = \dfrac{1}{r_i}$ є кривина взаємнодотичних гіперсфер. Це доведення не є елементарним і засновано на застосуванні властивостей визначника Грамма.

Метою статті є обґрунтування (на прикладах розв’язаних задач) використання потенціалу теореми Содді для розвитку в учнів зацікавленості математикою.

У формулюванні Ф. Содді теорема складається з двох тверджень:

1. Сума квадратів значень кривини чотирьох взаємнодотичних кіл дорівнює половині квадрата суми значень кривини цих кіл

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2.$$

У символах кривини ця формула матиме вигляд

$$2\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2\right)=\left(k_1+k_2+k_3+k_4\right)^2, \qquad (1)$$

де $k_i = \dfrac{1}{r_i}$ кривина взаємнодотичних кіл, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

2. Сума квадратів значень кривини п’яти взаємнодотичних сфер дорівнює третині квадрата суми значень кривини цих сфер

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}+\frac{1}{r_5^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}\right)^2.$$

У символах кривини ця формула має вигляд

$$3\left(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2+k_5^2\right)=\left(k_1+k_2+k_3+k_4+k_5\right)^2, \quad (2)$$

де $k_i=\dfrac{1}{r_i}$ кривина взаємнодотичних сфер, $i\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Застосування теореми Содді. Розглянемо розв'язування задач з використанням формули Содді.

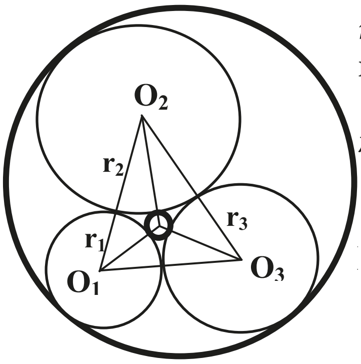

Рис. 1

Задача 1. Дано три кола $K_1(O_1, r_1)$, $K_2(O_2, r_2)$ і $K_3(O_3, r_3)$. Потрібно знайти радіуси кіл, які дотикаються даних трьох внутрішнім і зовнішнім чином, якщо $r_1=1$, $r_2=2$ і $r_3=3$ (див. рис. 1).

Розв'язання. Скористаємося формулою Содді (1). Підставляючи у формулу Содді відповідні значення кривини, отримуємо

$$2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+k_4^2\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+k_4\right)^2,$$

або $k_4^2-\dfrac{11}{3}k_4-\dfrac{23}{36}=0$.

Розв'язавши квадратне рівняння, маємо $k_4=\dfrac{23}{6}$ або $k_4'=-\dfrac{1}{6}$.

Відповідь: Даних трьох кіл $K_1(O_1, r_1)$, $K_2(O_2, r_2)$ і $K_3(O_3, r_3)$ дотикається зовнішнім чином коло $K_4(O_4, r_4)$ радіуса $r_4=\dfrac{1}{k_4}=\dfrac{6}{23}$, а внутрішнім – коло радіуса $r_4'=\dfrac{1}{k_4'}=-6$.

Зауваження. Від'ємні значення *r* та *k* тут і надалі означають, що коло (сфера) дотикається внутрішнім чином заданих кіл (сфер).

Задача 2. Знайти цілочисельні радіуси взаємно дотичних сфер, якщо r_5=-6 є радіусом п'ятої сфери $C_5(O_5, -6)$, усередині якої розташовано три задані сфери $C_1(O_1, 1)$, $C_2(O_2, 2)$, $C_3(O_3, 3)$, а четверта сфера $C_4(O_4, x)$ – невідомого радіуса.

Розв'язання. Для знаходження радіуса четвертої сфери, взаємнодотичних з усіма даними сферами скористаємося формулою (2), у результаті отримаємо

$$3\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(-6)^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{-6}\right)^2.$$

Звідси маємо рівняння $36k^2$-$60k$+25=0, обидва корені якого дорівнюють 5/6, тоді x=6/5.

Це означає, що існують дві сфери, які задовольняють умові Содді, але розташовані симетрично по обидва боки від площини центрів вихідних трьох сфер C_1, C_2, C_3. Отже, $C_1(O_1, l)$, $C_2(O_2, 2)$, $C_3(O_3, 3)$, $C_4(O_4, 6/5)$, $C_5(O_5, -6)$, де $C_5(O_1, -6)$ – сфера з центром у точці O_1 і радіуса r_5=-6, яка вутрішнім чином дотикається чотирьох початкових сфер.

Задача 3. Нехай $r_5=\dfrac{6}{23}$ радіус п'ятої сфери, яка дотикається зовнішнім чином трьох початкових сфер $C_1(O_1, l)$, $C_2(O_2, 2)$, $C_3(O_3, 3)$. Знайти радіус четвертої сфери, взаємнодотичної з усіма заданими.

