

УДК 631.312

## ВПЛИВ ГРАНИЧНОЇ ТРАЄКТОРІЇ РУХУ СКИБИ ПО ПОЛИЦІ НА ДИНАМІЧНУ СКЛАДОВУ ТЯГОВОГО ОПОРУ ПЛУГА

*Пилипака С.Ф*

*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

*Исследовано динамическую составляющую сопротивления плуга в зависимости от расположения предельной траектории движения пласта по поверхности отвала. Установлены закономерности формирования этой составляющей для цилиндрических отвалов и особенности для цилиндрических отвалов в зависимости от направления вступления пласта на отвал. На примере цилиндрической поверхности отвала культурного типа показано изменение динамической составляющей сопротивления в зависимости от конструктивных параметров отвала и направления вступления пласта на отвал.*

*It is investigated a dynamic component of resistance of a mouldboard depending on a disposition of a limiting mechanical trajectory of a layer on a movement surface. Regularities of shaping of this component for cylindrical movements and a singularity for movements from a cylindroid depending on a direction of an entrance of a layer on a movement are installed. On an instance of a surface of a movement of cultural type from a cylindroid the modification of a dynamic component of resistance depending on design data of a movement and a direction of an entrance of a layer on a movement is shown.*

### **Постановка проблеми**

Академік В.П. Горячкін вивів раціональну формулу сили тягового опору плуга, до якої входить три складових, одна із яких прямо пропорціональна квадрату швидкості відносного руху скиби по полиці, так звана динамічна складова. В свою чергу, вони знаходяться в складній залежності від властивостей ґрунту, швидкості оранки, форми поверхні полиці. Сам автор формули зазначав, що «...в будущем, при более подробном изучении, каждый из трех членов формулы, может быть, придется развить и заменить более сложными функциями». Проф. Л.В. Гячев детально розглянув сили, що виникають при взаємодії скиби із полицею та склав диференціальне рівняння траєкторії руху середньої точки скиби по полиці [1]. При цьому він врахував розміри та питому вагу скиби, її пружність, швидкість оранки і ув'язав ці параметри із нормальною і геодезичною кривиною та довжиною траєкторії. Із складеного диференціального рівняння він отримав результат, згідно якого при збільшенні жорсткості скиби або швидкості її руху по полиці геодезична кривина траєкторії наближається до нуля, тобто скиба намагається рухатися по геодезичній лінії поверхні, яка є верхньою граничною траєкторією. Таким чином, відшукування граничної траєкторії руху скиби зводиться до знаходження геодезичної лінії поверхні полиці, що, в свою чергу, дає можливість розглядати силову взаємодію скиби із полицею.

### **Аналіз останніх досліджень**

Геодезичні лінії на поверхні відіграють роль прямих ліній на площині – вони є найкоротшим шляхом між двома точками на поверхні. Подібно, як із точки на площині можна у всіх напрямках провести пучок прямих ліній, так і із точки на поверхні можна провести пучок геодезичних ліній, серед яких можуть бути прямі лінії (твірні поверхні,

якщо поверхня лінійчата) і криві (плоскі та просторові). Акад. П.М. Василенко вказував на те, що у випадку руху матеріальної точки по інерції замість розв'язання диференціального рівняння руху точки для визначення траєкторії цього руху можна скористатися розв'язанням диференціального рівняння геодезичної лінії [2]. Геодезичні лінії на поверхні описуються диференціальними рівняннями другого порядку, для розв'язання яких потрібно застосовувати чисельні методи. Сьогоднішні засоби комп'ютерної техніки дають можливість їх не тільки знаходити, а й візуалізувати [3].

Можна робити і навпаки – задати бажану граничну траєкторію руху скиби і за нею знаходити саму поверхню. Проектування полиці плуга із розгортних поверхонь за заданою граничною траєкторією руху скиби без силової взаємодії розглянуто в працях [4, 5].

### Мета дослідження

Дослідити вплив граничної траєкторії руху скиби по циліндричних і циліндроїдальних полицях на тяговий опір плуга.

### Основна частина

Якщо ґрунт пружний, задернований, то його рух по полиці відрізняється від руху скиби із крихкого ґрунту. Траєкторію руху пружної скиби по полиці плуга можна з деяким наближенням порівняти із рухом цупкої паперової стрічки, якщо її примусово подавати на полицю в заданому напрямі під кутом  $\gamma$  (рис. 1). Якщо стрічку змусити прилягти до поверхні, то її положення визначить геодезичну лінію. Реальна траєкторія скиби відрізнятиметься від описаної на прикладі паперової стрічки, оскільки під дією сили ваги вона відхилиться вниз по полиці. Розглянемо теоретичне підґрунтя формування траєкторії на прикладі циліндричної поверхні, оскільки диференціальні рівняння для знаходження геодезичних ліній на ній значно спростуються, а самі геодезичні лінії такої поверхні легко уявити – всі вони перетинають прямолінійні твірні під сталим кутом  $\gamma$  і на розгортці перетворюються у прямі лінії.

