

Список использованных источников

1. *Costa R.C.T.* Quantum mechanics of a constrained particles / *R.C.T. Costa* // *Physical Reviews A*. – 1981 – V. 24. – P. 1982 - 1987.
2. *Encinosa M.* Energy shift from surface curvative of quantum nanostructures / *M. Encinosa, B. Etemandi* // *Physical Review A*. – 1998 – V. 58. – P. 77 - 81.
3. *Cantele G.* Topological surface states in deformed quantum wires / *G. Cantele, D. Ninno, G. Iadonisi* // *Physical Review B*. – 2000. – V. 61. – P. 13730 - 13736.

Надійшла до редакції 19.02.13 р.

УДК 621.317.75 : 519.87

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПРИ АНАЛИЗЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

В.Г. Хромов, О.В. Хромов

Севастопольский национальный технический университет

Приведены результаты сравнительного анализа численного решения дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний и приближенного аналитического решения для скоростной модели трения.

Введение

При выборе математической модели трения на основе экспериментальных осциллограмм колебаний широко используется метод гармонического баланса или метод медленно изменяющейся амплитуды. Для определенного класса задач он позволяет получить конечные аналитические зависимости амплитуды от времени $a(t)$. Метод подробно излагается в классических монографиях по теории колебаний различных авторов [1, 2]. Данная работа посвящена изучению двух важных вопросов: 1) на основании какого количественного параметра можно считать, что затухание является «медленным»; 2) какова погрешность метода, если затухающие колебания являются «не достаточно медленными» или изменяется вид функции трения?

Постановка цели научного исследования

Цель работы: оценка точности метода гармонического баланса путем сравнительного анализа приближенных и точных осциллограмм затухающих колебаний.

Результаты исследований

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, расчетная схема которой представлена на рис. 1. Тело массой m подвешено на упругой связи. Предполагается, что система обладает собственным демпфирующим свойством, которое ото-

бражається с помощью приведенной силы трения F_T . Дифференциальное уравнение вертикальных колебаний тела имеет вид

$$m\ddot{y} = -(F_y + F_T), \tag{1}$$

где приведенная сила трения F_T описывается нелинейной функцией

$$F_T = B \cdot |\dot{y}|^{n-1} \cdot \dot{y}, \tag{2}$$

где n – целочисленный показатель степени;

B – постоянный коэффициент трения.

В общем случае уравнение (1) не имеет точного аналитического решения. Поэтому для теоретического анализа обычно используют приближенный метод гармонического баланса (метод медленно изменяющейся амплитуды). В известных работах [1, 2] указанный метод используется без каких-либо обсуждений, хотя в его основе лежат гипотезы, имеющие весьма спорный характер:

1) координата и скорость осциллятора описываются гармоническими функциями:

$$y = a(t) \cdot \cos(kt), \quad v = \dot{y} = -a(t) \cdot k \cdot \sin(kt), \tag{3}$$

где $k = \text{const}$ – собственная частота колебаний; $a(t)$ – переменная амплитуда колебаний;

2) изменения амплитуды колебаний и кинетической энергии осциллятора за один цикл колебаний малы, т.е. $\Delta a \ll a, \Delta E \approx 0$.

Здесь возникают два вопроса: почему при вычислении скорости \dot{y} в (3) исключают второе слагаемое, включающее производную от амплитуды $\dot{a}(t)$ и почему для затухающих колебаний пренебрегают изменением амплитуды колебаний за один цикл?

Далее вместо исходного уравнения осциллятора (1) используется теорема об изменении кинетической энергии системы для одного произвольного цикла колебаний с учетом второй гипотезы [2]:

$$\Delta E = A_y + A_T \approx 0 \quad \text{или} \quad A_y \approx -A_T. \tag{4}$$

Кроме того, при расчете работы силы упругости A_y вводится дополнительная явно приближенная замена конечных величин на бесконечно малые $\Delta a \approx da, T \approx dt$:

$$A_y \approx F_y \cdot \Delta a = -c \cdot a(t) \cdot T \cdot \frac{\Delta a}{T} \approx -c \cdot a(t) \cdot T \frac{da}{dt}, \tag{5}$$

где $T = 2\pi / k$ – период собственных колебаний системы.