Розв'язання. Для знаходження радіуса четвертої сфери взаємнодотичної з усіма заданими теж скористаємося формулою Содді. Отже,

$$3\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+x^2+\frac{1}{(6/23)^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+x+\frac{23}{6}\right)^2.$$

Звідси маємо рівняння $36k^2$-204k+289=0, обидва корені якого дорівнюють 17/6, тоді r_4=6/17.

Рівняння має два однакових корені, що означає існування двох сфер, які задовольняють умові Содді, але розташовані симетрично по обидва боки від площини центрів початкових трьох сфер $C_1(O_1, l)$, $C_2(O_2, 2)$, $C_3(O_3, 3)$.

Задача 3 (обернена). Нехай задано сфери $C_1(O_1, 1)$, $C_2(O_2, 2)$, $C_3(O_3, 3)$, $C_4(O_4, 6/5)$. Треба знайти радіуси двох сфер, які внутрішнім і зовнішнім чином дотикаються заданих сфер.

Розв'язання. Скористаємося теоремою Содді, отримаємо

$$3\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{(6/5)^2}+\frac{1}{r_5^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6/5}+\frac{1}{r_5}\right)^2.$$

Звідси маємо рівняння $36k_5^2-96k_5-17=0$, коренями якого є 17/6 та -1/6, тоді r_5 =6/17 – радіус сфери, що дотикається зовнішнім чином до заданих сфер, а r'_5 =-6 – радіус сфери, яка внутрішнім чином дотикається заданих сфер.

Перевірка. Якщо r =6/17, то

$$3\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{(6/5)^2}+\frac{1}{(6/17)^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{17}{6}\right)^2,$$

$$3\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{25}{36}+\frac{289}{36}\right)=\left(\frac{33}{6}\right)^2,\quad 3\cdot\frac{363}{36}=\frac{1089}{36}, \text{ тобто } \frac{1089}{36}=\frac{1089}{36}.$$

Якщо r =-6, то аналогічно отримуємо, що

$$3\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{25}{36}+\frac{1}{36}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{11}{6}\right)^2,\quad 3\cdot\frac{75}{36}=\left(\frac{15}{6}\right)^2,\quad \frac{225}{36}=\frac{225}{36}.$$

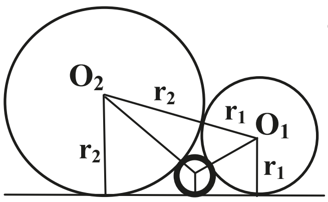

Рис. 2

Задача 4. Нехай задано кола $K_1(O_1, r_1)$, $K_2(O_2, r_2)$ і $K_3(O_3, r_3)$. Знайти радіус четвертого кола, що дотикається трьох кіл радіусів r_1=1, r_2=2, r_3 =∞ (див. рис. 2).

Розв'язання. Скористаємося формулою Содді (1). Для заданих значень отримаємо

$$2\left(1+\frac{1}{4}+0+k_4^2\right)=\left(1+\frac{1}{2}+0+k_4\right)^2.$$ Звідси маємо $k_4^2-3k_4+\frac{1}{4}=0$.

Дане рівняння має два корені $k_4=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ або $k'_4=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

Звідки отримуємо, що радіус шуканого кола дорівнює $r_4=\frac{1}{k_4}=\frac{2}{3+2\sqrt{2}}=6-4\sqrt{2}$.

Відповідь. Радіус кола $K_4(O_4, r_4)$, що дотикається кіл $K_1(O_1, r_1)$, $K_2(O_2, r_2)$ і $K_3(O_3, r_3)$ – прямої, дорівнює $r_4=6-4\sqrt{2}$.

У книзі О. Ерднієва наведено загальне доведення теореми Содді для випадку n=2 [4]. Це доведення може бути засвоєне учнями лише 10, 11 класів. У 7-9 класах треба вести підготовку до цієї формули. Інакше кажучи, треба розв'язувати наведені вище задачі без застосування формули Содді.

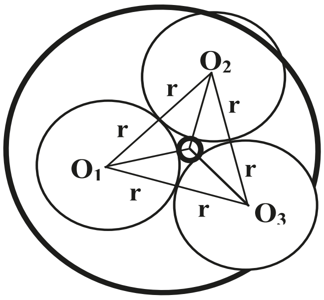

Рис. 3

Задача 5. Нехай задано три кола однакового радіуса. Потрібно знайти радіуси кіл, що внутрішньо і зовнішньо дотикаються цих кіл (див. рис. 3).

Розв'язання. За умовою задачі r1=r2=r3=r, тоді $k_1=k_2=k_3=\frac{1}{r}$. Скористашись формулою Содді (1), отримуємо

$$2\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}+k_4^2\right)=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}+k_4\right)^2.$$ Звідси $k_4^2-\frac{6}{r}k_4-\frac{3}{r^2}=0$.