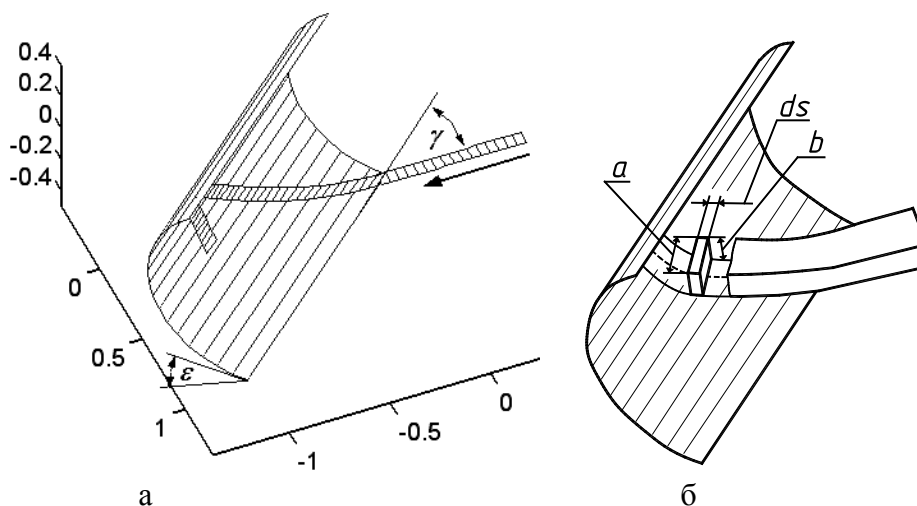
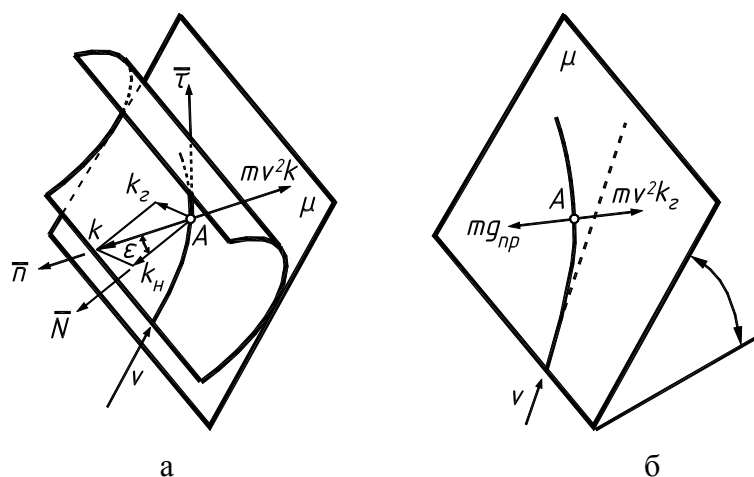


Рис. 1. До визначення напрямку руху скиби по циліндричній поверхні:

- імітація руху скиби по внутрішній поверхні паперовою стрічкою, яка перетинає всі твірні поверхні під сталим кутом  $\gamma$ ;
- геометричні розміри скиби та її нескінченно малий елемент у вигляді паралелепіпеда

В загальному випадку руху матеріальної частинки (в нашому випадку елементарного паралелепіпеда) по просторовій кривій лінії виникає прискорення, одна складова якого спрямована в напрямі дотичної, а друга – в напрямі головної нормалі кривої в точці, в якій знаходиться частинка. Якщо частинка рухається із сталою швидкістю по кривій (а ми маємо саме такий випадок, оскільки приймаємо швидкість руху  $V$  скиби по полиці рівною швидкості руху трактора і сталою), то перша складова дорівнює нулю, а величина другої складової визначається із виразу  $V^2 k$ , де  $k$  - кривина траєкторії в точці знаходження частинки. Якщо крива (траєкторія руху частинки) розташована на поверхні, то частинка буде взаємодіяти із нею, тиснучи із певною силою  $F$ . Сила тиску, як і реакція поверхні, завжди спрямовані вздовж нормалі до поверхні. Її спричиняють складові ваги частинки, відцентрової сили, сили, що згинає скибу, якщо вона пружна, та інші, менш значимі. Якщо вага не залежить від кривини траєкторії, то на останні дві складові кривина має суттєвий вплив.



**Рис. 2. Розкладання вектора кривини та сил, що діють на елемент скиби в точці  $A$  траєкторії його руху із швидкістю  $V$ :**

- а) розкладання кривини в нормальній площині траєкторії на складові вздовж нормалі до поверхні і на дотичну площину;**  
**б) схема дії сил на елемент скиби в дотичній площині**

Нехай елемент скиби знаходиться в точці  $A$  траєкторії (рис. 2, а). Вектор кривини  $k$  спрямований по головній нормалі  $\bar{n}$  траєкторії. Відцентрова сила  $F_c = mV^2 k$  спрямована в протилежну сторону. Її напрям не збігається із напрямом нормалі  $\bar{N}$  до поверхні, тому вектор дії потрібно розкласти на складові вздовж нормалі до поверхні і на дотичну площину. Це рівносильно розкладанню кривини по цих же напрямках, причому складова  $k_n$  на нормаль до поверхні носить назву нормальної кривини, а складова  $k_t$  на дотичну площину – геодезичної кривини. Кут  $\epsilon$  між нормаллю до поверхні і головною нормаллю траєкторії, через який здійснюють розкладання, визначається засобами диференціальної геометрії і залежить від форми кривої на поверхні. В загальному випадку він є змінним і залежить від точки на кривій, так само, як і кривина, тобто  $\epsilon = \epsilon(s)$  і  $k = k(s)$ , де  $s$  - довжина дуги кривої. Для геодезичної лінії кут  $\epsilon$  у всіх точках рівний нулю, тобто головна нормаль кривої збігається із нормаллю до поверхні.

Припустимо, що пружність скиби мала, тобто вона практично не чинить опору згинанню. Тоді на елемент скиби розміром  $a \times b \times ds$  (рис. 1, б) діють дві сили: сила ваги  $dP = (a \times b \times ds) \cdot \eta \cdot g = a \cdot b \cdot \eta \cdot g \cdot ds$ , де  $\eta$  – щільність ґрунту,  $g$  – прискорення вільного падіння і відцентрова сила  $dF_{\text{в}} = mV^2k = a \cdot b \cdot \eta \cdot V^2k \cdot ds$ . Обидві сили потрібно розкласти за напрямками, як показано на рис. 2,а. Складова відцентрової сили, що спроекційована на нормаль до поверхні, спричинює тиск елемента скиби на полицю. Її величину визначимо із виразу  $dF_{\text{вн}} = a \cdot b \cdot \eta \cdot V^2k_n \cdot ds$ . Вона врівноважується реакцією полиці. Друга складова  $dF_{\text{вз}} = a \cdot b \cdot \eta \cdot V^2k_z \cdot ds$ , яка спроекційована на дотичну площину, врівноважується проекцією сили ваги елемента скиби  $mg_{\text{np}} = a \cdot b \cdot \eta \cdot g \cdot ds_{\text{np}}$  (рис. 2,б). На рис. 2,б циліндричну полицю плуга показано умовно розігнутою на дотичну площину  $\mu$ . Штриховою лінією показано слід середньої точки скиби на полиці, якби траєкторією її руху була геодезична лінія (на розгортці вона перетворюється у пряму). Це можливо було б при великій жорсткості скиби (на прикладі паперової стрічки). Однак скиба (особливо для окультурених ґрунтів) не чинить великого опору згинанню і складова ваги  $mg_{\text{np}}$  (рис. 2,б) відхиляє її в дотичній площині від прямолінійного напрямку. Проте при збільшенні швидкості  $V$  оранки складова відцентрової сили  $dF_{\text{вз}} = a \cdot b \cdot \eta \cdot V^2k_z \cdot ds$  зростає прямо пропорційно квадрату швидкості, тобто при незначному підвищенні швидкості складова відцентрової сили зростає суттєво. Оскільки величина складової сили ваги  $mg_{\text{np}} = a \cdot b \cdot \eta \cdot g \cdot ds_{\text{np}}$ , що її врівноважує, не залежить від швидкості, то наростаюча складова відцентрової сили намагається випрямити траєкторію руху елемента скиби, наближаючи її до геодезичної лінії. При нескінченному зростанні швидкості траєкторією руху скиби буде геодезична лінія. Таким чином, геодезичну лінію можна вважати за граничну траєкторію руху скиби, яка може бути для неї реальною у випадку великої швидкості оранки або абсолютно пружної скиби.

