УДК 539.19(075.8)

Мороз І.О.*

МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ ПИТАННЯ ПРО ПОРІВНЯННЯ СТАТИСТИК У КУРСІ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Розглядається методика викладання питання про порівняння статистик в курсі статистичної фізики. Встановлюються фізичні умови, при яких для опису властивостей макроскопічних систем можна використовувати класичну статистику Максвелла-Больцмана. Порівнюється критерій виродження для гелію та металів.

Ключові слова: *спін, статистики Максвелла-Больцмана, Бозе-Ейнштейна, Фермі-Дарака.*

На початку XX століття в фізиці виникли протиріччя, які свідчать про те, що відмінності в станах і властивостях термодинамічних систем, пов'язані не лише з класичними відмінностями (маса, заряд тощо) атомів та молекул чи інших елементарних частинок, із яких вони складаються, але й з більш тонкими їх відмінностями, такими, що виходять за рамки класичної фізики. Таким чином, для розв'язання протиріч, пов'язаних, наприклад, з електронною теплоємністю металів і тепловим випромінюванням (та деякими іншими), виникає задача про врахування цих «некласичних» властивостей частинок. Ними є наявність спіну та його величина. Річ у тому, що, як відомо із квантової механіки, частинки з напівцілим спіном (вони одержали назву – ферміони) підкоряються принципу Паулі про неможливість частинок знаходитись в одному й тому ж квантовому стані, а до всіх інших частинок (бозони) принцип Паулі не застосовується. Крім цього, з позицій квантової фізики всі частинки одного сорту є абсолютно тотожними. Класичні ж частинки зовсім не мають спіна і їх можна фізично розрізнити. В зв'язку із цими квантовими відмінностями необхідно детально підійти до описання ймовірності стану термодинамічних систем.

Науковий розв'язок протиріч класичної статистики й експериментальних даних призвів до створення нового розділу теоретичної фізики – квантової статистики, вивчення якого в значній мірі розширює фізичний світогляд майбутнього вчителя фізики. Але, як показує аналіз, у навчальній та методичній літературі питання про зіставлення класичної та квантової статистик розглядається із занадто загальних позицій, що ускладнює їх розуміння і подальше використання.

Мета статті – на основі теоретичного, методичного та онтодидактичного аналізу навчально-методичної літератури з питань термодинаміки й статистичної фізики розробити авторську методику висвітлення питань про порівняння статистик в курсі теоретичної фізики.

Будемо розглядати найзагальніший випадок – відриті квантові системи, які можуть обмінюватися як енергією, так і частинками з навколишнім середовищем – термостатом. У цьому випадку для опису систем необхідно використовувати великий канонічний розподіл Гіббса, який визначає ймовірність виявлення системи з енергією E_i й кількістю частинок n:

$$\omega(E_i, n) = \frac{e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} \cdot g(E_i, n)}{\sum e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} \cdot g(E_i, n)}. \tag{I}$$

Для зіставлення статистик визначимо в кожній із них середнє число частинок, що знаходяться у деякому квантовому стані.

Виділимо деякий стан системи з енергією ε_i, і цей стан будемо розглядати як підсистему в термостаті. Це завжди можна зробити, оскільки в цьому стані буде деяка кількість частинок з енергією ε_i, і внаслідок взаємодії частинок деякі з них вибуватимуть із цього квантового стану, а на їх місце можуть потрапляти інші. Тоді загальна енергія підсистеми може змінюватися за рахунок обміну частинок з іншими підсистемами (іншими рівнями енергії).

$$E_i = n \cdot \varepsilon_i \tag{II}$$

Використовуючи (I), визначимо середнє число частинок на вибраному рівні:

$$\langle n \rangle = \frac{\sum\limits_{i,n} n \cdot e^{\frac{\mu n - E_i}{\theta}} \cdot g(\varepsilon_i, n)}{\sum\limits_{i,n} e^{\frac{\mu n_i - E_i}{\theta}} \cdot g(\varepsilon_i, n)} \tag{III}$$