Подставляя последнее выражение в (4), получают дифференциальное уравнение для неизвестной амплитуды колебаний $a(t)$:

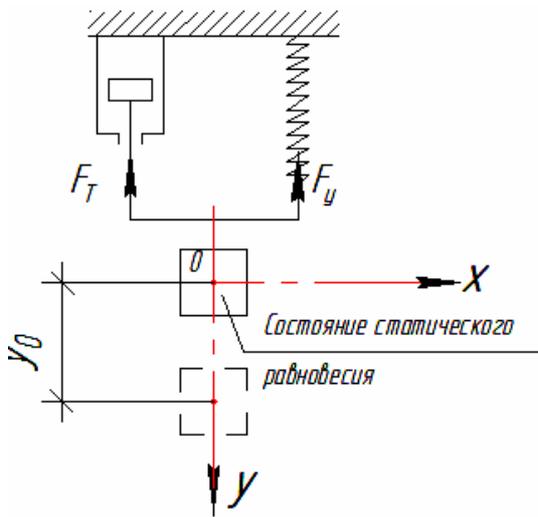


Рис. 1. Расчетная схема

$$c \cdot a(t) \cdot T \frac{da}{dt} = A_T. \quad (6)$$

Для работы силы трения за один цикл колебаний с учетом функции (2) и второй гипотезы можно получить следующую конечную формулу [2]:

$$A_T = - \int_0^T F_T \cdot \dot{x} dt = - \int_0^T B \cdot |\dot{x}|^{n-1} \cdot \dot{x}^2 dt = - \int_0^T B \cdot |\dot{x}|^{n+1} dt = -B \int_0^T (a \cdot k)^{n+1} |\sin kt|^{n+1} dt = -B \cdot a^{n+1} \cdot k^n \cdot J, \quad (7)$$

где $J = \int_0^{2p} |\sin j|^{n+1} dj$ – интеграл, зависящий от показателя степени n ; $j = kt$ – новая угловая переменная (при $t = T$, $j = \frac{2p}{T} \cdot T = 2p$).

Для практики наибольший интерес представляют три частных случая общей формулы (7):

1) показатель степени $n = 0$

$$A_1 = -B_1 \cdot a \cdot \int_0^{2p} |\sin(j)| dj = -4 \cdot B_1 \cdot a;$$

2) показатель степени $n = 1$

$$A_2 = -B_2 \cdot a^2 \cdot k \int_0^{2p} \sin^2 j \cdot dj = -p \cdot k \cdot B_2 \cdot a^2;$$

3) показатель степени $n = 2$

$$A_3 = -B_3 \cdot a^3 \cdot k^2 \cdot \int_0^{2p} |\sin(j)|^3 dj = -\frac{8}{3} \cdot k^2 \cdot B_3 \cdot a^3.$$

Уравнение (6) после подстановки формулы (7) имеет два решения:

– при $n \neq 1$

$$a = \frac{a_0}{\sqrt[n-1]{\left(1 + \frac{B \cdot k^n \cdot J}{c \cdot T} \cdot a_0^{n-1} \cdot (n-1) \cdot t\right)}} = \frac{a_0}{\sqrt[n-1]{\left(1 + \frac{b}{2p} \cdot k^{n-1} \cdot J \cdot a_0^{n-1} \cdot (n-1) \cdot t\right)}}, \quad (8)$$

– при $n = 1$

$$a = a_0 \cdot e^{-\frac{B \cdot k}{c \cdot T} p \cdot t} = a_0 \cdot e^{-\frac{b}{2} \cdot t}, \quad (9)$$

где $b = B/m$ – приведенный коэффициент трения;

a_0 – начальное значение амплитуды затухающих колебаний.

В таблице представлены частные случаи последних формул для амплитуды колебаний при показателе степени $n = 0...3$ [2].

Частные случаи формул для амплитуды колебаний

Показатель степени	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
Функция для амплитуды (8), (9)	$a_0 - \frac{2b}{pk} \cdot t$	$a_0 \cdot e^{-\frac{b}{2}t}$	$\frac{a_0}{1 + \frac{1,333 \cdot b}{p} \cdot k \cdot a_0 \cdot t}$	$\frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{2,356 \cdot b}{p} \cdot k^2 \cdot a_0^2 \cdot t}}$

Как отмечалось выше, принятые для вывода формул (8), (9) гипотезы в приложении к анализу затухающих колебаний являются явно приближенными. Однако в известных работах этот вопрос до сих пор не обсуждался.