Розглянемо дію сил, коли скиба пружна і чинить певний опір її згинанню. Скиба згинається у двох напрямках: в дотичній і нормальній площинах траєкторії. В цих площинах її опір згинанню буде різний і залежатиме від жорсткості скиби. Жорсткість залежить від геометричних розмірів перерізу скиби і визначається добутком модуля пружності  $E$  ґрунту на момент інерції  $I$  перерізу скиби. Для нормальної і дотичної площин жорсткість відповідно запишеться  $EI_n = Eab^3/12$  і  $EI_z = Ea^3b/12$ . Оскільки  $a > b$ , то жорсткість і, відповідно, опір згинанню скиби більший у дотичній площині, ніж у нормальній. Отже, ще одним чинником, що наближає траєкторію руху до геодезичної лінії полиці, є збільшення ширини смуги порівняно із її висотою, тобто глибиною оранки.

Для знаходження сил, необхідних для згинання скиби в обох площинах, скористаємося відомим положенням теорії опору матеріалів, згідно якого кривина  $k$  пружної осі стержня прямо пропорційна прикладеному моменту  $M$  і обернено пропорційна жорсткості стержня  $EI$ , тобто  $k = M/EI$ . Знайшовши момент  $M$  і продиференціювавши його по довжині пружної осі (в нашому випадку по довжині траєкторії  $s$ ), отримаємо силу, яка згинає скибу. Ще одне диференціювання дасть розподілену силу на одиницю довжини траєкторії. Отже, сила для згинання скиби  $F_z$  по її довжині в межах полиці визначиться із формул:

$$\text{– в нормальній площині} \quad F_{zn} = \frac{dM_n}{ds} = E \frac{ab^3}{12} \frac{dk_n}{ds}; \quad (1)$$

$$\text{– в дотичній площині} \quad F_{z2} = \frac{dM_z}{ds} = E \frac{a^3b}{12} \frac{dk_z}{ds}. \quad (2)$$

Скиба тисне на полицю із силою (1), викликаючи силу тертя  $fF_{zn}$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя скиби по полиці. Однак вона залежить від пружності скиби і може бути відсутня у випадку, коли скиба не чинить опору згинанню. Натомість нормальна складова відцентрової сили присутня завжди і не залежить від властивостей ґрунту (мається на увазі, що його щільність стала). Оскільки елементарна сила, з якою тисне елемент скиби на полицю, визначається із виразу  $dF_{ен} = a \cdot b \cdot \eta \cdot V^2 k_n \cdot ds$ , то для знаходження сумарної сили потрібно цей вираз проінтегрувати по довжині дуги  $s$  траєкторії. Приймаючи розміри перерізу скиби незмінними, швидкість оранки і щільність ґрунту сталими, сила  $F_{ен}$  визначиться із виразу:

$$F_{ен} = ab\eta V^2 \int k_n ds. \quad (3)$$

Таким чином, силу тиску від дії відцентрової сили, яка завжди присутня у випадку криволінійної траєкторії, можна зменшити, зменшуючи інтеграл  $\int k_n ds$ . Ця характеристика кривої на поверхні суто геометрична і не залежить від властивостей ґрунту. Вона буде визначена, якщо визначена траєкторія руху скиби по полиці. Однак якщо припустити, що траєкторія скиби наближається до геодезичної лінії або рухається по ній, то тоді задача знаходження цього інтеграла стає визначеною. Кут  $\varepsilon$  (рис. 2, а) в цьому випадку стає рівним нулю і  $k_n = k$ , тобто розкладання вектора кривини не відбувається і вся відцентрова сила діє по нормалі до поверхні полиці. Зазначений інтеграл має геометричний зміст, який впливає із визначення кривини  $k$  кривої. Оскільки  $k = d\theta/ds$ , то  $\theta = \int k ds$ , де  $\theta$  – кут, на який повертається дотична до кривої при її русі по ній від початкового до кінцевого значення дуги. Цей кут проф. Л.В. Гячев назвав кутом обхвату полиці. Проте на полиці його важко побачити або уявити, оскільки є певні геометричні особливості. Його розгляд почнемо із геодезичних ліній на циліндричних поверхнях.

