УДК 517.958

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРИ НЕНУЛЬОВИХ КРАЙОВИХ УМОВАХ

Найко Д.А.
Вінницький національний аграрний університет
Краєвський В.О.
Олексина Т.М.
Вінницький національний технічний університет

Постановка задачі

Знайти розв'язок рівняння теплопровідності

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ \left(0<x<l, 0<t<\infty\right), \tag{1}$$

що задовольняє крайові умови

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} u(0,t)=g_1(t), \\ u(l,t)=g_2(t), \end{cases} \left(0<t<\infty\right) \tag{2}$$

і початкову умову

$$\text{(ПУ)}\ u(x,0)=\varphi(x),\ (0<x<l). \tag{3}$$

Основна частина

Розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\frac{x}{l}. \tag{4}$$

Тоді диференціальне рівняння (1) набуде вигляду

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t)-g_1'(t)+\left(g_1'(t)-g_2'(t)\right)\frac{x}{l},$$

При $f_1(x,t)=f(x,t)-g_1'(t)+\left(g_1'(t)-g_2'(t)\right)\dfrac{x}{l}$ отримаємо

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f_1(x,t) \tag{5}$$

$$\text{(КУ)}\begin{cases} u(0,t)=v(0,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\dfrac{0}{l}=g_1(t)\Rightarrow v(0,t)=0; \\ u(l,t)=v(l,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\dfrac{l}{l}=g_2(t)\Rightarrow v(l,t)=0; \end{cases} \tag{6}$$

$$u(x,0)=v(x,0)+g_1(0)+\left(g_2(0)-g_1(0)\right)\frac{x}{l}=\varphi(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x,0)=\varphi(x)-g_1(0)+\left(g_1(0)-g_2(0)\right)\frac{x}{l}.$$

При $\varphi_1(x)=\varphi(x)-g_1(0)+\left(g_1(0)-g_2(0)\right)\frac{x}{l}$ отримаємо

$$\text{(ПУ)}\ v(x,0)=\varphi_1(x) \qquad (7)$$

Ми звели вихідну задачу до розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (5) з нульовими крайовими умовами (6). Розв'язок цієї задачі знаходиться у вигляді

$$v(x,t)=s(x,t)+w(x,t), \qquad (8)$$

де $s(x,t)$ є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності із нульовими крайовими умовами

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial s}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 s}{\partial x^2},\left(0<x<l,0<t<\infty\right), \qquad (9)$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} s(0,t)=0, \\ s(l,t)=0, \end{cases} \left(0<t<\infty\right); \qquad (10)$$

$$\text{(ПУ)}\ s(x,0)=\varphi_1(x),\ (0<x<l). \qquad (11)$$

$w(x,t)$ знайдемо розв'язавши задачу:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f_1(x,t),\left(0<x<l,0<t<\infty\right), \qquad (12)$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} w(0,t)=0, \\ w(l,t)=0, \end{cases} \left(0<t<\infty\right); \qquad (13)$$

$$\text{(ПУ)}\ w(x,0)=0,\ (0<x<l). \qquad (14)$$

Перша з цих задач розв'язується методом відокремлення змінних [1]

$$s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \qquad (15)$$

де

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx. \qquad (16)$$

Розв'язок задачі (12)-(14) знаходиться у вигляді [2]:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \qquad (17)$$

де

$$T_n(t)=\int_0^t h_n(\tau)e^{-\left(\frac{\pi na}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau,\ h_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx.$$

Після знаходження $s(x,t)$ та $w(x,t)$ шукана функція $u(x,t)$ матиме вигляд

$$u(x,t)=s(x,t)+w(x,t)+g_1(t)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)\frac{x}{l}. \quad (18)$$

Використаємо запропонований алгоритм для знаходження розв'язку однорідного диференціального рівняння $\frac{\partial u}{\partial t}=9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, із ненульовими крайовими умовами

$\begin{cases} u(0,t)=2; \\ u(4,t)=2t+18 \end{cases}$ та початковою умовою $u(x,0)=x^2+2$.