В связи с этим выполним подробный количественный анализ точности приведенных выше формул. Введем для координаты и скорости осциллятора более точные, по сравнению с (3), функции:

$$\begin{aligned} y &= a(t) \cos(k^* t), \\ \dot{y} &= \dot{a}(t) \cos(k^* t) - a(t) k^* \sin(k^* t). \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно показать, что функции (10) принимают вид (3) при выполнении следующих условий:

- 1) изменение частоты колебаний за счет рассеяния энергии мало, тогда $k^* \approx k$;
- 2) производная от амплитуды колебаний удовлетворяет условию $\dot{a} \ll ak^*$, тогда $\frac{\dot{a}}{ak^*} \approx 0$ и $\dot{y} = -a(t)k^* \sin(k^* t)$.

Для затухающих колебаний, обусловленных естественными процессами рассеяния энергии, когда трение мало ($h < k$), первое условие выполняется с высокой точностью.

Второе условие можно полагать достаточно точным, если за один период T изменение амплитуды колебаний отвечает неравенству $\frac{\Delta a}{a} < 0,1$, что аналогично условию $N \geq 10$ (N – количество затухающих колебаний системы). Действительно, если выполнить замену $\Delta a \approx \dot{a} \cdot T$ в соотношении $\frac{\Delta a}{a} = \frac{\dot{a} T}{a} = \frac{\dot{a}}{a} \frac{2p}{k} < 0,1$, то получим

$$\frac{\dot{a}}{ak} < \frac{0,1}{2p} \approx 0,016, \text{ и тогда } \dot{a} \ll ak^*.$$

Остается исследовать точность энергетического метода для тех случаев, когда количество циклов затухания находится в диапазоне $2 < N < 10$. С этой целью используем сравнительный анализ результатов численного решения исходного дифференциального уравнения колебаний (1) и приближенного аналитического решения, согласно функциям (3), (8), (9).

Рассмотрим примеры решения уравнения (1) для трех вариантов степенной функции (2), когда $n = 0, 1, 2$. Собственная частота колебаний системы $k = 520 \text{ с}^{-1}$; период колебаний $T = 2p/k = 0,012 \text{ с}$; начальное значение амплитуды колебаний $a_0 = 0,005 \text{ м}$. Численное интегрирование уравнения выполняли в стандартном математическом пакете для промежутка времени $t_1 = N \cdot T$, кратного количеству затухающих колебаний системы N . Значения коэффициентов трения b_1, b_2, b_3 выбирали из условия, чтобы амплитуда колебаний за время t_1 уменьшалась до значения $a_1 = 0,02a_0$ [3].