Як уже зазначалося, геодезичні лінії на циліндричних поверхнях перетинають прямолінійні твірні під сталим кутом  $\gamma$  і на його розгортці перетворюються у прямі. Якщо цей кут прямий, то геодезична лінія є ортогональним перерізом циліндра, тобто є плоскою. Якщо  $\gamma = 0$ , то геодезичною лінією є прямолінійна твірна поверхні. При всіх інших значеннях кута  $\gamma$  геодезичними лініями є просторові криві. Якщо їх всіх спроеціювати на площину перпендикулярну твірним циліндра, то їх проекцією буде плоска крива – ортогональний переріз циліндра. В праці [6] показаний взаємозв'язок між кривиною  $k$  кривої і кривиною  $k_{неп}$  її проекції (тобто перерізу циліндра), а також між довжинами їх дуг  $s$  і  $s_{неп}$ :  $k = k_{неп} \sin^2 \gamma$ ;  $ds = ds_{неп} / \sin \gamma$ . Виходячи із цього, ми можемо записати нову залежність кута  $\theta$ :

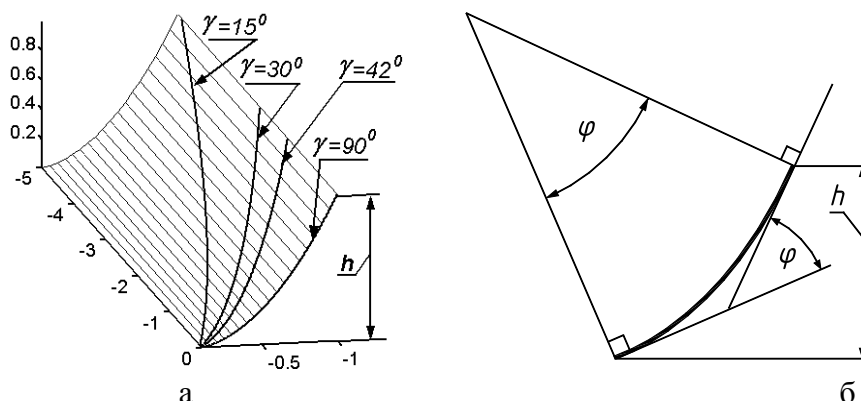
$$\theta = \int k ds = \sin \gamma \int k_{неп} ds_{неп}. \quad (4)$$

Аналізуючи залежність (4), ми можемо зробити важливий висновок: найбільше значення кут  $\theta$  має при  $\gamma = 90^\circ$ , тобто для плоскої кривої ортогонального перерізу циліндра. При інших значеннях кута  $\gamma$  він зменшується прямо пропорційно його синусу. Для кращого розуміння суті цього кута розглянемо конкретний приклад геодезичних ліній на циліндричній поверхні.

Нехай ортогональний переріз циліндра буде дугою параболи, яка знаходиться у вертикальній площині і має параметричні рівняння:  $x = -v$ ;  $z = av^2$ , де  $a$  – стала величина,  $v$  – незалежна змінна. Тоді параметричні рівняння циліндра запишуться:

$$X = -v; \quad Y = -u; \quad Z = av^2, \quad (5)$$

де  $u$  – друга незалежна змінна – довжина прямолінійної твірної.



**Рис. 3. Циліндрична поверхня (5) та її проекція на площину, перпендикулярну прямолінійним твірним:**

**а) геодезичні лінії на поверхні із зазначенням величини кута  $\gamma$ ;**

**б) ортогональний переріз поверхні із дотичними і нормалями на кінцях кривої**

Відсік поверхні висотою  $h$  і з довжиною твірних, рівних п'ять лінійних одиниць, показано на рис. 3,а. Щоб побудувати лінію на поверхні, потрібно зв'язати між собою дві незалежні змінні  $u$  і  $v$  певною залежністю. Для кривої, яка перетинає всі твірні під сталим кутом  $\gamma$ , ця залежність має вигляд:

$$u = \operatorname{ctg} \gamma \int \sqrt{x'^2 + z'^2} dv = \operatorname{ctg} \gamma \int \sqrt{1 + 4a^2 v^2} dv = \frac{2av\sqrt{1 + 4a^2 v^2} + \operatorname{Arcsinh}(2av)}{4a \operatorname{tg} \gamma}.$$

Таким чином, параметричні рівняння геодезичної лінії на циліндричній поверхні (5) приймають вигляд:

$$\begin{aligned} x_2 &= -v; \\ y_2 &= -\frac{2av\sqrt{1 + 4a^2 v^2} + \operatorname{Arcsinh}(2av)}{4a \operatorname{tg} \gamma}; \\ z_2 &= av^2. \end{aligned} \quad (6)$$

На рис. 3,а за рівняннями (6) на циліндричній поверхні (5) побудовано геодезичні лінії для різних кутів вступу скиби на поверхню, включаючи і прийнятий для плугів кут  $\gamma=42^\circ$ . Знайдемо кут  $\theta$  обхвату скиби відсіком поверхні (полицею) для кожної із цих ліній. Кривину  $k$  і диференціал дуги  $ds$  знаходимо через перші і другі похідні за відомими формулами [5] (наводимо готовий результат):

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y'_2 & z'_2 \\ y''_2 & z''_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'_2 & x'_2 \\ z''_2 & x''_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_2 & y'_2 \\ x''_2 & y''_2 \end{vmatrix}^2}}{(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2)^{3/2}} = \frac{2a \sin^2 \gamma}{(1 + 4a^2 v^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

$$ds = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2} dv = \frac{\sqrt{1 + 4a^2 v^2}}{\sin \gamma} dv. \quad (8)$$

Таким чином, кут  $\theta$  обхвату скиби буде:

$$\theta = \int kds = 2a \sin \gamma \int \frac{dv}{1 + 4a^2v^2} = \sin \gamma \operatorname{Arctg}(2av). \quad (9)$$

За формулою (9) можна знайти кут  $\theta$  для будь-якої із геодезичних ліній, зображених на рис. 3, а. Оскільки для них всіх зміна параметра  $v$  відбувається в однакових межах (від  $v_1$  в момент вступу скиби на нижню твірну до  $v_2$  при її сході із верхньої твірної), значення кута  $\theta$  відрізняться між собою в залежності від  $\sin \gamma$ , тобто ми отримали результат, знайдений раніше. Звідси випливає, що при підйомі скиби на одну і ту ж висоту  $h$  (рис. 3) найбільша сила тиску і, відповідно, тяговий опір буде при  $\gamma=90^\circ$ , тобто при підйомі скиби найкоротшим шляхом перпендикулярно твірним. При  $\gamma=30^\circ$  тяговий опір зменшується вдвічі, хоча шлях руху скиби збільшується. Пояснюється це тим, що кривина траєкторії при цьому зменшується більш інтенсивно. Проте якщо іти таким шляхом зменшення тягового опору, потрібно значно збільшувати довжину полиці. Очевидно, що величина кута  $\theta$  не залежить від точки вступу скиби на нижню твірну під заданим кутом  $\gamma$ .