Розв'язок будемо шукати у вигляді (4). Згідно з умовою задачі

$$g_1(t)=2;\ g_2(t)=2t+18;\ \varphi(x)=x^2+2;\ a=3;\ l=4.$$

Враховуючи, що

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-g_1(0)+\left(g_1(0)-g_2(0)\right)\frac{x}{l}=x^2+2-2+\left(2-0-18\right)\frac{x}{4}=x^2-4x,$$

$s(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial s}{\partial t}=9\frac{\partial^2 s}{\partial x^2},\left(0<x<4, 0<t<\infty\right),$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} s(0,t)=0, \\ s(l,t)=0, \end{cases}\quad 0<t<\infty$$

$$\text{(ПУ)}\ s(x,0)=x^2-4x,\ \ (0<x<4).$$

Відносно функції $s(x,t)$ отримали однорідне рівняння теплопровідності із нульовими крайовими умовами. Згідно з (15) отримаємо

$$s(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

де

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^4\left(x^2-4x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)dx.$$

Для знаходження інтегралів, що входять в структуру розв'язку поставленої задачі, використаємо математичний додаток Maple. Тоді

```
> int((x^2-4*x)*sin(Pi*n*x/4),x=0..4);
```

$$\frac{64\left(-2+\pi n\sin(\pi n)+2\cos(\pi n)\right)}{\pi^3 n^3}$$

Отже, $B_n=\dfrac{-64+32\pi n\sin(\pi n)+64\cos(\pi n)}{\pi^3 n^3}$.

Враховуючи, що n натуральне число

$$B_n = \frac{64}{\pi^3 n^3}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0, n = 2k, \\ -\dfrac{128}{\pi^3 (2k-1)^3}, n = 2k-1 \end{cases}$$

В результаті отримаємо

$$s(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{128}{\pi^3 (2k-1)^3} \cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t} \cdot \sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4} x\right).$$

Знайдемо $f_1(x,t)$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - g_1'(t) + \left(g_1'(t) - g_2'(t)\right)\frac{x}{l} = -\frac{x}{2}.$$

Тоді $w(x,t)$ є розв'язком такої задачі:

$$\text{(ДРЧП)}\ \frac{\partial w}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{x}{2}, \left(0 < x < 4, 0 < t < \infty\right),$$

$$\text{(КУ)}\ \begin{cases} w(0,t) = 0, \\ w(l,t) = 0, \end{cases} \quad 0 < t < \infty$$

$$\text{(ПУ)}\ w(x,0) = 0,\ (0 < x < 4).$$

Розв'язок останньої задачі знаходиться у вигляді (17), де

$$h_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = -\frac{1}{4}\int_0^4 x\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)dx,$$

```
> int(x*sin(Pi*n*x/4),x=0..4);
```

$$-\frac{16\,(-\sin(\pi\, n) + \cos(\pi\, n)\,\pi\, n)}{\pi^2\, n^2}$$

$$h_n(t) = \frac{-4\sin(\pi n) + 4\pi n\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} = \frac{4(-1)^n}{\pi n};$$

$$T_n(t) = \int_0^t h_n(\tau) e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau = \int_0^t \frac{4(-1)^n}{\pi n} e^{-\left(\frac{3\pi n}{4}\right)^2 (t-\tau)} d\tau;$$

```
> int(4*(-1)^n/Pi/n*exp(-((3*Pi*n/4)^2)*(t-tau)),tau=0..t);
```

$$\frac{64}{9}\,\frac{(-1)^{(1+n)}\left(\mathbf{e}^{\left(-\frac{9\,t\,\pi^2\, n^2}{16}\right)} - 1\right)}{\pi^3\, n^3}$$

$$T_n(t) = \frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3}\left(1 - e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}}\right).$$

Отримаємо

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3}\left(1 - e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right).$$

Тоді шукана функція набуде вигляду (рис. 1)