Підставляючи (II) в (III), ми тим самим автоматично враховуємо підсумовування по i:

$$\langle n \rangle = \frac{\sum\limits_{n} n \cdot e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \cdot g(n)}{\sum\limits_{n} e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \cdot g(n)}.$$

Цей вираз, очевидно, може бути перетворений до вигляду:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_{n} e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \cdot g(n). \tag{IV}$$

Відмінність квазікласичної статистики Масвелла-Больцмана від квантових статистик Бозе-Ейнштейна та Фермі-Дірака виявляється у підрахунку кратності виродження $g(n)$. У класичній статистиці кратність виродження визначимо діленням фазового об’єму, що відповідає вибраній системі (h^3 – так як всі частинки знаходяться в одному стані з енергією ε_i) на об’єм одного квантового стану (h^3) і на $n!$. Ділення на $n!$ враховує, що перестановки частинок в межах одного квантового стану, не дають нового стану. Тоді для квазікласичних частинок Максвелла-Больцмана кратність виродження буде рівною:

$$g(n) = \frac{h^3}{n! h^3} = \frac{1}{n!}.$$

Тому середнє значення кількості частинок на вибраному енергетичному рівні в статистиці Максвелла-Больцмана визначиться наступним чином:

$$\langle n \rangle = \theta \frac{\partial}{\partial \mu} ln \sum_{n=0}^{N} e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta} n} \frac{1}{n!}. \tag{V}$$

Із цього виразу видно, що для квазікласичних частинок хімічний потенціал μ не може бути додатним, оскільки в протилежному випадку при $\mu > \varepsilon_i$ ряд в (V) буде розходитись. У такому випадку верхню межу в сумі по n можна замінити на (∞), що відповідає додаванню нескінченно малих членів при $n > N$. Тоді ряд в (V) дорівнює $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, де $x = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}}$ і середня кількість частинок на довільно вибраному енергетичному рівні ε_i в статистиці Максвелла-Больцмана буде дорівнювати:

$$n = e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{\theta}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{\theta}}}, \tag{VI}$$

де знак усереднення ⟨ ⟩ опущено. Цей вираз вперше одержав Больцман, тому класичну статистику часто називають статистикою Больцмана без згадки Максвелла. Проте неважко побачити, що вираз (VI) є аналогом розподілу Максвелла-Больцмана.

У випадку квантових статистик Фермі-Дірака та Бозе-Ейнштейна, на відміну від статистики Максвелла-Больцмана, згідно з квантовим принципом тотожності, всі частинки одного виду є абсолютно тотожні. Тому у виразі (IV) при підрахунку кратності виродження втрачає зміст ділення на n!. Для визначення кратності виродження в цьому випадку необхідно фазовий об'єм, що відповідає вибраній підсистемі (він дорівнює h^3, оскільки підсистема містить один квантовий рівень) розділити на фазовий об'єм, що приходиться на один квантовий рівень (він також дорівнює h^3), тоді в (IV) $g(\varepsilon_i)=1$. Отже, середнє число тотожних частинок на i-том енергетичному рівні буде дорівнювати:

$$\langle n\rangle=\theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_{n}^{N}e^{(\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta})n}. \qquad \text{(VII)}$$

В цьому виразі підсумовування виконується за кількістю всіх частинок системи, які можуть знаходитися на i-тому рівні. У випадку частинок, що не підкоряються принципу Паулі, верхня межа може бути замінена на (∞), оскільки при $n>N$ члени ряду в (VII) будуть нескінченно малими (за умови $\mu<0$). Тоді:

$$\langle n\rangle=\theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_{0}^{\infty}e^{(\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta})n}.$$

Тут ряд $\sum_{0}^{\infty}e^{(\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta})n}$ є нескінченно спадною геометричною прогресією зі знаменником $q=e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}}$, сума якої, як відомо із математики, визначається наступним виразом: $\sum_{0}^{\infty}e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}n}=\frac{1}{1-q}$.