Тепер розглянемо фізичну суть кута  $\theta$ . Найкраще його побачити (і при цьому він відповідає своїй назві) при  $\gamma=90^\circ$ . В цьому випадку дотична до траєкторії при її русі із нижньої у верхню точку повертається на кут  $\varphi$  (рис. 3, б). Відповідно на такий же кут повертається і нормаль до поверхні, тобто це кут між нижньою і верхньою нормаллями при підйомі скиби на задану висоту  $h$ . Для цього випадку  $\theta=\varphi$ . Для інших траєкторій при  $\gamma \neq 90^\circ$  кут  $\theta$  визначається множенням кута  $\varphi$  на  $\sin \gamma$ , тобто він буде менший, незважаючи на однакову висоту підйому  $h$ . Це пояснюється тим, що кут  $\theta$  утворюється поворотом не нормалі до поверхні вздовж траєкторії, а дотичної до траєкторії і тільки при  $\gamma=90^\circ$  ці кути рівні.

Якщо для циліндричної поверхні закономірності утворення кута  $\theta$  з'ясовані і описуються відносно простими залежностями, то для нерозгортних поверхонь його знаходження ускладнюється. Розглянемо особливості утворення кута  $\theta$  для циліндроїдальних полиць культурного типу. Циліндроїдальні поверхні є лінійчатими нерозгортними і для знаходження геодезичних ліній на них потрібно розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку [3]. Циліндроїдальна поверхня полиці культурного типу утворюється напрямною плоскою кривою, якою є парабола і яка розміщена у вертикальній площині перпендикулярно лезу леміша на відстані  $2/3$  від його початку. Вона задається двома точками  $O$  і  $Q$  і дотичними в них, проведених під кутами  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  до осі  $x$  (рис. 4, а). Точка  $O$  розташується в початку координат, тоді координати другої точки  $Q$  будуть:  $x_Q=L$ ;  $z_Q=H$ . Висота  $H$  приймається рівною  $55$  см, а виліт  $L$ , кути  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  можуть варіювати в заданих межах. За заданою плоскою напрямною кривою можна побудувати поверхню полиці як циліндричної, так і циліндроїдальної форми. Якщо поверхня циліндрична, то всі її прямолінійні твірні паралельні між собою, паралельні дну борозни і утворюють кут  $\gamma=42^\circ$  із стінкою борозни. Якщо поверхня циліндроїдальна, то всі її прямолінійні твірні теж паралельні дну борозни, але із стінкою борозни утворюють змінний кут  $\gamma$  в залежності від висоти  $h$  від дна борозни. Проф. М.В. Щучкін наводить графіки зміни кута  $\gamma = \gamma(h)$ , які він побудував в результаті масового вивчення кращих культурних полиць і експериментальних корпусів [6]. Графік цієї залежності наведено на рис. 4, б і яка може бути описана алгебраїчною кривою четвертого порядку [7]:

$$\gamma = c_1 h^4 + c_2 h^3 + c_3 h^2 + c_4 h + c_5, \quad (10)$$

де  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  – коефіцієнти, які знаходяться із умови проходження графіка через характерні точки ( $\gamma=42^\circ$  при  $h=0$ ,  $\gamma=40^\circ$  при  $h=10$  см,  $\gamma=47^\circ$  при  $h=55$  см).

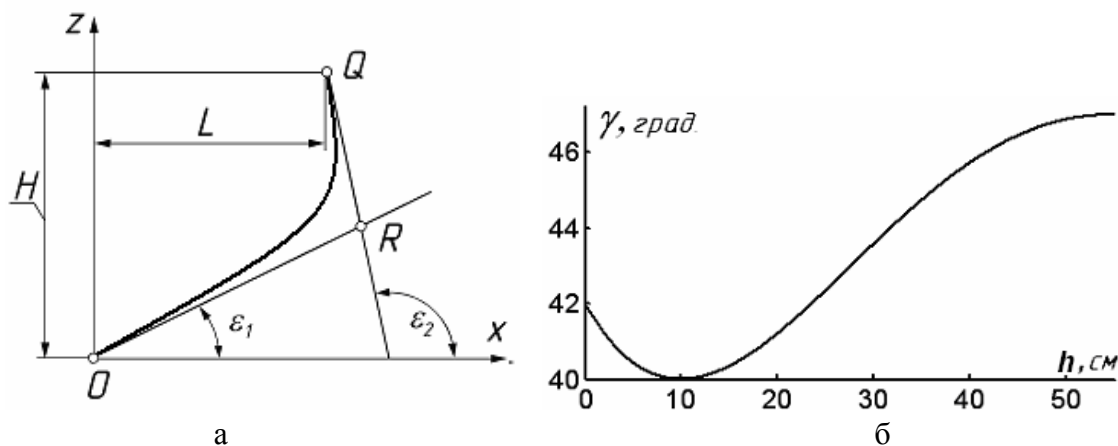


Рис. 4. До задання поверхні полиці культурного типу:

- а) напрямна крива (парабола у вертикальній площині, перпендикулярній лезу леміша);  
б) графік зміни кута  $\gamma = \gamma(h)$  нахилу прямолінійної твірної поверхні до стінки борозни

Якщо параметричні рівняння напрямної параболи мають вигляд [7]:

$$\begin{aligned} x &= (x_Q - 2x_R)v^2 + 2x_Rv; \\ h &= (z_Q - 2z_R)v^2 + 2z_Rv, \end{aligned} \quad (11)$$

де  $v$  – змінна, яка приймає значення в межах  $v=0 \dots 1$ ;

$x_Q, x_R, z_Q, z_R$  – сталі величини, які знайдені за заданими конструктивними параметрами  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, L, H$ , то параметричні рівняння циліндроїдальної поверхні полиці запишуться:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \gamma_0 - u \sin \gamma; \\ Y &= x \sin \gamma_0 + u \cos \gamma; \\ Z &= h, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $u$  – друга незалежна змінна поверхні, яка задає довжину прямолінійної твірної;

$\gamma = \gamma(h), x = x(v), h = h(v)$  – залежності, наведені в (10) і (11);

$\gamma_0 = 42^\circ$  – кут установки леза леміша до стінки борозни.