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}-\frac{128}{\pi^3(2k-1)^3}\cdot e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{4}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)}{4}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64(-1)^n}{9\pi^3 n^3}\left(1-e^{-\frac{9\pi^2 n^2 t}{16}}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{4}x\right)+2+\frac{x(t+8)}{2}.$$

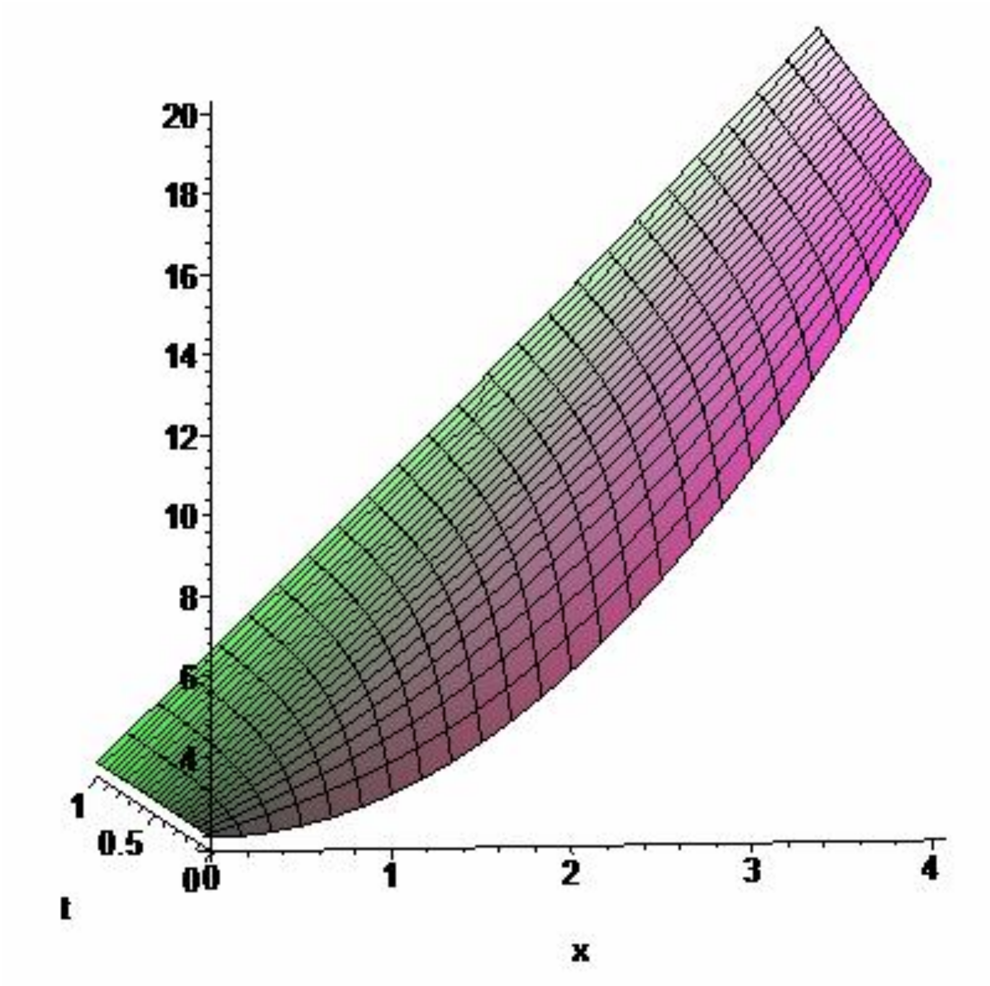
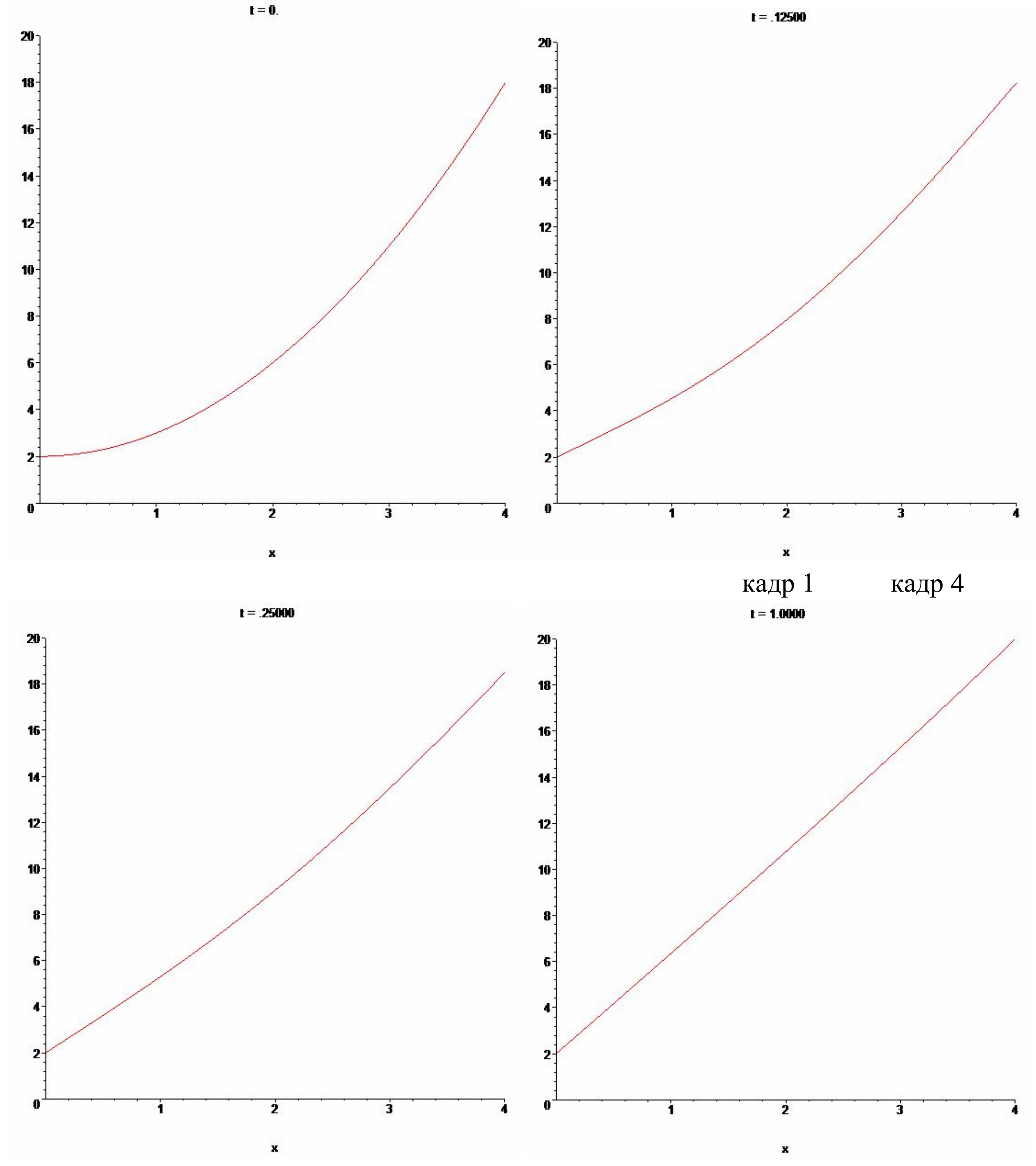