Таким чином, середнє число тотожних частинок, що не підкоряються принципу Паулі (світлові кванти, k - й π-мезони, атоми та молекули, що мають у своєму складі парне число елементарних частинок), які знаходяться на енергетичному рівні ε_i, дорівнює:

$$n=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}}-1}. \qquad \text{(VIII)}$$

Цей вираз називається розподілом Бозе-Ейнштейна.

Відмінність квантових статистик Бозе-Ейнштейна й Фермі-Дірака, враховується межами підсумовування в (VI). Якщо частинки підкоряються принципу Паулі, то на кожному енергетичному рівні не може бути більше однієї частинки. Тоді в (VI) n змінюється від 0 до 1. Отже:

$$\langle n\rangle=\theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_{0}^{1}e^{(\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta})n}=\theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left(1+e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}}\right)$$

або

$$n=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}}+1}. \qquad \text{(IX)}$$

Це і є розподіл Фермі-Дірака, що визначає середнє число тотожних частинок, що підкоряються принципу Паулі (атоми й молекули з непарним числом елементарних частинок, нуклони, електрони та інші частинки з напівцілим спіном), які знаходяться на енергетичному рівні з енергією ε_i.

Графічно вирази (VI, VIII, IX) можна зобразити у вигляді кривих на рис. 1.

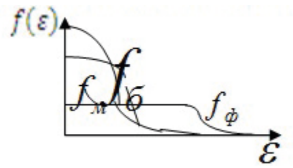

Рис.1.Графіки розподілів Маквелла-Больцмана $f_м$, Фермі-Дірака $f_ф$ й Бозе-Ейнштейна $f_б$

В макроскопічних системах рівні енергії розташовані достатньо густо (квазінеперервно) і часто потрібно визначати не кількість частинок, які знаходяться на деякому конкретно вибраному енергетичному рівні, а кількість частинок, які мають енергію від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$. Очевидно для знаходження середнього числа частинок з енергією від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$ необхідно середнє число частинок на одному рівні помножити на кількість рівнів $\frac{d\Gamma}{h^3}$, де $d\Gamma$ – фазовий об'єм, який відповідає станам з енергією від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$.

Тоді кількість частинок, які знаходяться на рівнях енергії від ε до $\varepsilon + d\varepsilon$, буде дорівнювати:

$$dn = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{\theta}} + b} \cdot \frac{d\Gamma}{h^3}, \text{ де } b = \begin{cases} 0, & \text{класичні частинки,} \\ +1, & \text{ферміони,} \\ -1, & \text{бозони.} \end{cases} \tag{X}$$

Атоми, молекули та інші мікроскопічні частинки повинні описуватися законами квантової механіки, тобто підкорюватись розподілу Бозе-Ейнштейна або Фермі-Дірака. Разом з тим досвід показує, що в багатьох випадках їх рух можна розглядати як рух класичних частинок. Встановимо фізичні умови, при яких від точних квантових розподілів Бозе-Ейнштейна або Фермі-Дірака можна перейти до класичної статистики. Ці умови, очевидно, визначатимуться виразом:

$$e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}} >> 1, \tag{XI}$$

оскільки в цьому випадку в знаменнику виразу (X) можна знехтувати одиницею і одержати розподіл Максвелла-Больцмана (VI).

Припустимо, що умова (XI) виконана і газ є класичним. Тоді, використовуючи (X) і умову нормування $N = \int dn$, запишемо:

$$N = \frac{1}{h^3}\int_{\Gamma} e^{\frac{\mu-\varepsilon}{\theta}} d\Gamma = \frac{1}{h^3} e^{\frac{\mu}{\theta}} \int_{p,q} e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}} 4\pi p^2 dp dV =$$

$$= 4\pi \frac{V}{h^3} e^{\frac{\mu}{\theta}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2m\theta}} p^2 dp = \frac{V}{h^3} e^{\frac{\mu}{\theta}} (2\pi m\theta)^{\frac{3}{2}}.$$