Якщо між незалежними змінними  $u$  і  $v$  встановити певну залежність у вигляді  $u = u(v)$ , то на поверхні (12) буде задана лінія. Нехай цією лінією буде геодезична, для якої залежність  $u = u(v)$  будемо розшукувати. В такому випадку рівняння геодезичної лінії запишуться:

$$\begin{aligned} x_2 &= x \cos \gamma_0 - u \sin \gamma; \\ y_2 &= x \sin \gamma_0 + u \cos \gamma; \\ z_2 &= h. \end{aligned} \quad (13)$$

Для того, щоб лінія (13) була геодезичною, повинна виконуватися рівність [3]:

$$\begin{vmatrix} N_x & N_y & N_z \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x''_2 & y''_2 & z''_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

де  $N_x, N_y, N_z$  – координати одиничного вектора нормалі до поверхні;



$x'_2, y'_2, z'_2, x''_2, y''_2, z''_2$  - перші і другі похідні рівнянь (13) по змінній  $v$ .

Знаходження одиничного вектора нормалі до поверхні показано в праці [3]. Для поверхні (12) наведемо готовий результат виразів вектора вздовж геодезичної лінії:

$$N_x = -z'_2 \cos \gamma; \quad N_y = -z'_2 \sin \gamma; \quad N_z = x'_2 \cos(\gamma - \gamma_0) - u\gamma'. \quad (15)$$

Похідні рівнянь (13) по змінній  $v$  будуть:

$$\begin{aligned} x'_2 &= x' \cos \gamma_0 - u' \sin \gamma - u\gamma' \cos \gamma; \\ y'_2 &= x' \sin \gamma_0 + u' \cos \gamma - u\gamma' \sin \gamma; \\ z'_2 &= h'; \\ x''_2 &= x'' \cos \gamma_0 + (u\gamma'^2 - u'') \sin \gamma - (u\gamma'' + 2u'\gamma') \cos \gamma; \\ y''_2 &= x'' \sin \gamma_0 - (u\gamma'^2 - u'') \cos \gamma - (u\gamma'' + 2u'\gamma') \sin \gamma; \\ z''_2 &= h''. \end{aligned} \quad (16)$$

Оскільки  $\gamma = \gamma(h)$  згідно (10), а  $h=h(v)$  згідно (11), то перші і другі похідні кута  $\gamma$  запишуться:

$$\gamma' = \frac{d\gamma}{dh} \frac{dh}{dv}; \quad \gamma'' = \left( \frac{d\gamma}{dh} \frac{dh}{dv} \right)' = \frac{d^2\gamma}{dh^2} \left( \frac{dh}{dv} \right)^2 + \frac{d\gamma}{dh} \frac{d^2h}{dv^2}. \quad (17)$$

Підстановка виразів (15) і (16) із врахуванням (17) у (14) приводить до диференціального рівняння:

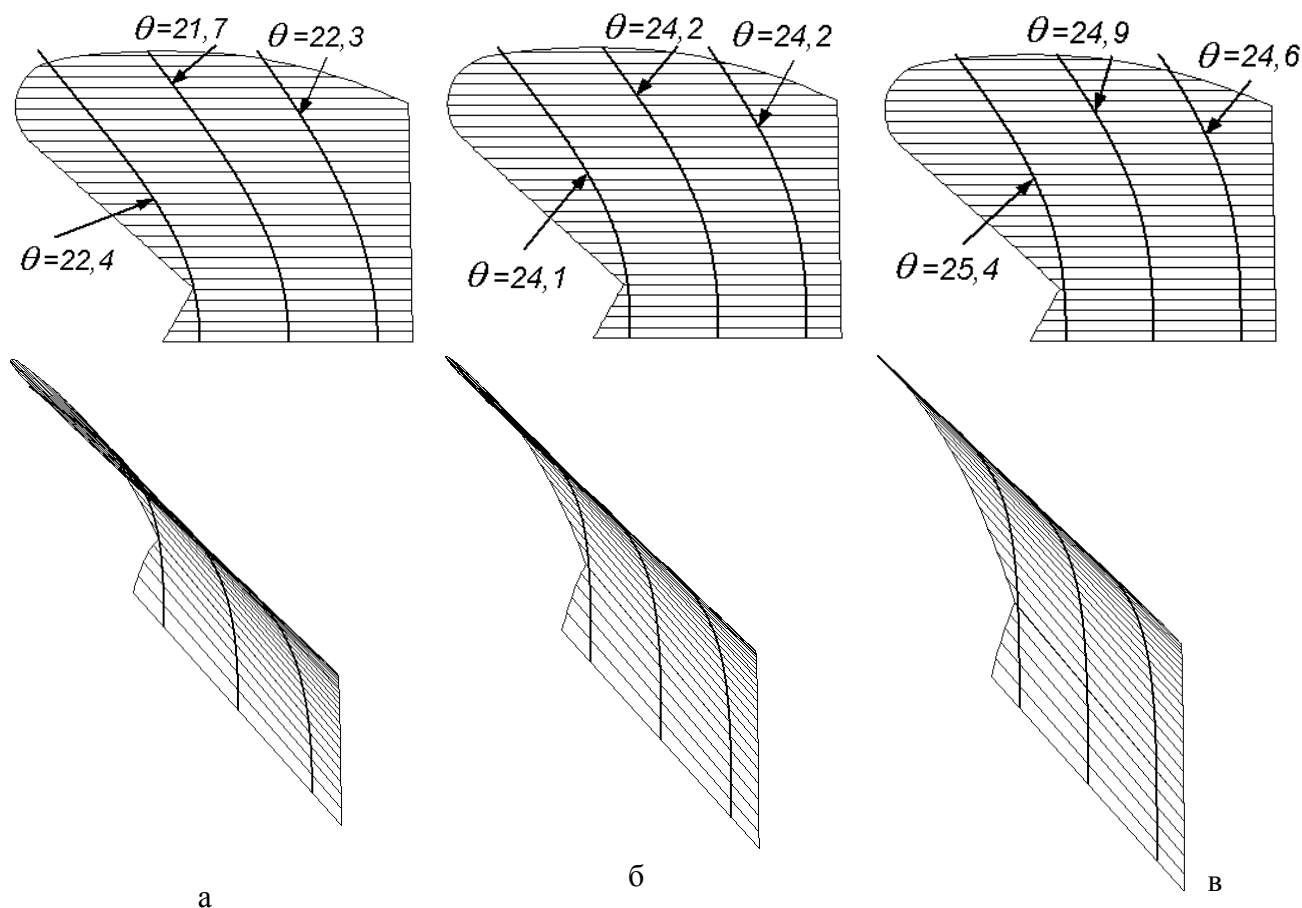
$$u'' = \frac{A - B + C + D + E}{F}, \quad (18)$$