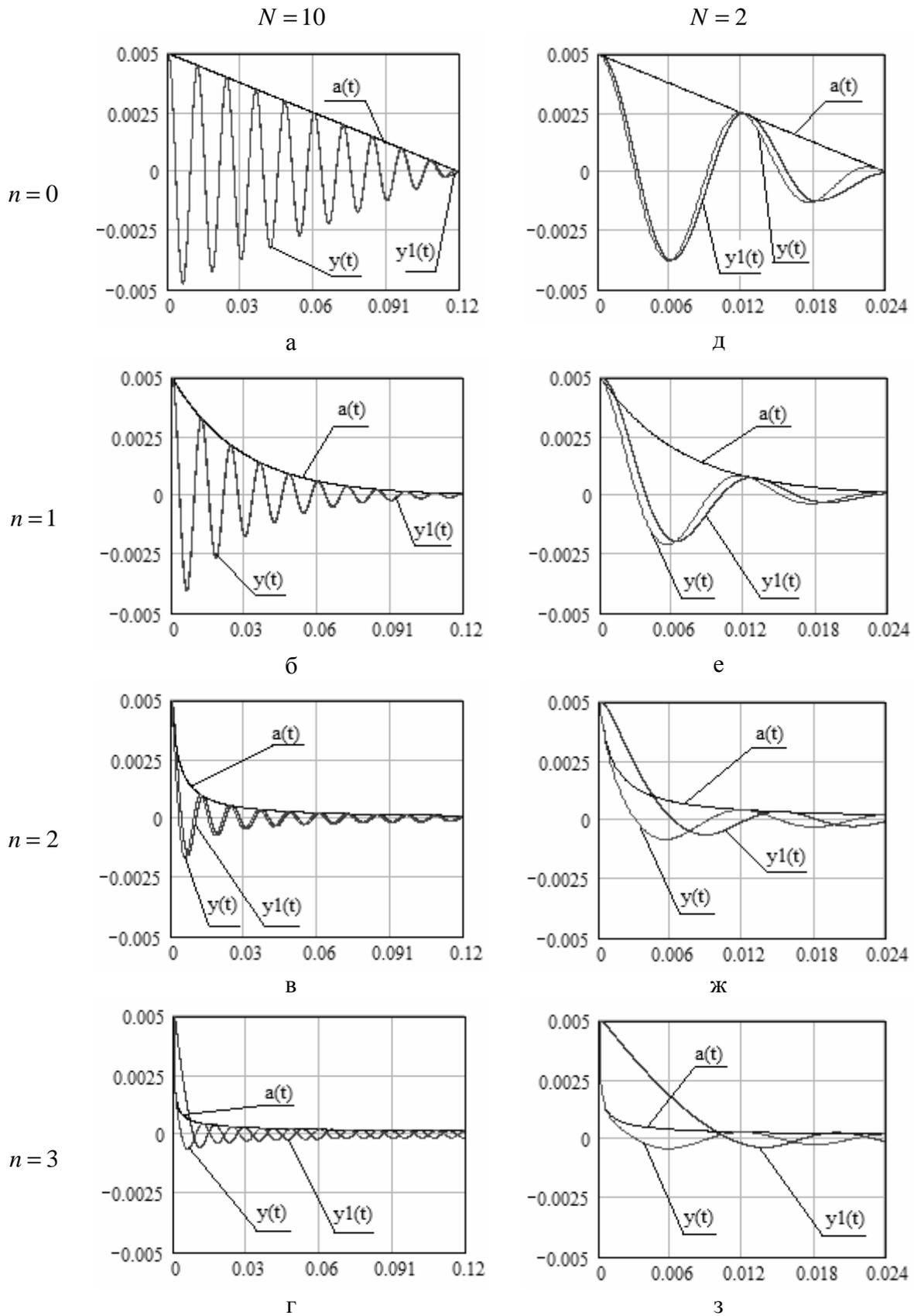


Рис. 2. Расчетные графики функций $a(t)$, $y(t)$, $y_1(t)$

На рис. 2 представленны три вида графиков:

- 1) графики $y(t)$, полученные на основе численного решения точного уравнения (1);
- 2) графики огибающих линий $a(t)$ согласно формулам из таблицы;
- 3) графики приближенных функции (3) $y_1(t) = a(t) \cdot \cos(kt)$.

Все графики показаны для двух крайних значений количества колебаний $N = 10$ и $N = 2$.

Видно, что график функции $a(t)$ уже при $N \geq 2$ совпадает с верхними точками расчетной осциллограммы колебаний $y(t)$ при любых значениях показателя степени n . Вместе с тем, приближенная осциллограмма колебаний $y_1(t)$ совпадает с более точной $y(t)$ в менее широком диапазоне изменения параметров n, N (см. рис. 2, а, б).

Выводы

Метод гармонического баланса, несмотря на достаточно грубый характер исходных гипотез, уже при количестве циклов затухания $N \geq 2$ обеспечивает высокую точность расчетных формул для амплитуды колебаний $a(t)$ из таблицы. Приближенная функция для осциллограммы затухающих колебаний $y_1(t)$ дает удовлетворительные результаты только при $n = 0$, $n = 1$ и $N \geq 10$. В остальных случаях отклонение этой функции от более точной $y(t)$ может составлять 10...100 %.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МЕТОДУ ГАРМОНІЙНОГО БАЛАНСУ ПРИ АНАЛІЗІ ЗАТУХАЮЧИХ КОЛИВАНЬ

В.Г. Хромов, О.В. Хромов

Приведено результати порівняльного аналізу чисельного розв'язання диференціального рівняння вільних затухаючих коливань і наближеного аналітичного розв'язання для швидкісної моделі тертя.

ESTIMATION of the HARMONIC BALANCE METHOD ACCURACY under DAMPED OSCILLATIONS ANALYSIS

V. Khromov, O. Khromov

The comparative analysis of the numerical solution of the differential equation for the free damped oscillations and the approximate analytical solution for the velocity friction model has been resulted.

Список использованных источников

1. Магнус К. Колебания / К. Магнус. – М.: Мир, 1982. – 302 с.
2. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
3. Хромов О.В. Выбор модели внутреннего трения на основе экспериментальных осциллограмм затухающих колебаний системы / О.В. Хромов // Вісник СевНТУ. Сер. Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь: СевНТУ, 2010. – Вип. 106. – С. 35 – 39.

Надійшла до редакції 12.03.13 р.