Звідси:

$$e^{\frac{\mu}{\theta}} = \frac{Nh^3}{V(2\pi m\theta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{XII}$$

Як відомо, перехід частинок із одного рівня енергії на інший відбувається за рахунок теплових збуджень ($\theta \geq \varepsilon_i$), тому умову (XI) можна записати у вигляді:

$$e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}} \approx e^{-\frac{\mu}{\theta}} >> 1 \Rightarrow e^{\frac{\mu}{\theta}} << 1.$$

Таким чином, умова (XII) можливості застосування класичної статистики запишеться у вигляді:

$$c = \frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m\theta}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} >> 1. \tag{XIII}$$

Газ, для якого умова (XIII) не виконується, є квантовим або виродженим. Відповідно умову обернену до (XIII):

$$\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m\theta}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} << 1 \qquad \text{(XIV)}$$

називають умовою виродження, тобто умовою, при виконанні якої потрібно використовувати квантові статистики. Аналіз виразу (XIV) показує, що виродження газу може відбутися, якщо має місце хоча б одна із наступних причин:

1) велика концентрація частинок;
2) мала маса частинок;
3) низька температура.

У якості ілюстрації наведених міркувань, оцінимо критерій виродження для гелію при T=10 *К* і p=1 *атм* та для електронного газу в алюмінії при T=10^4*К*, густина алюмінію $\rho = 2,69 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$. Підстановка чисельних значень в (XIII) для гелію дає $C \approx 58$, тобто гелій навіть при такій низькій температурі є невиродженим (класичним). Важчі ж гази будуть невиродженими до дуже низьких температур. Тому у випадку газових систем практично завжди можна використовувати квазікласичну статистику Максвелла-Больцмана, яка даватиме результати, які принаймні якісно узгоджуються з досвідом.

У випадку електронів в алюмінії (та в усіх інших металах), як показують розрахунки, c<<1, тобто електронний газ в металах навіть при високих температурах є виродженим і до нього не можна застосовувати квазікласичну статистику Максвелла-Больцмана.

Якщо умова виродження (XIV) виконується, тобто газ є квантовим, то кількість частинок у заданому квантовому стані буде набагато менша одиниці, тобто принцип Паулі виконується автоматично, оскільки кількість частинок набагато менша кількості станів, і вони потрапляють в кожний стан по одній або взагалі стан залишається незаповненим.

Не дивлячись на те, що у ряді випадків результати класичних статистик співпадають із експериментальними даними, лише створення квантових статистик дозволило пояснити відмічені раніше протиріччя теорії й експерименту.

Висновки. Як показує досвід викладання статистичної фізики, розглянута методика висвітлення питань про створення квантових статистик і порівняння їх з класичною статистикою, достатньо легко сприймається студентами, що дозволяє їм в подальшому ефективно використовувати квантові статистики при розгляді бозе та фермі газів.

Список використаних джерел

1. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. – М. : Наука, 1964, – 567 с.
2. Я.П. Терлецкий. Статистическая физики. М. : Высшая школа, 1973, 277 с.
3. В.Г. Левич. Курс теоретической физики. Т.1. М. : ГИФМЛ, 1962, 695 с.
4. А.И. Ансельм. Основы статистической физики и термодинамики. – М. : Наука, 1973, – 423 с.
5. Ч. Кителъ. Статистическая термодинамика. – М. : Наука, 1977, – 335с.
6. А.М. Федорченко. Вступ до курсу статистичної фізики та термодинаміки. К. : Вища школа, 1973, 187 с.

This article is based on the methodology of teaching question about the comparison of statistician in the course of statistical physics. Physical terms are established in which for description of properties of the macroscopic systems is possible to use classic statistics of Maxwell-Boltzmann. The criterion of degeneration is compared for helium and metals.

Key words: *spin, statisticians of Maxwell-Boltzmann, Booze-Einstein.*