де складові, що є функціями змінної  $v$ , мають наступні вирази:

$$\begin{aligned} A &= \gamma'^2 u (2\gamma'^2 u^2 + 4u'^2 + 2z'^2_2 + x'^2_2) + u' (2\gamma'\gamma'' u^2 + 2z'_2 z''_2 + x'_2 x''_2); \\ B &= [ux'_2 (2\gamma'^3 u + \gamma'' u') + \gamma' u' (2u'x'_2 + ux''_2)] \cos(\gamma - \gamma_0); \\ C &= x'_2 (\gamma'^2 x'_2 u + x''_2 u') \cos[2(\gamma - \gamma_0)]; \\ D &= 2[\gamma' u (\gamma' ux''_2 - 2\gamma' u' x'_2 - \gamma'' ux'_2) + z'_2 (x''_2 z'_2 - x'_2 z''_2)] \sin(\gamma - \gamma_0); \\ E &= x'_2 (\gamma'' ux'_2 + 2\gamma' u' x'_2 - \gamma' ux''_2) \sin[2(\gamma - \gamma_0)]; \\ F &= 2\gamma'^2 u^2 + 2z'^2_2 + x'^2_2 - 4\gamma' ux'_2 \cos(\gamma - \gamma_0) + x'^2_2 \cos[2(\gamma - \gamma_0)]. \end{aligned} \quad (19)$$

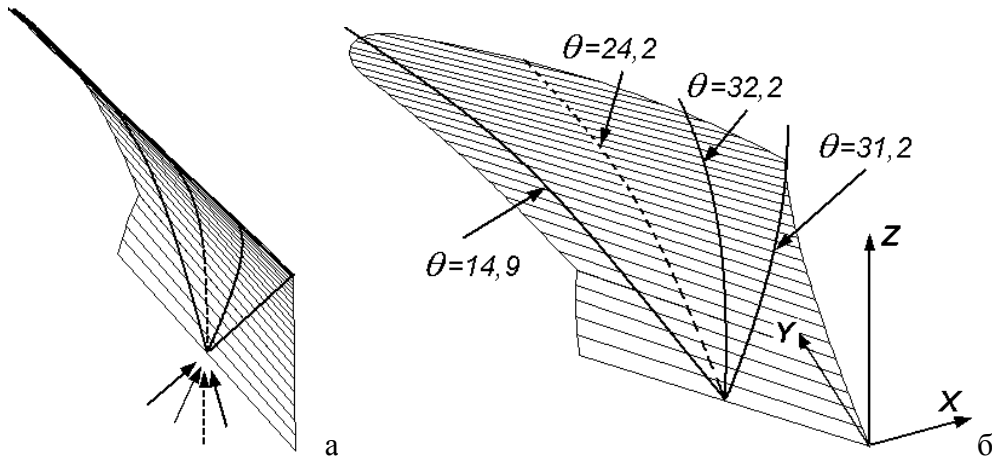
Диференціальне рівняння (18) із врахуванням (19) було розв'язане чисельними методами. Постійні інтегрування вибиралися таким чином, щоб геодезична лінія починалася в заданій точці леза і перетинала його під прийнятним у плугах кутом  $\gamma_0=42^\circ$ . Отримана залежність  $u=u(v)$  підставлялася в рівняння (13), за яким на поверхні полиці (12) будувалася геодезична лінія. Поверхню полиці ми обмежили лобовим контуром, автоматизована побудова якого детально описана в праці [7]. На відміну від циліндричної поверхні значення кута  $\theta$  для геодезичних ліній однакової висоти, які виходять із різних точок леза, відрізняються між собою, проте з невеликою різницею (рис. 5). Очевидно, що ця різниця буде тим більша, чим більше циліндроїдальна поверхня відрізнятиметься від циліндричної, тобто від виду закономірності (10), яка встановлює закон розподілу прямолінійних твірних по висоті. При  $\gamma = \gamma_0 - const$  циліндроїдальна поверхня перетворюється в циліндричну і значення кута  $\theta$  для геодезичних ліній по довжині леза стає однаковим.

На рис. 5 для прийнятих кутів  $\varepsilon_1=30^\circ$ ,  $\varepsilon_2=95^\circ$  побудовано геодезичні лінії для різної величини вильоту  $L$ , причому геодезичні лінії виходять із трьох точок на лезі. Чисельне значення кута  $\theta$  для кожної лінії зазначено стрілкою. Порівнюючи відповідні чисельні значення кута  $\theta$  для геодезичних ліній із різною величиною вильоту  $L$ , можна зробити висновок, що цей показник зростає із збільшенням величини  $L$ . На рис. 7, а три полиці із різним вильотом і геодезичною лінією, що виходить із середини леза, зображені так, що лезо проєкціюється в точку. Очевидно, що зростання величини  $\theta$  зумовлене збільшенням шляху скиби при її підйомі на одну і ту ж величину.