Дане рівняння має корені $k_4=\frac{6+4\sqrt{3}}{2r}$ або $k'_4=-\frac{4\sqrt{3}-6}{2r}$. Тоді $r_4=\frac{2r}{4\sqrt{3}+6}$ або $r'_4=-\frac{2r}{4\sqrt{3}-6}$.

Відповідь: Радіус малого кола дорівнює $r_4=\frac{2r}{4\sqrt{3}+6}$, а радіус великого – $r'_4=-\frac{2r}{4\sqrt{3}-6}$.

Розглянемо цю ж задачу при r = 1.

Розв'язання. 1 *спосіб* (із застосуванням теореми Содді). У нашому випадку $r_1=r_2=r_3=1$, тоді $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ і за формулою (1), отримуємо $2\left(3 + k_4^2\right) = \left(3 + k_4\right)^2$.

Звідси $k_4^2 - 6k_4 - 3 = 0$.

Дане рівняння має корені $k_4 = \dfrac{6 + 4\sqrt{3}}{2}$ або $k_4' = \dfrac{6 - 4\sqrt{3}}{2}$. Тоді $r_4 = \dfrac{2}{6 + 4\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}$ або $r_4' = -\dfrac{2}{6 - 4\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

***Відповідь*:** Радіус малого кола дорівнює $r_4 = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}$, а радіус великого кола – $r_4' = \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

2 *спосіб* (без застосування теореми Содді).

Оскільки $K_1(O_1, 1)$, $K_2(O_2, 1)$ і $K_3(O_3, 1)$ мають однаковий радіус, то трикутник $O_1O_2O_3$ є рівностороннім із стороною, що дорівнює 2. Висоти трикутника перетинаються в одній точці O_4, яка і є центром кіл, що дотикаються даних зовнішнім і внутрішнім чином. O_2M – висота (бісектриса, медіана) трикутника $O_1O_2O_3$, опущена з вершини O_2.

Розглянемо прямокутний трикутник O_1O_4M, кут $O_4O_1M=30^\circ$, оскільки O_2M – бісектриса.

Нехай радіус малого кола дорівнює x, тоді сторона $O_1O_4 = 1+x$, а

$$\cos\angle O_4O_1M = \cos 30^{\text{п}} = \frac{O_1M}{O_1O_4} = \frac{1}{1+x} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$ де $O_1M = 1$.

Звідси $x = \dfrac{(2\sqrt{3} - 3)}{3}$ – радіус малого кола.

Знайдемо радіус великого кола

$$x' = x + 2 = \frac{(2\sqrt{3} - 3)}{3} + 2 = \frac{(2\sqrt{3} + 3)}{3}.$$

***Відповідь*:** Радіус малого кола дорівнює $r_4 = \dfrac{2\sqrt{3} - 3}{3}$, а радіус великого – $r_4' = \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

Учні захоплюються уроками з математики, які містять елементи нової організації, що відрізняються від попередніх, вимагають активної, напруженої роботи, є емоційно насиченими і змістовими.

Відбір навчального і наочного матеріалу здійснюється вчителем з використанням кращих зразків математичних теорій, теорем і задач, що мають не лише важливість для розвитку власне математики, але й чіткі формулювання, рисунки, схеми, діаграми, моделі, які зв'язані з реально існуючими об'єктами і процесами довкілля.

Включення теореми Содді в програму курсу елементарної і аналітичної геометрії дозволить забезпечувати поєднання координатного методу з обчисленнями або контроль точних побудов вимірюваннями й обчисленнями.

Список використаних джерел

4. Гарднер М. Математические досуги / М. Гарднер. – М. : Мир, 1972. – 496 с.
5. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию / Гарольд Скотт Макдональд Кокстер. – М. : Наука, 1966. – 642 с.
6. Шарыгин И.Ф. Математика для школьников старших классов / И.Ф. Шарыгин. – М. : Изд-во „Дрофа", 1995. – 496 с.
7. Эрдниев О.П. От задачи к задаче по аналогии / Очир Пюрьвеевич Эрдниев. – М. : Столетие, 1998. – 275 с.
8. Fukagawa H. JAPANESE TEMPLE GEOMETRY PROBLEMS / H. Fukagawa, D. Pedoe / Charles Babbage Research Foundation. – Winnipeg, Canada, 1989. – Режим доступу : www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk/.../Japanese_Temple_Geometry.html

In the article the authors depicts the biographic data. Soddy and his theorems of elementary geometry about reciprocally touched circumferences and spheres. Solving the concrete tasks is based on the advantages of the results of Soddy. It is marked that the theorem of Soddy can considerably enrich the fund of educational-competitive and olympiad tasks.

Key words: *reciprocally touched circumferences and spheres, competitive and olympiad tasks.*