Рис. 1 Графік функції $u(x,t)$

Розглянемо у динаміці змодельоване явище поширення тепла у стержні, використавши оператор animate (рис. 2)

```
> with(plots):
> animate(plot,[sum(-128/(Pi^3*(2*k-1)^3)*
exp(-(3*Pi*(2*k-1)/4)^2*t)*sin(Pi*(2*k-1)/4*x),
k=1..infinity)+sum(64*(-1)^n/(9*Pi^3*n^3)*
(1-exp(-9*Pi^2*n^2*t/16))*sin(Pi*n*x/4),
n=1..infinity)+2+x*(t+8)/2,x=0..4],t=0..1);
```



кадр 1 кадр 4

кадр 7 кадр 25

Рис. 2 Динаміка зміни температури у стержні

Для чисельного знаходження розв'язку диференціального рівняння із частинними похідними із заданими крайовими та початковими умовами в Maple можна використовувати оператор pdsolve, що входить у додаткову бібліотеку PDEtools

```
> pds:=pdsolve(diff(u(x,t),t)=9*diff(u(x,t),x,x),
{u(0,t)=2,u(4,t)=2*t+18,u(x,0)=x^2+2},numeric,time=t, range=0..1);
```

Результат використання оператора pdsolve, що виведено за допомогою оператора plot, представлено на рис. 3.

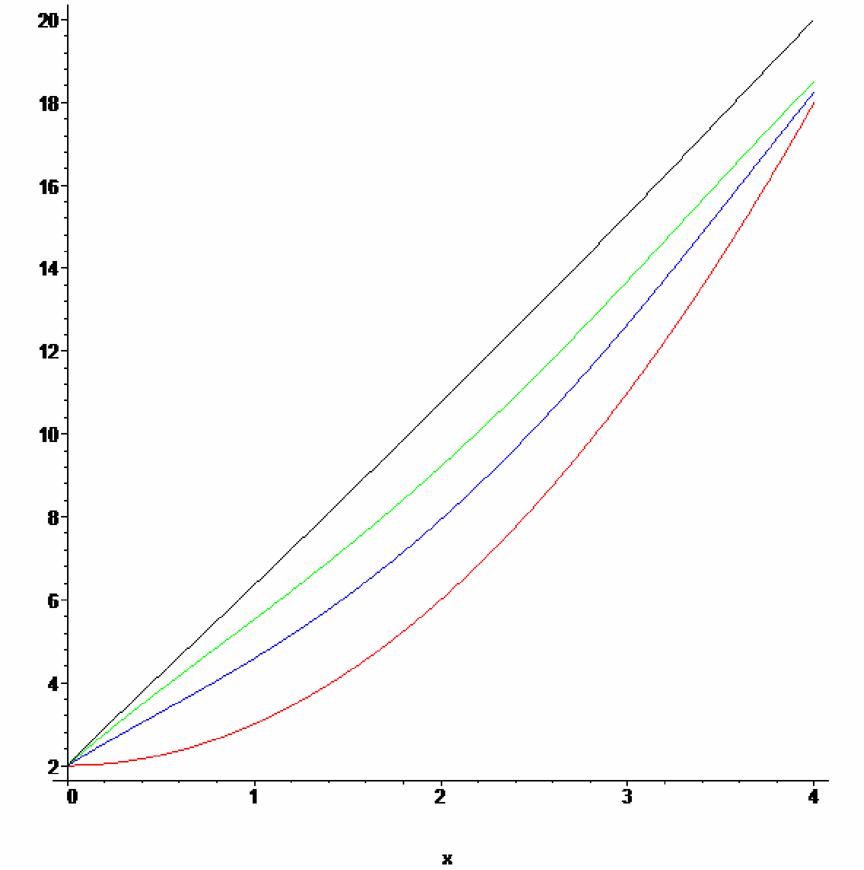


Рис. 3 Чисельний розв'язок за допомогою оператора pdsolve

Висновки

Запропоновано алгоритм, що дозволяє визначити розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності із ненульовими крайовими умовами у вигляді аналітичної функції. Крім того розглянута можливість чисельного знаходження розв'язку поставленої задачі та його візуалізація із можливістю аналізу за допомогою математичного додатка Maple.

Література

1..Вища математика: Підручник: У 2-х кн. – К.: Либідь, 2003. – Кн. 2. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран та ін. – 368 с.

2. Краєвський В. О. Спецкурс математичного аналізу: навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 178 с.