**Рис. 5. Культурні полиці із геодезичними лініями на них при заданих конструктивних параметрах  $\varepsilon_1=30^\circ$ ,  $\varepsilon_2=95^\circ$  і різних значеннях вильоту  $L$  (рис. 4,а):**  
**а)  $L=20$  см;                      б)  $L=30$  см;                      в)  $L=40$  см**

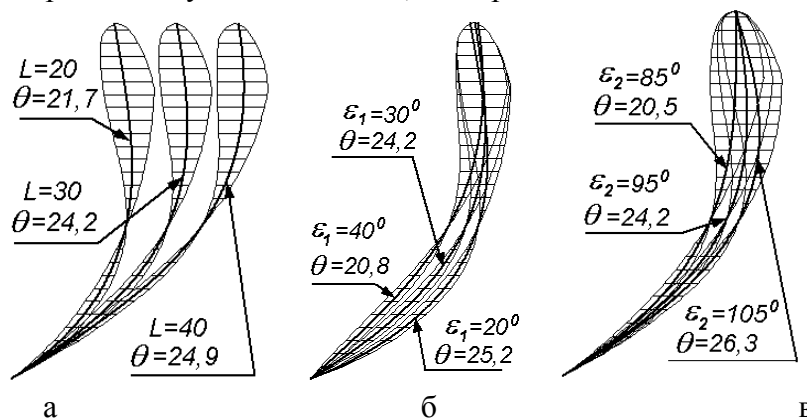
На рис. 6 для прийнятих кутів  $\varepsilon_1=30^\circ$ ,  $\varepsilon_2=95^\circ$ , вильоту  $L=30$  см побудовано геодезичні лінії із середньої точки леза під різними кутами вступу скиби на полицю, причому для прийнятого значення  $\gamma_0=42^\circ$  геодезична лінія зображена штриховою лінією.



**Рис. 6.** Напрямок вступу скиби а) та значення кута обхвату для відповідної траєкторії для полиці культурного типу б)

При кутах вступу, близьких до  $90^\circ$  значення кута  $\theta$  має найбільше значення, і по мірі зменшення кута вступу воно теж зменшується, але не так, як на циліндричній поверхні, де ця закономірність описується аналітично.

З'ясуємо, як залежить кут  $\theta$  від кутів  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$  (рис. 4, а) для відповідної форми напрямної кривої. На рис. 7, б чисельним інтегруванням побудовані геодезичні лінії із середньої точки леза із зазначенням кута  $\theta$  для різних значень кутів  $\varepsilon_1$  і прийнятих значеннях  $L=30$  см,  $\varepsilon_2=95^\circ$ , а на рис. 7, в – для різних значень кутів  $\varepsilon_2$  і прийнятих значеннях  $L=30$  см,  $\varepsilon_1=30^\circ$ . Із отриманих результатів видно, що із зростанням кута  $\varepsilon_1$  значення кута  $\theta$  зменшується, а при зростанні кута  $\varepsilon_2$  – навпаки, теж зростає.



**Рис. 7.** Геодезичні лінії, що виходять із середини леза, яке проєціюється в точку, та відповідні значення кута  $\theta$  для різних форм напрямної параболы полиці культурного типу:

- а) різні величини вильоту  $L$  при прийнятих значеннях кутів  $\varepsilon_1=30^\circ$ ,  $\varepsilon_2=95^\circ$ ;
- б) різні значення кута  $\varepsilon_1$  при прийнятих значеннях  $\varepsilon_2=95^\circ$ ,  $L=30$  см;
- в) різні значення кута  $\varepsilon_2$  при прийнятих значеннях  $\varepsilon_1=30^\circ$ ,  $L=30$  см.

### Висновки

Динамічну складову тягового опору плуга, яка прямо пропорціональна квадрату швидкості оранки, можна оцінювати за величиною безрозмірного коефіцієнта, названого кутом обхвату скиби. Його можна знайти для поверхні полиці, якщо відома траєкторія руху

середньої точки перерізу скиби. Якщо за криву руху скиби прийняти геодезичну лінію, як граничну траєкторію, то задача стає геометричною по розшукуванню геодезичної лінії на поверхні полиці і знаходженню відповідного значення кута обхвату. Для циліндричних поверхонь така задача значно спрощується, оскільки геодезична лінія перетинає всі твірні під сталим кутом і кут обхвату залежить від величини цього кута і довжини лінії на полиці. Для циліндроїдальних поверхонь кут перетину є змінним, тому встановити певні аналітичні закономірності по відшукуванню геодезичних ліній із прогнозованою величиною кута обхвату не вдається. Однак чисельними методами можна встановитим вплив того чи іншого конструктивного параметра полиці на величину кута обхвату скиби, що на пряму зв'язано із величиною динамічної складової тягового опору. Запропонований підхід не є визначальним для проектування полиць, оскільки він враховує тільки геометрію поверхні без врахування інших агротехнічних вимог. Наприклад, динамічна складова опору зовсім зникне, якщо поверхня перетвориться у плоский клин, однак при цьому не відбудуватиметься обороту скиби. Тому пошуки шляхів зменшення кута обхвату скиби полицею повинні йти у поєднанні із дотриманням вимог до якості оранки.

### *Літературі*

1. Гячев Л.В. Теория лемешно-отвальной поверхности / Л.В. Гячев. – зерноград, 1961. – 317 с.
2. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
3. Войтюк Д.Г. Побудова геодезичних ліній, як граничних траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного аграрного університету. – К.: НАУ, 2003. – Вип. 60. – С. 138-141.
4. Войтюк Д.Г. Проектування полиці плуга із розгортної поверхні за заданою граничною траєкторією руху скиби / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Вісник аграрної науки. – К.: "Аграрна наука", 1998. – № 1. – С. 47-49.
5. Булгаков В.М. Проектування полиці плуга за заданою геодезичною лінією – граничною траєкторією руху скиби / В.М. Булгаков, Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. – К., 2010. – Вип. 144, ч. 5. – С. 20 – 35.
5. Войтюк Д.Г., Пилипака С.Ф. Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Збірник наукових праць Національного аграрного університету "Механізація сільськогосподарського виробництва". – Т.10. – К.: НАУ, 2001. – С. 74-78.
6. Щучкин Н.В. Лемешные плуги и луцильники / Н.В. Щучкин. – М.: Машиз, 1952. – 291 с.
7. Булгаков В.М. Автоматизована побудова 3D моделі полиці плуга з циліндроїдальної поверхні / В.М. Булгаков, Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник НУБіП України: Серія "Техніка та енергетика АПК". – 2011. – Вип. 166. – Ч. 2. (ISSN 2222 – 861).